

А. Д. АЛЕКСАНДРОВ

Избранные труды

Том 2

ВЫПУКЛЫЕ  
МНОГОГРАННИКИ

**А. Д. АЛЕКСАНДРОВ**

**Избранные труды**

**Том 2**

**ВЫПУКЛЫЕ  
МНОГОГРАННИКИ**

НОВОСИБИРСК  
«НАУКА»  
2007

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С. Л. СОБОЛЕВА



*A. Scherer*

УДК 51(01) + 514  
ББК 22.1  
А46

*Серия основана в 1932 г.*

Редакционная коллегия тома

О. А. Ладыженская (ответственный редактор),

Ю. Г. Решетняк (ответственный редактор),

В. А. Александров, Ю. Д. Бураго, С. С. Кутателадзе, Н. Н. Уралыцева

**Александров А. Д.** Выпуклые многогранники / А. Д. Александров. — Новосибирск: Наука, 2007. — iv + 492 с. — (Избранные труды; Т. 2).

ISBN 978-5-02-023184-9 (т. 2).

ISBN 5-02-032427-2.

Академик А. Д. Александров (1912–1999) — один из крупнейших геометров XX века. Том 2 представляет собой переиздание его знаменитой книги «Выпуклые многогранники», впервые опубликованной в 1950 г. и вошедшей в золотой фонд достижений отечественной науки. Настоящее издание содержит многочисленные комментарии и расширенный список литературы, подготовленные В. А. Залгаллером и отражающие современное состояние данной области геометрии.

Издание предназначено для научных работников в области математики и истории науки, аспирантов и студентов старших курсов физико-математических специальностей. Ил. 161. Библиогр.: 377 назв.

**Alexandrov A. D.** Convex Polyhedra / A. D. Alexandrov. — Novosibirsk: Nauka, 2007. — iv + 492 p. — (Selected Works; Vol. 2).

Academician A. D. Alexandrov (1912–1999) is one of the greatest geometers of the XXth century. Volume 2 is a reprint of his famous book “Convex polyhedra”, first published in 1950 and reckoned among the best contributions of the Russian science. The present edition contains the numerous comments and supplementary references by Professor V. A. Zalgaller which reflect the modern state of this branch of geometry.

The book is aimed at the scientists in mathematics and history of science, as well as the graduate and postgraduate students of physics and mathematics departments.

Утверждено к печати Ученым советом

Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Р  И

*Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту № 07-01-02008*

ТП-07-II-№ 134

ISBN 978-5-02-023184-9 (т. 2)

ISBN 5-02-032427-2

© А. Д. Александров, 2007

© Российская академия наук, 2007

© Институт математики

им. С. Л. Соболева СО РАН, 2007

© Оформление. «Наука». Сибирская

издательская фирма РАН, 2007

---

---

## От редколлегии

---

---

В конце 2003 г. Российская академия наук приняла решение издать в трех томах избранные труды Александра Даниловича Александрова.

Творчество академика А. Д. Александрова исключительно многогранно. В его трудах по теории смешанных объемов и теории поверхностей «в целом», теории многообразий ограниченной кривизны и теории уравнений Монжа — Ампера, в работах по принципу максимума для эллиптических дифференциальных уравнений и основаниям теории относительности решены фундаментальные проблемы и поставлены новые принципиальные вопросы, вызвавшие к жизни огромное число публикаций. А. Д. Александров стал одним из основателей отечественной школы геометрии «в целом».

В том 1 избранных трудов, увидевший свет в 2006 г., вошли математические статьи А. Д. Александрова, опубликованные им на русском языке, а также библиография его трудов и очерк его жизни и творчества. Том 2 представляет собой переиздание его знаменитой книги «Выпуклые многогранники». В том 3 войдут математические статьи Александра Даниловича, изданные им на иностранных языках, а также статьи по философии, этике и общим вопросам развития науки.

Книга А. Д. Александрова «Выпуклые многогранники» [19] впервые вышла в 1950 г. и оказала существенное влияние как на теорию выпуклых многогранников, так и на смежные с ней теорию выпуклых тел и теорию Брунна — Минковского. О том, что она не утратила своего значения до сих пор, можно судить, например, по сравнительно недавним добротным учебникам Б. Грюнбаума [289] и Г. Циглера [377] по теории выпуклых многогранников, а также по исчерпывающей монографии Р. Шнайдера [343] и обзору Р. Гарднера [280] по теории Брунна — Минковского. Теория многогранников и сейчас активно развивается. Не входя в детали, укажем лишь некоторые важнейшие результаты, полученные благодаря идеям и методам, предложенным А. Д. Александровым в этой книге.

1. Используя метод доказательства теорем существования, предложенный А. Д. Александровым в «Выпуклых многогранниках», в 1970 г. Е. М. Андреев [54, 55] указал необходимые и достаточные условия существования остроугольного выпуклого многогранника с заданными двугранными углами в трехмерном пространстве Лобачевского. Эти условия оказались чрезвычайно полезным инструментом для построения трехмерных гиперболических многообразий и в последующем были подвергнуты всестороннему изучению [295, 296, 332].

2. В 1976 г. Р. Коннелли построил замкнутый изгибаемый многогранник без самопересечений [258]. В последующие годы у изгибаемых многогранников были открыты такие глубокие свойства, как сохранение интегральной средней кривизны [231] и объема в процессе изгибания [195–198, 266, 335, 340]. Теория изгибаемых многогранников активно развивается в наши дни.

3. Теорему Минковского и ряд теорем существования, единственности и жесткости, обсуждаемых в этой книге, удалось перенести на невыпуклые многогранники [161, 333, 354].

Можно приводить и другие факты, свидетельствующие об актуальности данной книги, но мы перейдем к обсуждению особенностей настоящего издания. Прежде всего отметим, что в нем использованы современные стандарты правописания, оформления библиографии и, по мере возможности, современные математические обозначения. Например: вместо «итти» мы пишем «идти», «формулированные результаты» — «сформулированные результаты», «эвклидово пространство» — «евклидово пространство», «двухмерное многообразие» — «двумерное многообразие». В процессе редактирования были устранены также замеченные опечатки, очевидные описки и стилистические погрешности.

Значительный вклад в подготовку настоящего тома внес Виктор Абрамович Залгаллер, написавший многочисленные подстрочные примечания, отражающие современное состояние этой области геометрии, и расширивший библиографию за счет книг и статей, вышедших после 1950 г. Редколлегия выражает ему свою искреннюю признательность.

Мы благодарим всех, кто содействовал подготовке данной книги к печати, и в первую очередь сотрудников отдела анализа и геометрии Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук.

Научное наследие А. Д. Александрова вошло в золотой фонд отечественной науки, стало неотъемлемой частью современной математики. Мы надеемся, что издание трудов первого геометра России XX в. будет способствовать сохранению и развитию науки в нашей стране.

*В. А. Александров, С. С. Кутателадзе, Ю. Г. Решетняк*

---

---

## Предисловие

---

---

**1. О содержании и целях книги.** Настоящая книга не имеет целью охватить все учение о выпуклых многогранниках. Она посвящена в основном вопросу о том, какие данные и в какой степени могут определять выпуклый многогранник.

Для всяких данных, относящихся к многограннику, как длины ребер, площади граней и т. п., указанный вопрос распадается на два.

Во-первых, мы спрашиваем, определяют ли эти данные многогранник однозначно с точностью до движения или иного тривиального преобразования (отражения, параллельного переноса, подобия), подобно тому как длины сторон определяют треугольник с точностью до движения, а углы — с точностью до подобия. На такой вопрос отвечают общие теоремы о единственности выпуклого многогранника с теми или иными данными, единственности с точностью до движения или иного тривиального преобразования.

Во-вторых, мы спрашиваем о необходимых и достаточных условиях, которым должны удовлетворять те или иные данные для того, чтобы вообще существовал выпуклый многогранник с такими данными, подобно тому как необходимым и достаточным условием существования треугольника со сторонами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  является выполнение трех неравенств вида: сумма двух сторон больше третьей, т. е.  $a + b > c$ ,  $b + c > a$ ,  $c + a > b$ . Так как необходимость соответствующих условий будет во всех случаях получаться очень просто, то ядро вопроса будет всегда состоять в доказательстве достаточности, т. е. в доказательстве того, что при выполнении требуемых условий многогранник с такими данными существует.

Речь идет, следовательно, об общих теоремах существования выпуклого многогранника с теми или иными данными. При этом рассматриваются данные, определяющие многогранник, т. е. такие, для которых имеет место соответствующая теорема единственности, аналогично тому, как задание длин сторон  $a$ ,  $b$ ,  $c$  определяет треугольник.



Первая общая теорема единственности была доказана О. Коши в 1813 г. [254]<sup>1)</sup>. Она гласит: *два замкнутых выпуклых многогранника, одинаково составленных из соответственно равных граней, равны; или в форме теоремы единственности: замкнутый выпуклый многогранник, данным образом составленный из данных граней, — единственный с точностью до движения или движения и отражения*<sup>2)</sup>.

В 1897 г. Г. Минковский доказал существование и единственность (с точностью до переноса) замкнутого выпуклого многогранника с данными направлениями и площадями граней [321]<sup>3)</sup>.

На этом круг общих теорем существования и единственности, собственно говоря, исчерпывался<sup>4)</sup>. Мне удалось дополнить его новыми теоремами и охватить все эти теоремы, включая теоремы Коши и Минковского, единым методом. Для теорем единственности это был метод Коши, которым он доказал свою теорему. Для теорем существования это был новый в теории многогранников метод, основанный на применении топологии в лице так называемой теоремы об инвариантности области. Две новые теоремы существования и единственности были открыты С. П. Оловянишниковым [156] на том же пути.

В результате область рассматриваемых теорем о выпуклых многогранниках приобрела объем и стройность, делающие ее, как нам кажется, заслуживающей самостоятельного систематического изложения.

Первая цель книги и состоит в том, чтобы осуществить такое изложение.

Для того чтобы сделать книгу доступной и интересной возможно большому кругу читателей, я включил в нее изложение первоначальных сведений о выпуклых многогранниках; это казалось тем более необходимым,

<sup>1)</sup> В доказательстве Коши, являвшем собою образец остроумия, были, однако, ошибки, исправленные потом другими геометрами. Безупречное и ясное доказательство дано в книге Ж. Адамара [1, с. 534–543]. Говоря о теореме Коши как первой общей теореме единственности, мы не имеем в виду таких по существу тривиальных теорем, как, например, теорема единственности замкнутого выпуклого многогранника с данными вершинами.

<sup>2)</sup> Два многогранника «имеют одинаковое строение», если их грани, ребра и вершины можно сопоставить так, что соответственные грани (ребра) будут сходиться по соответственным ребрам (вершинам). Если к тому же соответственные ребра равны и углы при соответственных вершинах на соответственных гранях также равны, то многогранники «одинаково составлены из равных граней».

<sup>3)</sup> Точная формулировка теорем Минковского вместе с условиями существования многогранника с данными направлениями и площадями граней дается дальше в своем месте.

<sup>4)</sup> Мы имеем в виду теоремы описанного выше типа. Из их круга выпадает важная теорема о существовании замкнутого выпуклого многогранника с наперед заданной схемой строения, установленная Э. Штейницем в 1915 г. Она не входит в нашу сферу, потому что схема строения, очевидно, не определяет многогранник однозначно. Доказательство этой теоремы воспроизведено в книге Л. А. Люстерника [130].

что систематическое и достаточно полное изложение их в нашей литературе отсутствует.

Топология, на которую мы уже сослались, вызывает часто у людей, с ней не знакомых, представление о чем-то чрезвычайно трудном и абстрактном. Однако в ее основании лежит, по существу, описание математическим языком наглядных пространственных представлений. В этом смысле топология есть часть общей геометрии и потому основанные на ней методы должны рассматриваться как геометрические, хотя и абстрактные. Для того чтобы сделать применение топологии возможно более доступным, мы включаем изложение тех ее элементов, которые необходимы для наших целей. Впрочем, абстрактные ее понятия играют роль только в части книги.

Далее, помимо основных результатов, в книгу включены тесно примыкающие к ним, как, например, теорема о многограннике наибольшего объема при данной поверхности и «теоремы жесткости»<sup>5)</sup>.

Наконец, кроме основных применяемых методов освещаются также другие методы. В результате получилось почти исчерпывающее изложение предмета, если говорить о сегодняшнем его состоянии<sup>6)</sup>.

Теория многогранников и связанные с нею геометрические методы интересны не только сами по себе. Они имеют широкий выход в общую теорию поверхностей. И если далеко не всегда из теоремы о многогранниках можно извлечь путем предельного перехода соответствующую теорему о кривых поверхностях, то во всяком случае теоремы о многогранниках дают направление для поисков соответствующих теорем относительно кривых поверхностей. К тому же в случае многогранников раскрывается элементарно-геометрическая основа более общих результатов. Для демонстрации этих связей я присоединил почти к каждой главе параграф, посвященный обобщениям рассматриваемых в ней вопросов. Здесь имеются в виду не только обобщения на кривые поверхности, но также на многогранники в пространстве Лобачевского и др. Эти обобщения излагаются в порядке реферата и не используются в основном материале.

Все изложенное выясняет вторую цель книги: показать богатство содержания и связей, заключенных в теории многогранников и ее геометрических методах.

**2. О порядке и характере изложения.** В первой главе, как показывает само ее название, вводятся все основные понятия и свойства выпуклых

---

<sup>5)</sup>Общее понятие о теоремах жесткости разъясняется в § 6 гл. II.

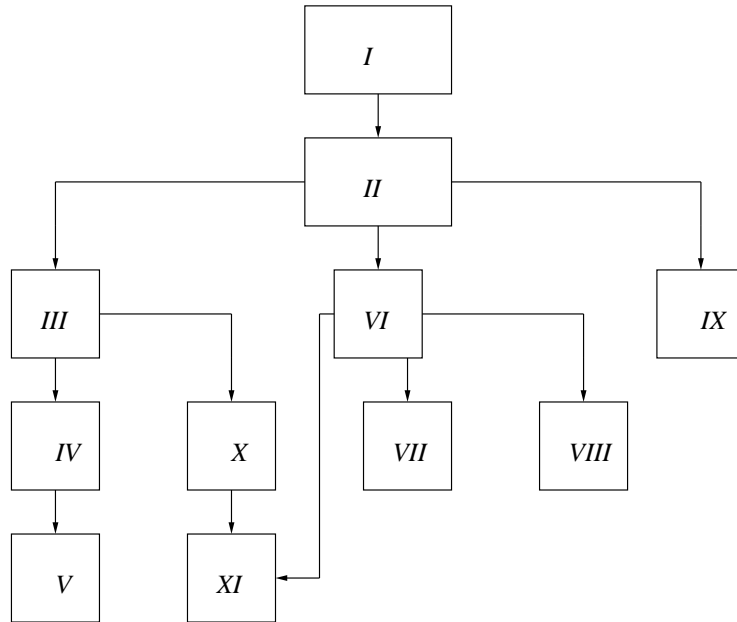
<sup>6)</sup>Из всего известного мне материала я опустил лишь доказательство жесткости замкнутого выпуклого многогранника по методу Дена [270]. Однако в гл. X мы получаем иным путем более сильные результаты. (Новое доказательство теоремы Дена см. в недавней статье И. М. Пака [159]. — Прим. ред.)

многогранников, используемые в дальнейшем изложении. Она не предполагает никаких предварительных знаний, кроме элементарной геометрии.

Вторая глава, «Метод и результаты», содержит изложение основ применяемого метода (§ 1 и 2) и обзор главных результатов (§ 3–6), которые выводятся в следующих главах. Этот обзор (не играющий роли в дальнейшем изложении) введен для того, чтобы читатель, познакомившись с ним, мог ориентироваться в содержании дальнейших глав и выбрать из него то, что покажется ему более интересным.

Что касается метода, то в § 1 главы II излагается метод Коши для доказательства теорем единственности, которым посвящены главы III и VI. Метод этот — совершенно элементарный. В § 2 главы II излагается основа метода доказательства теорем существования, которым посвящены главы IV, V, VII и IX. Этот метод основан на существенном использовании некоторых понятий и результатов топологии. Для удобства читателя, не осведомленного в этих вопросах, весь необходимый топологический материал излагается в дополнительных § 8 и 9 главы II. Таким образом, можно считать, что никаких предварительных знаний по топологии для понимания книги не требуется. Впрочем, все главы, кроме глав IV, VII и IX, обходятся и без этих элементов топологии.

Общая зависимость глав дается следующей схемой, из которой видно, например, что главы III, VI и IX совершенно независимы друг от друга.



Если не считать элементов топологии, которые, как уже сказано, излагаются в § 8 и 9 главы II и используются только в главах IV, VII и IX, то в остальном мы обходимся самыми простыми средствами (элементарная геометрия, сложение векторов, а в главах X, XI — производная). Исключение представляют только § 2 главы VII и § 2 и 3 главы VIII, где применяются элементы анализа (экстремум функции многих переменных, интегрирование).

Все это не относится к дополнительным параграфам «Обобщения», помещаемым в конце почти каждой главы. В то время как в основном тексте изложение ведется со всей возможной обстоятельностью, в этих параграфах дается только обзор обобщений, причем применяются самые разнообразные средства вплоть до аддитивных функций множества, дифференциальных уравнений и т. п. Эти параграфы не играют роли для понимания основного содержания книги и так же, как другие места текста, носящие характер дополнений, печатаются мелким шрифтом.

По ходу изложения я сформулировал ряд задач, большинство из которых служит в качестве упражнений, некоторые же представляют нерешенные проблемы, могущие служить темой для самостоятельных исследований.

**3. Замечания для специалистов.** Не считая изменений и усовершенствований в тех теоремах и доказательствах, которые уже известны из ранее опубликованных работ <sup>7)</sup>, в книге содержится целый ряд результатов, публикуемых впервые. Это — все теоремы о многогранниках, имеющих границу (глава III, § 5, глава V, глава VI, § 5, глава IX, § 1), теоремы о бесконечных многогранниках (глава VI, § 4 и 5, глава VII, § 3 и 4) и, наконец, теоремы о жесткости (главы X и XI) <sup>8)</sup>. Многие из этих результатов не кажутся мне особенно значительными, но среди них есть, несомненно, достойные внимания. Точно так же в параграфах «Обобщения» специалист найдет кое-что новое.

Я хотел бы еще отметить, что изучение бесконечных выпуклых многогранников до последнего времени вовсе не проводилось. Вслед за первыми работами, моей и С. П. Оловянишникова, эта книга, я надеюсь, доказывает достаточный интерес их исследования наряду с замкнутыми многогранниками, тем более, что речь может идти не о фактически бесконечном многограннике, а о конечном многограннике, допускающем неограниченное продолжение, для возможности которого можно дать совершенно простые необходимые и достаточные условия (глава I, § 1, п<sup>о</sup> 6).

Многогранники с границей, ввиду естественно большего разнообразия возможностей, менее изучены, и, насколько мне известно, то, что дается

---

<sup>7)</sup> Помимо уже цитированных работ О. Коши [254], Г. Минковского [321] и С. П. Оловянишникова [156], речь идет о моих работах [3, 10, 12, 13].

<sup>8)</sup> Исключение составляет общая теорема о жесткости замкнутого выпуклого многогранника, другое доказательство которой опубликовано в моей книге [18].

в этой книге, представляет собой вообще первые относящиеся к ним результаты. Вопрос об изгибании таких многогранников, почти полностью решенный в § 2 главы V, кажется нам особенно интересным.

В § 5 главы VI и § 4 главы VII я воспроизвожу изящные выводы А. В. Погорелова, которые он сообщил мне до их опубликования. В ряде мест я воспользовался другими его замечаниями, а также замечаниями В. А. Залгаллера. В. А. Залгаллер и Ю. Ф. Борисов прочли всю рукопись и помогли исправить некоторые допущенные мною ошибки и неточности. Ю. Ф. Борисов написал § 9 главы II и п<sup>о</sup> 9 § 7 главы I. Всем им я выражаю искреннюю благодарность за помощь в моей работе.

---

---

## Глава I

### Основные понятия и простейшие свойства выпуклых многогранников

---

---

#### § 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЫПУКЛОГО МНОГОГРАННИКА

1. Многогранником называют или тело, ограниченное конечным числом многоугольников, или поверхность, составленную из конечного числа многоугольников. Мы, преимущественно, будем понимать под *многогранником* именно многогранную поверхность, т. е. фигуру, образованную конечным числом многоугольников, хотя в некоторых случаях удобнее рассматривать многогранник как тело: например, тогда, когда говорят о точке внутри многогранника или о том, что один многогранник содержится в другом. В таких случаях мы будем обычно оговаривать, что речь идет о *телесном многограннике*. Впрочем, взаимная связь и различие обоих понятий настолько просты, что возможное их смешение в терминологии не может повлечь никаких недоразумений по существу; тем более, что мы будем иметь дело главным образом с многогранниками, образующими целые поверхности телесных многогранников, подобно полной поверхности куба. В таком случае, например, смысл выражения «внутри многогранника» очевиден и без указания на то, что речь идет о телесном многограннике.

Многоугольники, образующие многогранник (или ограничивающие телесный многогранник), называются его *гранями* при условии, что многоугольники, лежащие в одной плоскости и имеющие общие стороны или отрезки сторон, объединяются в один многоугольник и образуют тем самым одну грань. Стороны и вершины граней называются соответственно *ребрами* и *вершинами* многогранника.

Под *многоугольником* здесь, как и всюду дальше, мы понимаем любую область на плоскости, ограниченную конечным числом отрезков или отрезков и полупрямых, причем сама граница области также считается включенной в многоугольник. (В понятие «области» входит связность, т. е. возможность соединить любые две точки области ломаной, проходящей внутри

области. Поэтому, например, два треугольника, приложенные друг к другу в вершине, мы считаем не многоугольником, а двумя многоугольниками.)

Из данного определения следует, что мы имеем в виду не только, как обычно, конечные многоугольники, но также *бесконечные*<sup>1)</sup> *многоугольники*, с тем, однако, условием, что многоугольник имеет обязательно лишь конечное число сторон и вершин. У бесконечного многоугольника в отличие от конечного имеются по крайней мере две бесконечные стороны, являющиеся полупрямыми или прямыми, или сторона, являющаяся прямой.

Многогранник называется, соответственно, бесконечным или конечным в зависимости от того, имеются у него бесконечные грани или нет. Так как по определению число граней многогранника конечно и число сторон и вершин

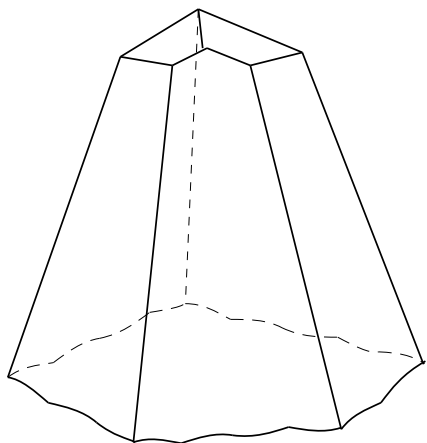


Рис. 1

у каждой грани также конечно, то бесконечный многогранник, так же как конечный, имеет лишь конечное число граней, ребер и вершин; только среди его граней и ребер заведомо имеются бесконечные. Простейший пример бесконечного многогранника представляет многогранный угол с бесконечно продолженными гранями. Пересекая его плоскостями, легко получить другие примеры бесконечных многогранников (рис. 1). (Можно называть бесконечным многогранником также поверхность, составленную из бесконечного числа многоугольников, но такие многогранники мы совершенно не будем рассматривать; они выпадают из нашего рассмотрения потому, что задаются бесконечным числом данных.)

**2. Выпуклый многогранник.** Дадим теперь определение предмета этой книги, т. е. выпуклого многогранника.

*Выпуклым многогранником называется фигура, составленная из конечного числа плоских многоугольников так, что*

- 1) *от одного многоугольника к другому можно перейти, идя по многоугольникам, имеющим общие стороны или отрезки сторон*<sup>2)</sup>;
- 2) *вся фигура лежит по одну сторону от плоскости каждого из составляющих ее многоугольников.*

<sup>1)</sup>Т. е. неограниченные — не уместяющиеся ни в каком круге конечного радиуса.

<sup>2)</sup>На рис. 3 у многогранника есть две грани, из которых одна имеет с другой общий отрезок стороны, но не целую сторону. Это возможно лишь для выпуклого многогранника, не ограничивающего телесный многогранник.

Второе условие и есть условие выпуклости; первое же означает, что многогранник не распадается на части, встречающиеся лишь в вершинах или даже не имеющие друг с другом ничего общего.

*Телесным выпуклым многогранником называется тело, ограниченное конечным числом плоских многоугольников так, что оно лежит по одну сторону от плоскости каждого из этих многоугольников<sup>3)</sup>.*

Из сравнения двух данных определений очевидно, что вся поверхность, равно как и любая часть поверхности телесного выпуклого многогранника, представляет выпуклый многогранник при том, конечно, условии, что взятая часть поверхности состоит из многоугольников и не распадается на куски, не имеющие многоугольников, смежных по сторонам.

Можно доказать и обратное: *всякий выпуклый многогранник есть полная поверхность или часть поверхности телесного выпуклого многогранника.*

Действительно, представим себе какой-нибудь выпуклый многогранник  $P$ . Проведем плоскости всех его граней; многогранник по условию лежит по одну сторону от каждой из этих плоскостей  $Q_i$ . Возьмем те полупространства, ограниченные плоскостями  $Q_i$ , которые содержат многогранник  $P$ . Общая часть этих полупространств будет телесным выпуклым многогранником, потому что по самому построению она лежит по одну сторону от каждой из плоскостей  $Q_i$  и ограничена многоугольниками, вырезанными на этих плоскостях их пересечениями друг с другом. Исходный многогранник  $P$  будет частью поверхности или полной поверхностью построенного телесного многогранника.

Многогранники на рис. 1 и 2, *a* выпуклые, а на рис. 2, *b*, *в* — невыпуклые. Для выяснения содержания теорем о выпуклых многогранниках, доказываемых в этой главе, полезно обращаться к многогранникам рис. 2, *b*, *в*: ни одна из этих теорем не будет верной хотя бы для одного из этих многогранников.

**3. Многогранники с границей, замкнутые, бесконечные.** Из условия, что выпуклый многогранник лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани, легко заключить, что в каждом его ребре сходится самое большее по две грани и что никакая внутренняя точка одной грани не может принадлежать также другой грани.

Многогранник, являющийся только частью поверхности телесного выпуклого многогранника, характеризуется тем, что у него имеются ребра, принадлежащие каждое лишь одной грани. Это — ребра, которые ограничивают часть полной поверхности, представляемую данным многогранником. Поэтому мы говорим, что такой многогранник имеет границу: ее

<sup>3)</sup> Тело в переводе на теоретико-множественный язык обозначает замыкание области, т. е. область с присоединенной границей. Поверхность тела есть его граница. Под фигурой в предыдущем определении понимается не что иное, как множество точек.



образуют «граничные» ребра, т. е. ребра, принадлежащие каждому только одной грани (рис. 3). Отрезок стороны грани, входящий в границу, как на рис. 3, также считается граничным ребром.

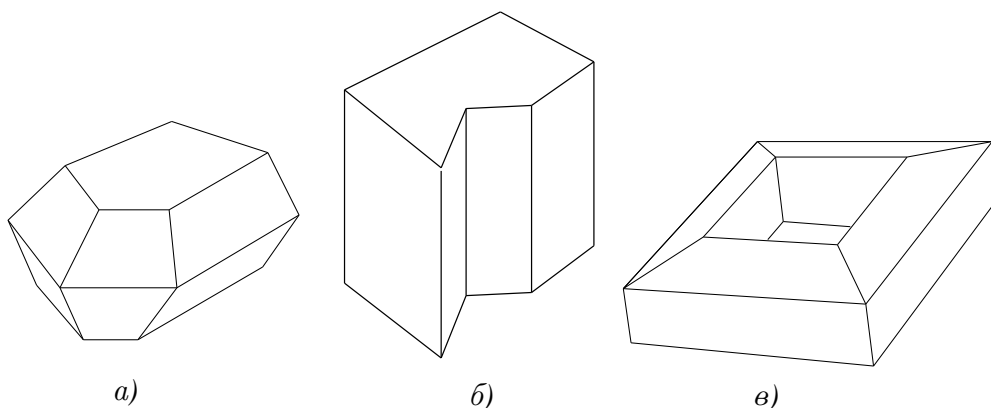


Рис. 2

Выпуклые многогранники без границы образуют полные поверхности телесных многогранников, и потому их естественно назвать *полными*.

Конечный полный многогранник, т. е. ограничивающий конечный телесный многогранник, называется *замкнутым*.

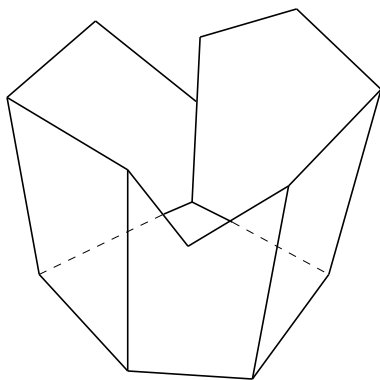


Рис. 3

Бесконечные полные выпуклые многогранники разделяются на те, которые имеют вершины, и те, которые вовсе не имеют вершин. Всякая бесконечная в обе стороны призма, как, например, бесконечная прямоугольная труба, является многогранником без вершин.

Обратно, если многогранник не имеет вершин, то он есть бесконечная в обе стороны призма. Действительно, у многогранника без вершин ни одно ребро не может иметь конца и, следовательно, каждое ребро представляет целую прямую. Так как вершин нет, то эти прямые не пересекаются, и грани такого многогранника оказываются поэтому полосами между парами параллельных прямых, или полуплоскостями (как грани двугранного угла). Отсюда ясно, что такой многогранник есть бесконечная призма (быть может, с незамкнутым поперечным сечением, подобно двугранному углу).

Таким образом, *отсутствие вершин характеризует бесконечные призмы.*

Из полных выпуклых многогранников призмы выделяются еще тем свойством, что они содержат прямые, т. е. *полный выпуклый многогранник, содержащий целую прямую, есть призма.*

Действительно, пусть полный выпуклый многогранник  $P$  содержит прямую  $L$ . Тогда, так как он лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани, то ни одна из этих плоскостей не может пересекать прямую  $L$ , т. е. плоскости всех граней многогранника  $P$  параллельны прямой  $L$ . Отсюда очевидно, что многогранник будет призмой с ребрами, параллельными прямой  $L$ .

Бесконечная призма определяется своим сечением, так что свойства призм сводятся к свойствам многоугольников; поэтому мы исключаем их из рассмотрения, кроме немногих случаев, которые будут оговорены особо.

Мы будем заниматься всегда в первую очередь замкнутыми и затем бесконечными полными многогранниками, имеющими вершины; их мы будем называть просто бесконечными, опуская указание на полноту и наличие вершин, кроме тех случаев, когда нужно будет во избежание смешения понятий противопоставить такой многогранник бесконечному многограннику с границей или призме. Таким образом, в дальнейшем «*бесконечный многогранник*» означает, если не оговорено противное, полный выпуклый многогранник, не являющийся призмой.

**4. Другое определение выпуклости.** В качестве определения выпуклости многогранника мы взяли то свойство, что многогранник лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани. Однако в применении к телам пользуются обычно другим определением выпуклости, более общим, поскольку оно применимо не только к многогранникам. Согласно этому определению, тело или множество точек называется выпуклым, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит и весь соединяющий их отрезок. Куб, шар, круговой цилиндр представляют примеры выпуклых тел. Круг, отрезок, целая плоскость представляют примеры плоских выпуклых фигур.

*Для телесных многогранников оба понятия выпуклости равносильны.*

Доказательство основано на следующем простом, но важном замечании, которое мы назовем *леммой об отделимости*.

*Всякая точка, не принадлежащая данному телесному многограннику, выпуклому в смысле нашего исходного определения, отделяется от этого многогранника плоскостью какой-либо его грани (в том смысле, что данная точка и все внутренние точки многогранника лежат по разные стороны от этой плоскости).*

Действительно, если точка  $A$  не принадлежит многограннику  $P$ , то отрезок, соединяющий ее с любой внутренней его точкой  $B$ , пересекает поверх-

ность многогранника и тем самым имеет общую точку хотя бы с одной его гранью  $Q$ . При этом отрезок  $AB$  не может лежать в плоскости грани  $Q$ : иначе получалось бы, что эта плоскость проходит через внутреннюю точку  $B$  и многогранник не лежал бы по одну сторону от плоскости грани  $Q$ . Следовательно, отрезок  $AB$  необходимо пересекает плоскость грани  $Q$ .

Но если многогранник выпуклый, то по самому определению он лежит по одну сторону от плоскости грани  $Q$ , именно по ту ее сторону, где лежит его точка  $B$ . Поэтому плоскость грани  $Q$  отделяет его целиком от точки  $A$ , и «лемма об отделимости» доказана.

Докажем теперь, что если телесный многогранник  $P$  — выпуклый в том смысле, что лежит по одну сторону от плоскости каждой грани, то каждые две его точки соединяются лежащим в нем отрезком.

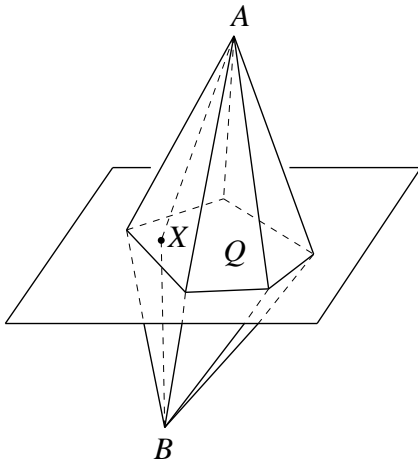


Рис. 4

имеются точки  $A$  и  $B$ , лежащие по разные от нее стороны (рис. 4). Тогда, соединяя их со всеми точками  $X$  грани  $Q$ , мы получили бы две пирамиды с общим основанием  $Q$ , которое тем самым оказалось бы внутри составленного из них многогранника. Но так как любой отрезок  $AХ$  и  $ВХ$  должен лежать в многограннике  $P$ , то  $Q$  оказалось бы также внутри  $P$  и, следовательно, не могло бы быть гранью.

Таким образом, одно свойство выпуклости следует из другого, так что равносильность их доказана.

Телесные выпуклые многогранники оказываются частным случаем выпуклых тел: это выпуклые тела, ограниченные конечным числом многоугольников. Аналогично «поверхностные» выпуклые многогранники оказываются частным случаем выпуклых поверхностей, если под выпуклой

Допустим, вопреки доказываемому, что в многограннике  $P$  имеются две такие точки  $A, B$ , что на отрезке  $AB$  есть точка  $C$ , не принадлежащая многограннику. Тогда по «лемме об отделимости» точка  $C$  отделяется от многогранника некоторой плоскостью, а это невозможно, так как такая плоскость, пересекая отрезок  $AB$ , разделяла бы точки  $A$  и  $B$ .

Докажем, наконец, обратное утверждение. Пусть многогранник  $P$  — выпуклый в том смысле, что каждые две его точки соединимы в нем отрезком. Допустим, однако, что многогранник  $P$  не лежит по одну сторону от плоскости некоторой своей грани  $Q$ , так что в нем

поверхностью понимать всю поверхность или любой кусок поверхности выпуклого тела.

Те же выводы применимы к многоугольникам с заменой граней и их плоскостей сторонами и несущими их прямыми. Совершенно так же доказываются для них равносильность двух понятий выпуклости:

- 1) многоугольник — выпуклый, если он лежит (на плоскости!) по одну сторону от каждой прямой, содержащей его сторону;
- 2) многоугольник — выпуклый, если он для каждой пары своих точек содержит соединяющий их отрезок.

Можно доказать, что оба определения равносильны следующему:

- 3) многоугольник — выпуклый, если все его углы — выпуклые, т. е. меньше  $180^\circ$ . (Доказательство опускаем, так как этот результат не будет использован; оно может служить в качестве задачи. Задачей может служить также доказательство аналогичного результата для многогранников: телесный многогранник — выпуклый, если все его двугранные углы — выпуклые.)

Отметим еще два простых свойства выпуклых фигур (т. е. множеств), которыми мы будем постоянно пользоваться в применении к многогранникам, считая их известными.

- 1) *Общая часть  $F$  любого числа выпуклых фигур  $F_s$  сама есть выпуклая фигура.* Действительно, если точки  $A$  и  $B$  принадлежат  $F$ , то они тем самым принадлежат каждой фигуре  $F_s$ . По выпуклости этих последних в каждой из них содержится отрезок  $AB$ , а тогда он содержится в их общей части, чем ее выпуклость доказана.

Поэтому, в частности, общая часть выпуклого многогранника и плоскости выпукла и представляет либо точку, либо отрезок (или полупрямую), либо выпуклый многоугольник. Если данная плоскость есть плоскость грани, то она не может заходить внутрь многогранника и ее общая часть с многогранником сводится тогда к выпуклому многоугольнику, который и есть данная грань. Поэтому *все грани полного выпуклого многогранника выпуклы.*

- 2) *Отрезок, идущий из любой внутренней точки  $O$  выпуклого тела, пересекает его поверхность максимум в одной точке.* Действительно, внутренняя точка  $O$  характеризуется тем свойством, что вокруг нее можно описать шар  $S$ , целиком лежащий в теле. Поэтому, если отрезок, идущий из  $O$ , пересекает поверхность тела последовательно в двух точках  $B$  и  $A$ , то, по выпуклости, в теле лежат все отрезки, соединяющие точку  $A$  с точками шара  $S$  (рис. 5). Эти отрезки заполняют целый конус, и потому все точки отрезка  $OA$ , кроме точки  $A$ , также должны быть внутренними, вопреки предположению, что точка  $B$  лежит на поверхности рассматриваемого тела.

**5. Многогранные углы и сферические многоугольники.** Многогранный угол есть не что иное, как многогранник с одной единственной вершиной и без граничных ребер. Грани его мы мыслим, следовательно, безгранично продолжаемыми.

Если вокруг вершины многогранного угла описать сферу радиуса единица, то он вырежет на ней сферический многоугольник, ограниченный дугами больших кругов. Обратно, если на сфере дан такой многоугольник, то лучи, проведенные из центра через его точки, образуют многогранный угол.

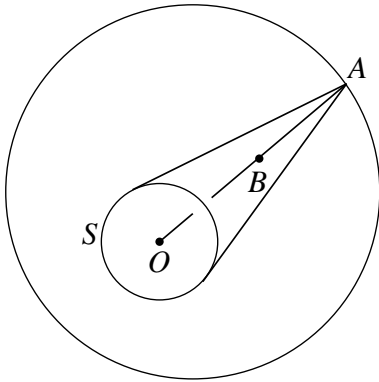


Рис. 5

Понятие выпуклости для сферического многоугольника определяется так же, как для плоского, с заменой прямых большими кругами и прямолинейных отрезков — дугами больших кругов, не превосходящими полуокружности. Для сферических многоугольников можно дать те же три определения выпуклости<sup>4)</sup>. Равносильность первых двух доказывается подобно тому,

как это было сделано выше для многогранников. Равносильность им третьего (а именно, что все углы меньше  $180^\circ$ ) будет, между прочим, доказана в п° 2 § 1 главы III.

Легко, далее, убедиться, что при сопоставлении многогранных углов и сферических многоугольников, которое дается изложенным выше построением, выпуклым многогранным углам отвечают выпуклые сферические многоугольники, и обратно. Например, из рис. 6 непосредственно ясно, что расположение многогранного угла по одну сторону от плоскости грани  $Q$  равносильно расположению сферического многоугольника по одну сторону от большого круга  $q$ , по которому плоскость  $Q$  пересекает сферу.

К выпуклым сферическим многоугольникам относятся двуугольники, ограниченные двумя большими полуокружностями, соединяющими диаметрально противоположные точки, а также всякая полусфера. Двуугольникам отвечают многогранные углы, выродившиеся в двугранные, полусферам — выродившиеся в плоскость.

<sup>4)</sup>Поскольку на сфере две диаметрально противоположные точки соединимы многими кратчайшими дугами (все меридианы), то второе определение выпуклости будет звучать так: многоугольник на сфере выпуклый, если он с каждой парой своих точек содержит хоть одну кратчайшую дугу. В связи с этим пересечение двух выпуклых многоугольников на сфере может быть невыпуклым: пересечением двух двуугольников может оказаться пара их вершин. — Прим. В. А. Залгаллера.

**6. Замечание о бесконечных многогранниках.** Рассмотрение бесконечных выпуклых многогранников могло бы показаться имеющим меньший наглядный и меньший реальный смысл, чем рассмотрение многогранников конечных.

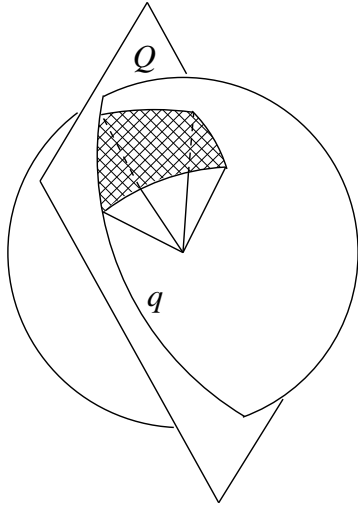


Рис. 6

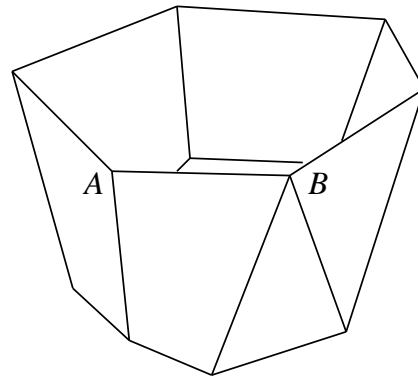


Рис. 7

Однако это возражение можно полностью устранить, так как вместо бесконечного выпуклого многогранника можно всегда иметь в виду конечный выпуклый многогранник с границей, обладающий тем свойством, что при безграничном продолжении его крайних граней они не пересекаются, не считая пар смежных граней, которые имеют бесконечно продолжаемое общее ребро.

Можно дать условия, необходимые и достаточные для того, чтобы данный конечный выпуклый многогранник с границей допускал неограниченное продолжение крайних граней без появления новых пересечений, т. е. чтобы он мог рассматриваться как «конечный» представитель бесконечного многогранника со всеми его вершинами, ребрами и гранями. Сформулируем одно такое условие; оно состоит из двух частей.

1) В вершинах на границе сходятся только по две крайние грани, смежные по ребру, но не подходит изнутри никакая грань (т. е. так, как в вершине  $A$ , но не  $B$  на рис. 7).

2) На каждой крайней грани ребра при продолжении за границу расходятся или параллельны, но не сходятся.

Необходимость обеих частей этого условия очевидна. Доказательство достаточности мы оставляем читателю в качестве задачи; оно нам не будет нужно.

Другое условие состоит в выпуклости сферического изображения многогранника. Понятие о сферическом изображении и необходимость этого условия будут установлены в § 5 этой главы, а достаточность будет выяснена позже, в § 5 главы VII.

**7. Задачи.** К сформулированным по ходу изложения задачам прибавим еще две: 1. Доказать, что если конечный телесный многогранник не имеет пустот внутри и общая его часть со всякой его опорной плоскостью<sup>5)</sup> может быть стянута в себе в точку, то такой многогранник — выпуклый. (Фигура стягивается в себе в точку, если ее можно непрерывно деформировать, не выходя за ее пределы, так, что она стянется в точку. Такие фигуры, как две точки, замкнутая ломаная, многоугольник с «дырами», нестягиваемы в себе в точку.) 2. Доказать, что если конечный «поверхностный» многогранник обладает тем же свойством, то он — замкнутый выпуклый. (При этом предполагается, что грани встречаются только по ребрам попарно, но наличие границы заранее не исключается.)

## § 2. ЗАДАНИЕ МНОГОГРАННИКА ПЛОСКОСТЯМИ ГРАНЕЙ<sup>6)</sup>

**1. Опорная плоскость.** *Опорной плоскостью* фигуры называется плоскость, имеющая с фигурой хотя бы одну общую точку, но такая, что вся

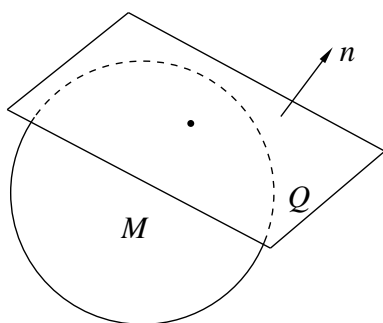


Рис. 8

фигура лежит целиком в одном полупространстве, ограниченном этой плоскостью (рис. 8). К полупространству мы присоединяем ограничивающую его плоскость; это условие имеет место всегда, кроме немногих случаев, которые оговариваются особо, и тогда полупространство называют «открытым». Из этого условия следует, что, например, для плоской фигуры сама заключающая ее плоскость будет для нее опорной во всех точках фигуры.

Пользуясь понятием опорной плоскости, можно сказать, что выпуклый многогранник определяется тем, что плоскость каждой его грани является его опорной плоскостью. Однако у многогранника имеются, конечно, и другие опорные плоскости, касающиеся его только в вершинах или по ребрам. Для телесных выпуклых многогранников имеет место следующая простая теорема.

**Теорема 1.** *Общая часть телесного выпуклого многогранника и его опорной плоскости есть либо одна точка — вершина многогранника, либо отрезок (или полупрямая) — ребро многогранника, либо одна грань. Через вся-*

<sup>5)</sup> По поводу понятия опорной плоскости см. п° 1 § 2.

<sup>6)</sup> С таким заданием связан интересный прием интегрирования по выпуклому многограннику, в частности — нахождения его объема, предложенный Ю. Г. Решетняком [182]. — Прим. В. А. Залгаллера.

кую вершину проходит такая опорная плоскость, которая не имеет с многогранником других общих точек. Через всякое ребро также проходит опорная плоскость, не имеющая с многогранником других общих точек, кроме точек этого ребра. Плоскость всякой грани — опорная и не имеет с многогранником других общих точек, кроме точек грани.

**Доказательство.** Общая часть плоскости и выпуклого многогранника выпукла, как общая часть двух выпуклых фигур. Поэтому она может быть либо точкой, либо отрезком (или полупрямой), либо выпуклым многоугольником. (Целые прямые исключены принятым в п° 3 § 1 условием, что многогранник не содержит прямых.)

Если плоскость имеет с многогранником только одну общую точку, то эта точка является вершиной, потому что плоскость, очевидно, не может касаться многогранника только в одной точке внутри ребра или грани. По аналогичной причине единственный отрезок, общий у плоскости и многогранника, должен быть ребром. Этим первое утверждение теоремы доказано.

Плоскость всякой грани — опорная по определению выпуклого многогранника. Ее общая часть с многогранником есть выпуклый многоугольник, который тем самым и оказывается гранью.

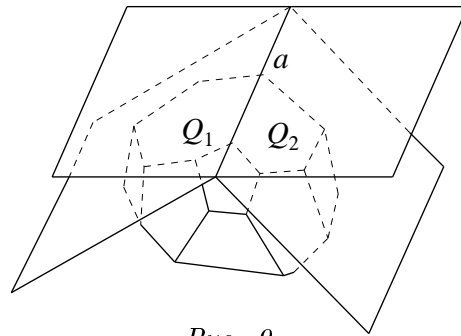


Рис. 9

Если по ребру  $a$  сходятся грани  $Q_1$  и  $Q_2$ , то многогранник лежит между плоскостями этих граней, т. е. в двугранном угле между ними. Поэтому всякая плоскость, проходящая в дополнительном угле, будет опорной вдоль ребра  $a$  (рис. 9).

В вершине  $A$  сходятся по крайней мере три грани, поэтому многогранник заключен в трехгранном или многогранном угле, ограниченном плоскостями таких граней. Но через вершину многогранного угла заведомо можно провести плоскость, не имеющую с ним других общих точек. Достаточно взять плоскость, опорную вдоль ребра, и немного повернуть ее вокруг прямой, проходящей в ней через вершину перпендикулярно к этому ребру (рис. 10). Эта плоскость будет опорной и к многограннику в одной вершине  $A$ .

**2. Внешняя нормаль. Опорное число.** Если какая-либо фигура  $M$  (множество точек) лежит по одну сторону от плоскости  $Q$ , то перпендикуляр к плоскости  $Q$ , направленный внутрь того (открытого) полупространства, где нет точек фигуры  $M$ , мы называем *внешней нормалью* к плоскости  $Q$  по отношению к фигуре  $M$ . Так же определяется внешняя нормаль к опорной



плоскости. Внешнюю нормаль мы будем обычно изображать единичным вектором, обозначая его через  $\mathbf{n}$  (рис. 8).

Говоря о направлении любой плоскости, мы всегда будем иметь в виду направление некоторого перпендикулярного к ней вектора. Если речь идет об опорной плоскости, то направление всегда определяется именно внешней нормалью к ней. Если это есть плоскость грани какого-либо многогранника, то мы говорим о направлении грани, понимая под этим направление внешней нормали к грани.

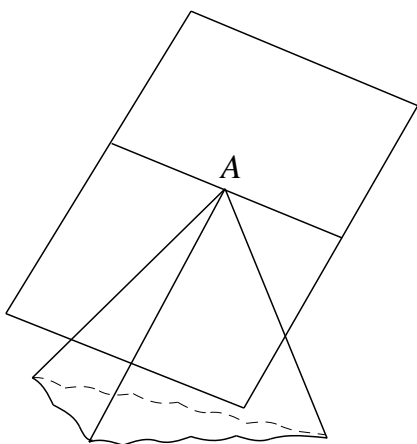


Рис. 10

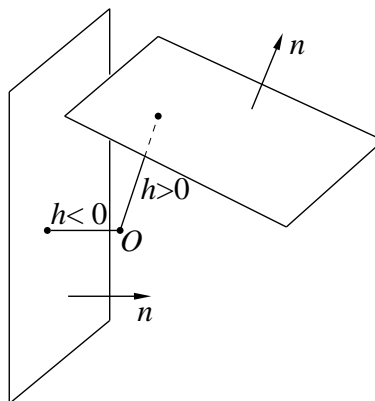


Рис. 11

Если в пространстве выбрать точку  $O$  — начало координат, то положение всякой «направленной» плоскости определяется ее нормалью  $\mathbf{n}$  и расстоянием  $h$  от начала  $O$ , причем это расстояние всегда считается положительным, если начало лежит в той стороне от плоскости, которая противоположна направлению нормали  $\mathbf{n}$ , и отрицательным — в противном случае (рис. 11). Так определенное расстояние со знаком мы называем *опорным числом* плоскости, или грани, если речь идет о плоскости грани некоторого многогранника. Коротко, мы говорим об *опорных числах* многогранника, имея в виду опорные числа всех его граней.

Докажем, что всякий полный выпуклый многогранник однозначно определяется плоскостями своих граней с указанием их внешних нормалей. Иными словами, он определяется внешними нормальями и опорными числами.

**Теорема 2.** *Телесный выпуклый многогранник есть общая часть полупространств, ограниченных плоскостями его граней. (Так как каждая плоскость определяет два полупространства, то речь идет, очевидно, о тех полупространствах, которые содержат многогранник.)*

**Доказательство.** Во-первых, телесный выпуклый многогранник по определению лежит по одну сторону от плоскости каждой грани, т. е. всегда в одном из определяемых ею полупространств. Поэтому он содержится также в общей части всех этих полупространств.

Во-вторых, по доказанной в п° 4 § 1 лемме об отделимости всякая точка вне многогранника отделяется от него плоскостью какой-либо грани, т. е. не попадает хотя бы в одно из рассматриваемых полупространств. Поэтому общая часть этих полупространств, содержа многогранник, не содержит никаких лишних точек, т. е. совпадает с многогранником, что и требовалось доказать.

**Теорема 3.** *Полный выпуклый многогранник определяется заданием плоскостей его граней с указанием внешних нормалей к ним.*

Действительно, раз указаны внешние нормали, то тем самым указаны полупространства, содержащие многогранник. По теореме 2 телесный многогранник, ограниченный данным полным многогранником  $P$ , является пересечением таких полупространств и, следовательно, ими полностью определяется. Вместе с ним определяется и его поверхность  $P$ , и теорема доказана.

Без указания внешних нормалей обойтись нельзя, так как можно построить несовпадающие выпуклые многогранники, у которых плоскости всех граней совпадают. Пример представляют два многогранника, на которые делит тетраэдр какая-либо пересекающая все его грани плоскость (рис. 12).

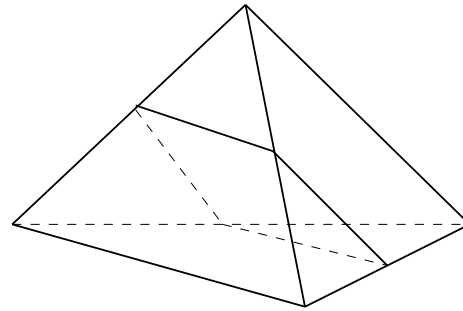


Рис. 12

**Задача.** Найти условия, при которых плоскости граней данного конечного выпуклого многогранника ограничивают другой конечный выпуклый многогранник. Решить тот же вопрос, допуская бесконечные многогранники. Для начала решить аналогичную задачу для многоугольников.

3. Докажем еще теорему, в известном смысле обратную теореме 2.

**Теорема 4.** *Общая часть конечного числа полупространств есть телесный выпуклый многогранник при том необходимом условии, что она имеет внутренние точки<sup>7)</sup>. Если внешние нормали к плоскостям, ограничиваю-*

<sup>7)</sup>Общая часть данных полупространств может, конечно, не иметь внутренних точек; так, например, у двух противоположных полупространств с общей граничной плоскостью общая часть сводится к плоскости. Заранее данные полупространства могут и вовсе не иметь общих точек, тогда их «общая часть» — пустая.

щим эти полупространства, не направлены в одно полупространство<sup>8)</sup>, то многогранник конечный; в противном случае он — бесконечный.

Пусть общая часть полупространств, ограниченных плоскостями  $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ , имеет внутренние точки. Она представляет тогда тело, ограниченное многоугольниками, вырезаемыми на плоскостях  $Q_i$  теми прямыми, по которым эти плоскости пересекают друг друга. Кроме того, она лежит по одну сторону от каждой плоскости  $Q_i$ . Следовательно, она есть телесный выпуклый многогранник; обозначим его  $P$ .

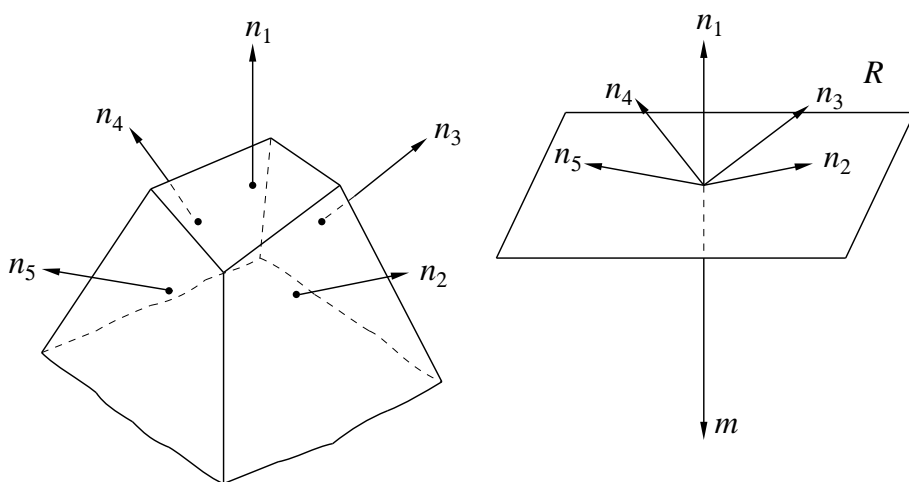


Рис. 13

Если внешние нормали к плоскостям  $Q_i$  направлены в одно полупространство  $R$  (рис. 13), то направление внешней нормали  $m$  к этому полупространству не образует ни с одной из них острого угла. Поэтому полупрямая, проведенная в этом направлении из любой точки многогранника  $P$ , не пересекает ни одной из плоскостей  $Q_i$  и тем самым оказывается лежащей в  $P$ . Таким образом, многогранник  $P$  содержит полупрямую и тем самым он — бесконечный.

Если же внешние нормали к плоскостям  $Q_i$  не идут в одно полупространство, то многогранник  $P$  не может быть бесконечным. Если бы он был бесконечным, то в нем содержалась бы полупрямая, например бесконечное ребро.

<sup>8)</sup> Нормали  $n_1, \dots, n_m$  направлены в одно полупространство  $R$ , если, будучи отложены из любой точки ограничивающей его плоскости, они оказываются лежащими в этом полупространстве. При этом не исключено, что часть из них может лежать в ограничивающей плоскости. Если этого нет, то мы говорим, что нормали идут внутрь полупространства  $R$ . Если ни одна нормаль не идет внутрь, то все они лежат в плоскости, и многогранник будет призмой.

Ограничивающие многогранник плоскости не могли бы пересекать ее, а потому внешние нормали к ним все были бы направлены в полупространство, ограниченное плоскостью, перпендикулярной к этой полупрямой. Теорема доказана полностью.

4. Мы установили, что общая часть конечного числа полупространств есть выпуклый телесный многогранник, если она имеет внутренние точки. Однако среди плоскостей, ограничивающих эти полупространства, могут быть «лишние», не являющиеся плоскостями граней многогранника, а касающиеся его лишь по ребрам и вершинам или даже вовсе не имеющие с ним общих точек. Поэтому возникает вопрос, каковы те необходимые и достаточные условия, при которых плоскости с данными внешними нормальными  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_m$  и опорными числами  $h_1, h_2, \dots, h_m$  будут действительно плоскостями граней некоторого телесного выпуклого многогранника. Теорема, дающая ответ на этот вопрос, будет сформулирована в п° 6 § 4 главы II. Повторяя общие указания, сделанные во введении, можно сказать, что вопрос стоит о теореме *существования* многогранника с данными нормальными и опорными числами (соответственно доказанной уже теореме *единственности*, утверждающей, что этими данными телесный выпуклый многогранник определяется полностью).

### § 3. ЗАДАНИЕ ЗАМКНУТОГО МНОГОГРАННИКА ЕГО ВЕРШИНАМИ

**1. Выпуклая оболочка.** Выпуклой оболочкой какого-либо множества точек мы называем общую часть всех содержащих его телесных выпуклых многогранников.

*Выпуклая оболочка всякого множества точек  $M$  выпукла*, потому что, как было доказано в п° 4 § 1, общая часть любого числа выпуклых множеств есть выпуклое множество.

Так как выпуклая оболочка множества  $M$  сама выпукла и содержится во всех выпуклых многогранниках, содержащих  $M$ , как их общая часть, то она является в некотором смысле наименьшим выпуклым множеством, заключающим  $M$ . Она вместе с тем полностью определяется самим  $M$ , поскольку им определяется совокупность всех содержащих его выпуклых многогранников.

Идея понятия выпуклой оболочки как раз и состоит в том, что она есть в известном смысле наименьшее замкнутое выпуклое множество, содержащее данное множество  $M$ <sup>9)</sup>.

<sup>9)</sup> Выпуклая оболочка, как мы ее определили, всегда есть замкнутое множество. Это — следствие той общей теоремы, что общая часть замкнутых множеств есть замкнутое множество. Вообще, можно определять такую выпуклую оболочку как общую часть любых выпуклых замкнутых множеств, содержащих данное множество точек  $M$ . (Те-

**2. Теорема 1.** *Конечный телесный выпуклый многогранник является выпуклой оболочкой множества своих вершин.*

Для доказательства выберем какую-либо вершину  $A$  данного многогранника и разобьем все грани, не подходящие к  $A$ , диагоналями на треугольники с вершинами в вершинах многогранника. Соединяя точку  $A$  с точками любого такого треугольника, мы получим трехгранную пирамиду, т. е. тетраэдр (рис. 14). Все такие тетраэдры содержатся в многограннике, так как он выпуклый, и многогранник складывается из этих тетраэдров.

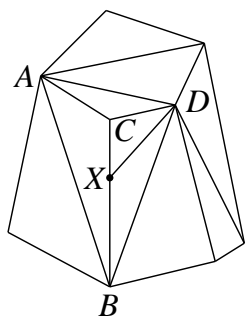


Рис. 14

Выпуклая оболочка множества вершин содержит все соединяющие их отрезки, так как она выпуклая. Но вместе с отрезком  $BC$  и точкой  $D$  она содержит треугольник  $BCD$ , поскольку он заполняется отрезками  $DX$ , идущими из  $D$  в точки отрезка  $BC$ . Наконец, вместе с треугольником  $BCD$  и точкой  $A$  она содержит также тетраэдр  $ABCD$ , поскольку он заполняется отрезками, идущими из  $A$  в точки треугольника  $BCD$ .

Отсюда ясно, что выпуклая оболочка множества вершин многогранника содержит все тетраэдры, на которые он разбит, т. е. содержит самый многогранник.

С другой стороны, наш многогранник заведомо содержит выпуклую оболочку множества своих вершин, так как по самому ее определению она заключается во всяком выпуклом многограннике, содержащем эти вершины. Таким образом, многогранник и выпуклая оболочка множества его вершин совпадают, что и требовалось доказать.

Так как выпуклая оболочка множества  $M$  им определяется, то из теоремы 1 следует, что конечный телесный выпуклый многогранник, а значит, и его поверхность, т. е. *замкнутый выпуклый многогранник, однозначно определяется своими вершинами*. Мы говорим, что замкнутый выпуклый многогранник однозначно «натягивается» на свои вершины. Это есть теорема

---

перь широко принято называть это *замкнутой выпуклой оболочкой*, но для простоты слово «замкнутая» опускаем, поскольку «незамкнутая» выпуклая оболочка, определяемая как пересечение *всех* выпуклых множеств, содержащих  $M$ , нам не понадобится. — Прим. В. А. Залгаллера.) В этом общем определении лучше раскрывается идея выпуклой оболочки как наименьшего замкнутого выпуклого множества, содержащего  $M$ . Это определение оказывается равносильным нашему. Строго говоря, нужно причислять к многогранникам полупространства и все пространство, поскольку можно рассматривать множества, не уместяющиеся ни в каком выпуклом многограннике. Мы будем пользоваться нашим определением как более элементарным и вполне достаточным для наших целей, так как мы занимаемся только выпуклыми многогранниками.

единственности замкнутого выпуклого многогранника с данными вершинами.

Включая в рассмотрение невыпуклые многогранники, мы не получим такой теоремы: на рис. 15 изображены два многогранника; один из них с ребром  $AB$  и гранями  $ABC$ ,  $ABD$  — выпуклый, другой — с ребром  $CD$  — невыпуклый; как видно, их можно расположить так, чтобы вершины совпали.

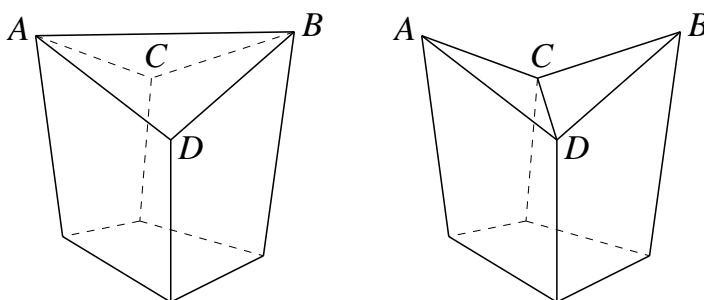


Рис. 15

**3. Теорема 2.** Выпуклая оболочка конечного множества точек  $A_1, A_2, \dots, A_m$ , не лежащих в одной плоскости, есть телесный выпуклый многогранник; выпуклая оболочка конечного числа точек, лежащих в одной плоскости, есть либо выпуклый многоугольник, либо отрезок, либо одна точка. Вершинами выпуклой оболочки (т. е. этого многогранника, либо многоугольника, либо отрезка) могут быть только данные точки  $A_i$ , однако не обязательно все. Любая данная из них  $A_k$  будет вершиной тогда и только тогда, когда она не содержится в выпуклой оболочке множества остальных точек.

**Доказательство.** Если дана только одна точка  $A_1$ , то она и есть своя выпуклая оболочка. Если точек две или больше, но все они лежат на одной прямой, то выпуклая оболочка их представляет отрезок с концами в крайних точках. Поэтому можно считать в дальнейшем, что точки не лежат на одной прямой.

Допустим, что теорема верна для  $m - 1$  точек и докажем ее для  $m$  точек.

Пусть дано  $m$  разных точек  $A_1, A_2, \dots, A_m$ ; выберем любую из них, скажем  $A_m$ . Пусть  $P$  будет выпуклая оболочка множества остальных точек  $A_1, A_2, \dots, A_{m-1}$ ; по предположению, она есть либо многогранник с вершинами в точках  $A_i$ , либо многоугольник, либо отрезок. Для определенности допустим, что  $P$  есть многогранник. В остальных случаях рассуждения могут только очевидным образом упроститься. Если точка  $A_m$  содержится

в  $P$ , то ее присоединение не меняет выпуклой оболочки и потому, в частности, она заведомо не может оказаться вершиной.

Допустим поэтому, что точка  $A_m$  не лежит в  $P$  (рис. 16). Проведя из нее отрезки во все точки многогранника  $P$ , получим многогранник  $P_1$ , составленный из пирамид с вершиной  $A_m$  и с основаниями на гранях многогранника  $P$ . Многогранник  $P_1$  заведомо содержится в выпуклой оболочке множества всех точек  $A_1, A_2, \dots, A_m$ , потому что в ней должен содержаться многогранник  $P$  и всякий отрезок, соединяющий любую его точку с точкой  $A_m$ .

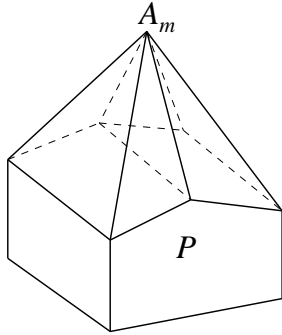


Рис. 16

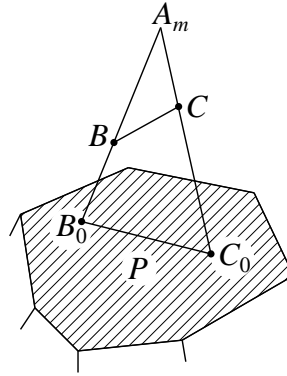


Рис. 17

Покажем, что многогранник  $P_1$  — выпуклый. Пусть  $B, C$  — две его точки; по его построению они лежат на отрезках  $A_mB_0, A_mC_0$ , соединяющих  $A_m$  с точками  $B_0, C_0$  из многогранника  $P$  (рис. 17). Но этот последний — выпуклый и потому содержит отрезок  $B_0C_0$ . А тогда  $P_1$  должен содержать весь треугольник  $A_mB_0C_0$ , а вместе с ним и отрезок  $BC$ . Этим выпуклость многогранника  $P_1$  доказана.

Но если многогранник  $P_1$  — выпуклый и содержит точки  $A_1, \dots, A_m$ , то он заведомо заключает в себе их выпуклую оболочку. А так как мы уже установили, что он должен также заключаться в ней, то он с ней совпадает.

Остается доказать, что точка  $A_m$  является вершиной многогранника  $P_1$ . Это очевидно из того, что по «лемме об отделимости» (п° 4 § 1) выпуклый многогранник  $P$  можно отделить плоскостью от точки  $A_m$ , так что отрезки, идущие из  $A_m$  в точки многогранника  $P$ , должны эту плоскость пересекать. Поэтому точка  $A_m$  не может оказаться ни внутри ребра, ни на грани многогранника  $P_1$ , ни тем более внутри него.

Таким образом, теорема полностью доказана.

В соединении с теоремой 1 теорема 2 приводит, очевидно, к следующему результату:

**Теорема 3.** Для того чтобы существовал замкнутый выпуклый многогранник с данными вершинами  $A_1, \dots, A_m$ , необходимо и достаточно, чтобы

точки  $A_i$  не лежали в одной плоскости и чтобы ни одна из них не попадала в выпуклую оболочку множества других. При этом такой многогранник с данными вершинами — единственный.

Здесь содержится, следовательно, ответ на вопросы того типа, как поставленные во введении: в какой мере и при каких условиях такие данные, как задание вершин, определяют замкнутый выпуклый многогранник. Вершины можно задавать их координатами, и тогда условия, налагаемые на них в теореме, можно выразить аналитически.

**4. Дополнение многогранника с границей до замкнутого.** Из теоремы 1 и 2 вытекает еще одна теорема, которой мы будем иметь случай воспользоваться.

**Теорема 4.** *Всякий конечный выпуклый многогранник с границей можно дополнить до замкнутого, не прибавляя новых вершин, и притом единственным образом.*

Иными словами, для всякого конечного выпуклого многогранника  $P$  существует и притом единственный замкнутый выпуклый многогранник  $\bar{P}$  такой, что  $P$  есть часть  $\bar{P}$  и  $\bar{P}$  не имеет иных вершин, кроме вершин многогранника  $P$ . (При этом не обязательно все вершины многогранника  $P$  будут вершинами многогранника  $\bar{P}$ . У всякого многогранника с границей вершины — двух типов: внутренние, т. е. не лежащие на границе, и граничные. Все внутренние вершины остаются вершинами многогранника  $\bar{P}$ , но граничные — не обязательно. Так будет, например, если  $P$  есть куб, из грани которого вырезан какой-либо многоугольник.)

**Доказательство.** Пусть  $P$  — конечный выпуклый многогранник с границей, а  $R$  — выпуклая оболочка его вершин. Содержа все вершины многогранника  $P$ ,  $R$  содержит и соединяющие их отрезки, т. е. ребра и диагонали граней; а тогда  $R$  содержит и все грани многогранника  $P$ , так что  $P$  заведомо содержится в  $R$ .

С другой стороны, согласно п° 2 § 1 многогранник  $P$  есть часть поверхности некоторого телесного выпуклого многогранника  $Q$ . Последний содержит все вершины многогранника  $P$ , а значит, и их выпуклую оболочку  $R$ . Таким образом, оказывается, что в то время, как  $P$  содержится в  $R$ , а  $R$  в  $Q$ , сам  $P$  вместе с тем лежит на поверхности многогранника  $Q$ . Следовательно,  $P$  есть часть поверхности многогранника  $R$ , т. е. часть замкнутого выпуклого многогранника. (Действительно, если точка  $X$  многогранника  $P$  не лежит на поверхности многогранника  $R$ , то она лежит внутри  $R$ , так как  $R$  содержит  $P$ . Но тогда раз  $Q$  содержит  $R$ , то  $X$  лежит и внутри  $Q$ . А это противоречит тому, что  $P$  есть часть поверхности многогранника  $Q$ .)

Согласно теореме 2,  $R$  как выпуклая оболочка вершин многогранника  $P$  есть телесный многогранник с вершинами в вершинах многогранника  $P$ , и никакого другого телесного выпуклого многогранника с теми же вершинами



не существует. Следовательно, то же верно и для замкнутого многогранника, образующего поверхность оболочки  $R$ , так что теорема доказана.

**5. Задачи.** 1. Дать необходимые и достаточные условия, при которых данная граничная вершина выпуклого многогранника с границей остается вершиной при дополнении этого многогранника до замкнутого согласно теореме 4.

2. Доказать, что выпуклая оболочка любого множества точек  $M$  есть общая часть всех полупространств, содержащих  $M$  (если только  $M$  лежит хотя бы в одном полупространстве). Исходя из такого определения выпуклой оболочки, доказать теоремы 1 и 2 настоящего параграфа.

3. Доказать, что общая часть всех выпуклых множеств, содержащих данное множество  $M$ , есть сумма тетраэдров с вершинами в точках этого множества  $M$ . (Множество  $M$  не предполагается состоящим лишь из конечного числа точек. Тетраэдров могут перекрываться. К тетраэдрам присоединяются в качестве предельных случаев треугольники, отрезки, точки.)

4. Пусть даны точки  $A_1, A_2, \dots, A_n$  и идущие к ним из начала  $O$  векторы  $\mathbf{a}_i = \overrightarrow{OA_i}$ . Пусть точкам  $A_i$  отнесены числа  $m_i \geq 0$  (массы). Центром тяжести этих масс называется точка  $A$ , являющаяся концом вектора  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ , определяемого равенством

$$\mathbf{a} = \frac{m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 + \dots + m_n \mathbf{a}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum m_i \mathbf{a}_i}{\sum m_i}$$

(предполагается, что  $\sum m_i > 0$ , так что не все  $m_i$  равны нулю). Доказать, что выпуклая оболочка множества точек  $A_i$  есть геометрическое место центров тяжести всевозможных масс, помещаемых в эти точки.

Доказать, что общая часть всех выпуклых множеств, содержащих данное множество  $M$ , есть геометрическое место центров тяжести масс, помещаемых во всевозможные четверки точек из  $M$ . ( $M$  не предполагается состоящим из конечного числа точек. Сравнить эту задачу с задачей 3.)

5. Полупространство, ограниченное плоскостью с уравнением  $Ax + By + Cz + D = 0$ , определяется неравенством  $Ax + By + Cz + D \leq 0$  (или, напротив,  $\geq 0$ ). Поэтому многогранник как общая часть полупространств задается системой линейных неравенств.

Даны точки  $A_1, \dots, A_m$  с координатами  $x_1, y_1, z_1$  и т. д. Указать систему линейных неравенств, определяющих выпуклую оболочку этого множества точек. Коэффициенты должны быть выражены через координаты заданных точек.

#### § 4. ЗАДАНИЕ БЕСКОНЕЧНОГО МНОГОГРАННИКА ВЕРШИНАМИ И ПРЕДЕЛЬНЫМ УГЛОМ

**1. Предельный угол.** Бесконечный выпуклый многогранник в отличие от замкнутого заведомо не определяется одними вершинами. Так, выпуклый многогранный угол имеет всего одну вершину и определяется не только ее заданием, но еще заданием направлений его ребер. Нашей целью будет доказать, что всякий бесконечный выпуклый многогранник также определяется своими вершинами и направлениями бесконечных ребер.

Однако оказывается гораздо более удобным рассматривать вместо направлений бесконечных ребер многогранный угол, ребра которого параллельны бесконечным ребрам многогранника. Этот многогранный угол мы определяем следующим построением.

Пусть  $P$  — данный бесконечный многогранник. Возьмем произвольную точку  $O$  и проведем из нее все полупрямые, параллельные (и одинаково направленные) полупрямым, лежащим на многограннике  $P$ . Эти полупрямые заполняют некоторую коническую поверхность с вершиной в точке  $O$ . Эту поверхность мы называем *предельным углом* многогранника  $P$ .

Из этого определения ясно, что при замене точки  $O$  другой предельный угол претерпевает только параллельный перенос. В дальнейшем мы всегда считаем предельный угол заданным с точностью до переноса.

Докажем, что определенная таким образом коническая поверхность действительно представляет собой многогранный угол с ребрами, параллельными бесконечным ребрам многогранника  $P$ .

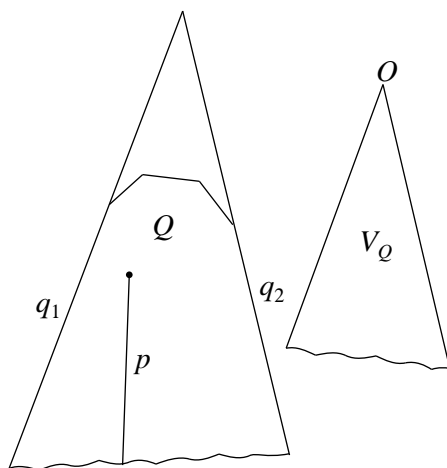


Рис. 18

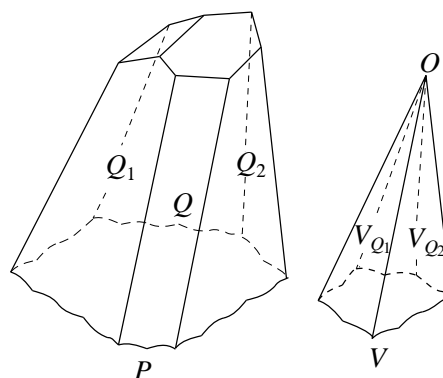


Рис. 19

Пусть  $Q$  — бесконечная грань многогранника  $P$  и  $q_1, q_2$  — ее бесконечные ребра. Любая полупрямая  $p$ , лежащая на грани  $Q$ , должна быть направлена в угол между ребрами  $q_1$  и  $q_2$  (рис. 18). Отсюда ясно, что если из точки  $O$  провести все полупрямые, параллельные полупрямым, лежащие на грани  $Q$ , то они заполнят угол  $V_Q$  между полупрямыми, параллельными ребрам  $q_1$  и  $q_2$ <sup>10)</sup>. Этот угол можно назвать предельным углом грани  $Q$ .

Очевидно, что предельный угол многогранника складывается из предельных углов его бесконечных граней, причем если грани  $Q', Q''$  смежны по бесконечному ребру  $q$ , то их предельные углы  $V_{Q'}, V_{Q''}$  смежны по параллельно-

<sup>10)</sup> Так как мы считаем, что речь идет о выпуклом многограннике, то грань  $Q$  есть выпуклый многоугольник, и тогда изложенное очевидно и доказывается очень просто. Однако определение предельного угла применимо и к невыпуклым многогранникам, а тогда картина может усложниться, хотя наши выводы все равно останутся по существу верными.

му ему ребру. Следовательно, *предельный угол действительно есть многогранный угол, ребра и грани которого параллельны бесконечным ребрам и граням многогранника* (рис. 19).

Если бесконечные ребра грани  $Q$  параллельны, то на ней нет полупрямых иного направления и потому ее предельный угол сводится к одной полупрямой. На предельном угле многогранника ей соответствует «грань», выродившаяся в ребро. Если все бесконечные ребра многогранника параллельны, то и весь его предельный угол вырождается в полупрямую (рис. 20, а).

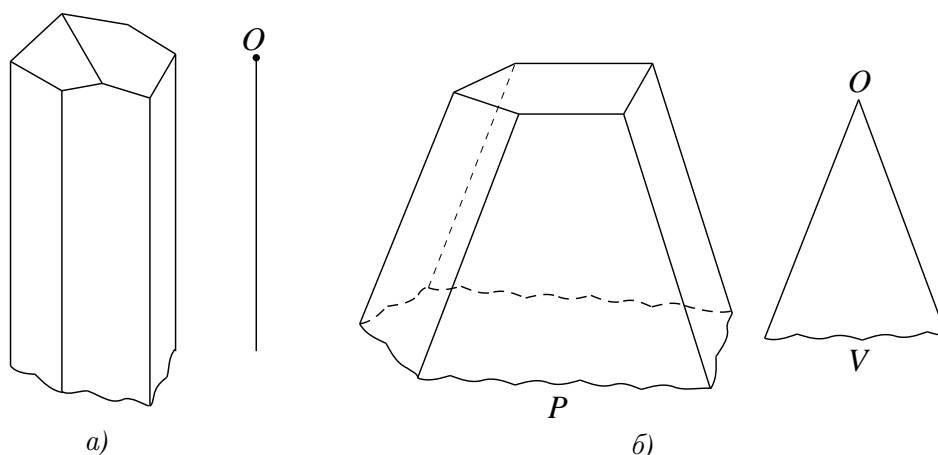


Рис. 20

Если все бесконечные ребра многогранника параллельны одной плоскости, то предельный угол вырождается в плоский угол (рис. 20, б). Всегда, когда мы говорим о предельном угле, эти случаи не считаются заранее исключенными.

Если бесконечный многоугольник  $Q$  неограниченно подобно сжимать к какой-либо точке  $O$ , то в пределе он перейдет, очевидно, в свой предельный угол (рис. 21). Поэтому при неограниченном подобном сжатии бесконечно многогранника  $P$  к какой-либо точке его бесконечные грани переходят в их предельные углы, а он сам переходит в свой предельный угол. Следовательно, предельный угол может быть также определен как результат бесконечного подобного сжатия многогранника.

Отсюда легко вывести, что когда вершина  $O$  предельного угла лежит в многограннике, то и сам он содержится в многограннике (если многогранник выпуклый). Действительно, при сжатии многогранника  $P$  к точке  $O$  все его точки  $X$  движутся по отрезкам  $OX$ . По выпуклости многогранника отрезки  $OX$  содержатся в нем, а следовательно, при сжатии многогранник

не выступает из пределов своего первоначального положения. Поэтому и предельный угол содержится в нем.

Далее, легко доказать, что *предельный угол выпуклого многогранника — сам выпуклый*. Действительно, возьмем точку  $O$  на бесконечной грани  $Q$  многогранника  $P$  и будем его сжимать к точке  $O$ . По выпуклости он все время остается с одной стороны от плоскости грани  $Q$ . В пределе получим предельный угол  $V$ , который также окажется лежащим по ту же сторону от плоскости грани  $Q$ . Но она будет теперь плоскостью соответствующей грани  $V_Q$  самого предельного угла. Мы доказали тем самым, что предельный угол  $V$  лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани, т. е. что он — выпуклый.

Все полученные выводы мы резюмируем в виде следующей теоремы о предельном угле:

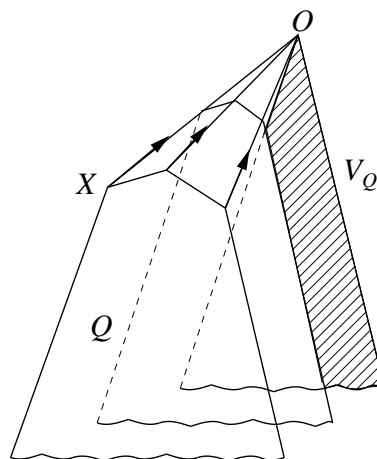


Рис. 21

**Теорема 1.** Пусть  $P$  — бесконечный выпуклый многогранник. Если из какой-либо точки  $O$  провести все полупрямые, параллельные полупрямым, лежащим на  $P$ , то получим предельный угол  $V_p$  многогранника  $P$ . Это есть выпуклый многогранный угол (или плоский угол, или полупрямая), ребра и грани которого параллельны бесконечным ребрам и граням многогранника (причем только тем граням на  $P$  отвечают грани на  $V_p$ , не выродившиеся в ребра, у которых бесконечные ребра не параллельны). Если точка  $O$  лежит в многограннике  $P$ , то и угол  $V_p$  лежит в  $P$  (рис. 22). Этот угол  $V_p$  может быть получен так же, как результат (т. е. предел) бесконечного подобного сжатия многогранника  $P$ .

Из последнего особенно ясна сущность понятия о предельном угле, как таком многогранном угле, который определяет свойства многогранника в бесконечно удаленной его части так, что конечными величинами пренебрегают.

Многогранник, рассматриваемый с бесконечно большого расстояния, представляется в виде своего предельного угла.

**2. Теорема 2.** Выпуклый многогранный угол является поверхностью выпуклой оболочки множества своих ребер и потому однозначно определяется заданием своей вершины и направлений ребер. Мы говорим, что он натягивается на свои ребра.

Действительно, если телесный угол — выпуклый, то вместе с двумя лучами  $p, q$ , идущими из вершины, он necessarily содержит плоский угол между

ними, потому что этот угол заполняется отрезками, соединяющими точки на  $p$  и  $q$ . По той же причине вместе с тремя лучами  $p, q, r$  он содержит и трехгранный телесный угол с ребрами  $p, q, r$ .

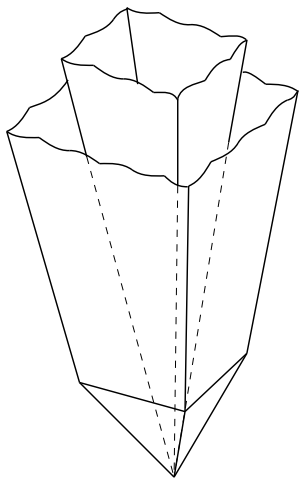


Рис. 22

Отсюда следует, что выпуклая оболочка множества ребер многогранного угла содержит все телесные трехгранные углы с ребрами на этих лучах. Вместе с тем телесный многогранный угол сам состоит из таких трехгранных углов. Поэтому он совпадает с выпуклой оболочкой множества своих ребер, чем теорема доказана.

Из теорем 1 и 2 вытекает

**Теорема 3.** *Задание предельного угла бесконечного выпуклого многогранника равносильно заданию направлений бесконечных ребер этого многогранника, т. е. предельный угол определяет эти направления и сам определяется ими как поверхность выпуклой оболочки совокупности полупрямых, проведенных из одной какой-либо точки в направлениях бесконечных ребер многогранника.*

Эта теорема очевидным образом следует из того, что ребра предельного угла и бесконечные ребра многогранника параллельны и что выпуклый многогранный угол задается своей вершиной и направлениями ребер.

Из теоремы 3 следует, между прочим, что предельный угол бесконечного выпуклого многогранника можно еще определить как многогранный угол, натянутый на полупрямые, проведенные из произвольной точки в направлениях бесконечных ребер многогранника, т. е. как поверхность выпуклой оболочки совокупности таких полупрямых.

Заметим, что предельный угол бесконечного выпуклого многогранника  $P$  можно получить еще двумя способами.

Во-первых, если на многограннике  $P$  или внутри него взять любую точку  $O$  и провести из нее все полупрямые, содержащиеся в теле, ограниченном многогранником  $P$ , то они заполнят телесный угол, поверхность которого и будет предельным углом многогранника  $P$ .

Во-вторых, если через какую-либо точку  $O$  провести плоскости, параллельные плоскостям бесконечных граней многогранника  $P$ , то они ограничат телесный угол, поверхность которого и будет предельным углом. Говоря точно, речь идет о том телесном угле, который получается как общая часть тех полупространств, ограниченных проведенными плоскостями, внешние нормали к которым параллельны внешним нормальям к бесконечным граням многогранника. (Без этого условия определение не однозначно, так как,

например, три плоскости ограничивают одновременно восемь трехгранных углов.)

То, что оба указанных построения действительно дают предельный угол, мы не будем доказывать, так как это нам не понадобится. Впрочем, результат представляется достаточно очевидным, а точное доказательство может служить хорошей задачей.

**3.** Для дальнейшего нам понадобится следующая лемма:

**Лемма.** *Если телесный выпуклый многогранник  $P$  содержит полупрямую  $a$ , то он содержит и всякую параллельную ей и так же направленную полупрямую  $b$ , исходящую из любой его точки  $B$ .*

Действительно, пусть  $R$  — полупространство, ограниченное плоскостью какой-либо грани многогранника  $P$  и содержащее  $P$ . Полупрямая  $a$  лежит в этом полупространстве и в нем же лежит точка  $B$ . Но тогда исходящая из  $B$  полупрямая  $b$ , параллельная  $a$ , также лежит в  $R$ . Таким образом, полупрямая  $b$  лежит во всяком полупространстве, ограниченном плоскостью какой-либо грани многогранника  $P$  и содержащем  $P$ . А так как многогранник  $P$  есть общая часть таких полупространств, то полупрямая  $b$  содержится в нем, что и требовалось доказать.

**Теорема 4.** *Бесконечный выпуклый многогранник однозначно определяется заданием своих вершин и предельного угла. Он есть поверхность выпуклой оболочки фигуры, образованной его вершинами и предельным углом, если только вершина этого последнего находится в многограннике.*

Так как согласно теореме 3 задание предельного угла равносильно указанию направлений бесконечных ребер многогранника, то теорему 4 можно сформулировать и так:

*Бесконечный выпуклый многогранник определяется заданием своих вершин и направлений бесконечных ребер. Он есть поверхность выпуклой оболочки фигуры, образованной его вершинами и полупрямыми, проведенными из любой его точки в направлениях бесконечных ребер.*

**Доказательство.** Пусть  $P$  — бесконечный выпуклый многогранник, а  $\bar{R}$  — выпуклая оболочка фигуры, образованной его вершинами и предельным углом  $V$ . Мы считаем вершину угла  $V$  находящейся в многограннике  $P$ , а тогда и сам угол  $V$  содержится в  $P$ , вернее, в телесном многограннике  $\bar{P}$ , ограниченном многогранной поверхностью  $P$ . Так как выпуклая оболочка  $\bar{R}$  вершин и угла  $V$  есть общая часть всех содержащих их телесных выпуклых многогранников, то она содержится в многограннике  $\bar{P}$ .

Докажем, что, и обратно,  $\bar{P}$  содержится в  $\bar{R}$ . Так как вершины многогранника  $\bar{P}$  содержатся в  $\bar{R}$ , то по выпуклости тела  $\bar{R}$  в нем содержатся также все конечные ребра многогранника  $\bar{P}$ . Далее,  $\bar{R}$  содержит угол  $V$  и тем самым содержит его ребра, т. е. полупрямые, параллельные бесконечным ребрам многогранника  $\bar{P}$ . Но тогда по доказанной выше лемме  $\bar{R}$  содержит

также параллельные полупрямые, идущие из любых его точек. Принимая за эти точки вершины многогранника  $\overline{P}$ , мы убеждаемся, что  $\overline{R}$  содержит также все бесконечные ребра этого многогранника. Таким образом,  $\overline{R}$  содержит все ребра многогранника  $\overline{P}$ . Но если выпуклая фигура содержит все стороны выпуклого многоугольника, то она, очевидно, содержит и самый многоугольник<sup>11)</sup>. Поэтому  $\overline{R}$  вместе с ребрами многогранника  $\overline{P}$  содержит и все его грани, т. е. всю его поверхность. Вместе с ней  $\overline{R}$  содержит и самый многогранник.

(Строгое доказательство этого последнего, очевидного утверждения сводится к следующему. Пусть  $X$  — любая точка внутри многогранника  $\overline{P}$ . Проведем плоскость через точку  $X$  и любые две точки на поверхности многогранника  $\overline{P}$ . Эта плоскость пересечет  $\overline{P}$  по выпуклому многоугольнику, стороны которого лежат на поверхности  $\overline{P}$  и потому содержатся в выпуклой оболочке  $\overline{R}$ . Если же все стороны выпуклого многоугольника содержатся в какой-либо выпуклой фигуре  $\overline{R}$ , то он весь в ней содержится. Таким образом, любая точка  $X$  многогранника  $\overline{P}$  оказывается лежащей в  $\overline{R}$ , т. е. весь многогранник  $\overline{P}$  содержится в  $\overline{R}$ .)

Итак, мы доказали, что как  $\overline{P}$  содержит  $\overline{R}$ , так и  $\overline{R}$  содержит  $\overline{P}$ , т. е. они совпадают. Вместе с тем совпадают их поверхности, так что многогранник  $P$  является поверхностью выпуклой оболочки  $\overline{R}$  его вершин и предельного угла, что и требовалось доказать.

4. Сравним доказанную только что теорему 4 с теоремой 1 §3 о том, что замкнутый выпуклый многогранник определяется заданием своих вершин. Можно считать, что направления бесконечных ребер как бы задают «бесконечно удаленные вершины» бесконечного многогранника. Это становится особенно ясным, если представить себе бесконечный многогранник как предел конечных многогранников. В частности, ребра, сходящиеся в одной вершине, при бесконечном ее удалении становятся параллельными, и потому ясно, что параллельные бесконечные ребра задают одну «бесконечно удаленную вершину» в согласии с тем, что они имеют одно направление.

<sup>11)</sup> Доказательство (рис. 23). Пусть  $Q$  — выпуклый многоугольник и  $A$  — какая-либо его вершина. Многоугольник  $Q$  содержится в угле между полупрямыми  $p, q$ , идущими из вершины  $A$  вдоль сходящихся в ней сторон. Пусть  $X$  — любая точка многоугольника  $Q$ . Проведем через нее прямую, пересекающую полупрямые  $p$  и  $q$ . Эта прямая пересечет периметр многоугольника в двух точках  $Y, Z$ . Поэтому, если выпуклая фигура содержит все стороны многоугольника  $Q$ , то она содержит отрезок  $YZ$ , а вместе с ним точку  $X$ . Таким образом, все точки  $X$  многоугольника  $Q$  содержатся в этой фигуре.

(Это замечание использует существование вершин. Без этого оно может быть неверным, потому что полуплоскость может содержать прямую, ограничивающую другую полуплоскость, не содержащуюся в данной.)

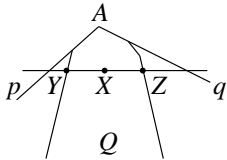


Рис. 23

Это замечание могло бы быть положено в основу доказательства теоремы 4, и мы сейчас наметим на его основе доказательство теоремы о том, что поверхность выпуклой оболочки фигуры, образованной конечным числом точек и многогранным углом  $V$ , есть бесконечный выпуклый многогранник с предельным углом  $V$ . Пусть  $A_1, A_2, \dots, A_m$  — данные точки и  $V$  — выпуклый многогранный угол, вершину которого мы считаем одной из точек  $A_1, \dots, A_m$  (рис. 24). Проведем плоскость  $Q$ , пересекающую все ребра угла  $V$ , так что от него отсекается пирамида  $V'$ . Плоскость  $Q$  возьмем так далеко от вершины угла  $V$ , чтобы все точки  $A_i$  лежали от нее по ту же сторону, что и его вершина. Плоскость  $Q$  пересекает ребра  $b_1, b_2, \dots, b_n$  угла  $V$  в точках  $B_1, B_2, \dots, B_n$ . По теореме 2 § 3 выпуклая оболочка совокупности всех точек  $A_i$  и  $B_j$  будет некоторым выпуклым многогранником  $P'$ , содержащим пирамиду  $V'$ . (На рис. 24 ребра многогранника  $P'$  обозначены штрихами.)

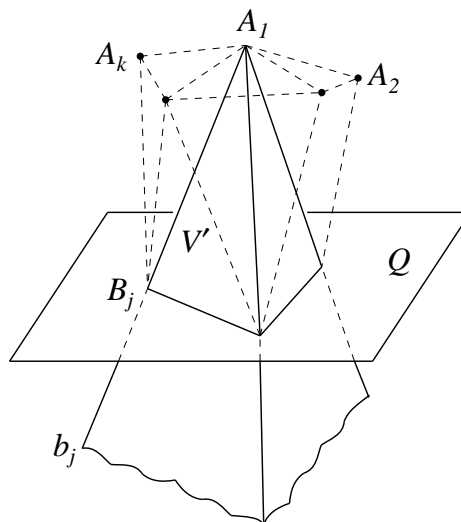


Рис. 24

Если плоскость  $Q$  отодвигать в бесконечность, то многогранник  $P'$  будет увеличиваться и в пределе даст многогранник  $P$ , содержащий весь данный угол  $V$ . Этот многогранник  $P$  и будет выпуклой оболочкой точек  $A_1, \dots, A_m$  и угла  $V$ .

Когда точка  $B_j$  удаляется в бесконечность по ребру  $b_j$  угла  $V$ , то всякий отрезок  $A_k B_j$ , идущий из данной точки  $A_k$ , стремится к параллельности ребру  $b_j$ . Отсюда можно заключить, что бесконечные ребра многогранника  $P$  параллельны ребрам угла  $V$ , так что  $V$  и есть его предельный угол, поскольку согласно теореме 3 предельный угол определяется именно параллельностью его ребер бесконечным ребрам многогранника.

Намеченное рассуждение нуждается в уточнении в ряде пунктов. Нужно доказать, что многогранник  $P$  как предел выпуклых многогранников сам будет выпуклым. Нужно также доказать, что он будет иметь бесконечные ребра, параллельные, соответственно, всем ребрам угла  $V$ , а не только некоторым из них, и др.

Оставляя уточнение намеченного рассуждения читателю, мы дадим сейчас исчерпывающее доказательство указанной теоремы, основанное на других соображениях, без предельного перехода от конечных многогранников.



**5. Теорема 5.** *Поверхность выпуклой оболочки фигуры, образованной конечным числом точек  $A_1, \dots, A_m$  и выпуклым многогранным углом  $V$ , есть выпуклый многогранник  $P$ , для которого  $V$  является предельным углом.*

(Если угол  $V$  вырождается в плоский угол или полупрямую, а точки  $A_1, \dots, A_m$  лежат в одной плоскости с  $V$ , то многогранник  $P$  вырождается в многоугольник. Чтобы обойтись без оговорок, мы будем молчаливо предполагать, что этот случай не исключается. Напомним еще, что бесконечные многогранники мы считаем не содержащими прямых согласно условию, принятому в п° 3 § 1.)

Вершину угла  $V$  можно считать одной из точек  $A_i$ , стоит лишь присоединить ее к этим точкам. Для удобства будем понимать под многогранниками и углами телесные многогранники и углы.

Доказательство будем вести индукцией по числу ребер угла  $V$ . Пусть угол  $V$  сводится к полупрямой  $a$ . Построим выпуклую оболочку совокупности данных точек  $A_1, \dots, A_m$ . Согласно теореме 2 § 3, она будет некоторым выпуклым многогранником  $P_0$ . Будем переносить полупрямую  $a$  параллельно себе так, чтобы ее начало зачерчивало весь многогранник  $P_0$ . Она зачертит некоторое тело  $P$  (рис. 25).

Пусть точка  $X$  лежит внутри многогранника  $P_0$ . Исходящая из нее полупрямая  $a_X$ , параллельная  $a$ , пересекает поверхность многогранника  $P_0$ . Отсюда следует, что то же тело получится, если переносить начало полупрямой  $a$  только по граням многогранника  $P_0$ . Но при движении по грани  $Q$  полупрямая  $a$  зачертит бесконечную в одну сторону призму с основанием  $Q$  и боковыми ребрами, параллельными  $a$ . Все тело  $P$  составляется из таких призм и представляет поэтому многогранник.

Многогранник  $P$  — выпуклый. Действительно, если  $X$  и  $Y$  — две его точки, то по построению они лежат на полупрямых  $a_X, a_Y$ , идущих из некоторых точек  $X_0, Y_0$  многогранника  $P_0$  параллельно полупрямой  $a$  (рис. 26). Отрезок  $X_0Y_0$  содержится в многограннике  $P_0$ , так как он — выпуклый. Поэтому полупрямые, идущие из точек этого отрезка параллельно  $a$ , содержатся в  $P$ . Но они образуют полосу между  $a_X, a_Y$ , а потому оказывается, что вместе с точками  $X, Y$  многогранник  $P$  содержит отрезок  $XY$ , чем его выпуклость доказана.

Многогранник  $P$  — выпуклый и содержит точки  $A_i$  и полупрямую  $a$ ; поэтому он содержит и их выпуклую оболочку  $R$ .

С другой стороны, выпуклая оболочка  $R$ , очевидно, содержит многогранник  $P_0$  как выпуклую оболочку одних точек  $A_1, \dots, A_m$ . Кроме того, согласно доказанной в п° 3 лемме, если выпуклый многогранник содержит  $P_0$  и полупрямую  $a$ , то он содержит всякую параллельную ей полупрямую, идущую из точек многогранника  $P_0$ . Выпуклая оболочка  $R$  как общая часть

таких многогранников обладает тем же свойством, т. е. содержит все полупрямые  $a$ , идущие из точек многогранника  $P_0$ . Но это означает, что она содержит весь многогранник  $P$ .

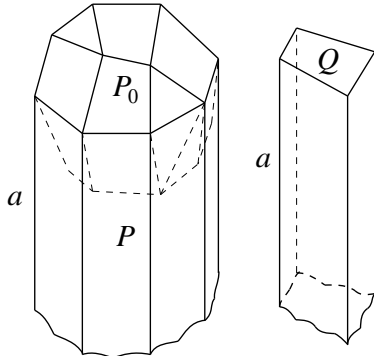


Рис. 25

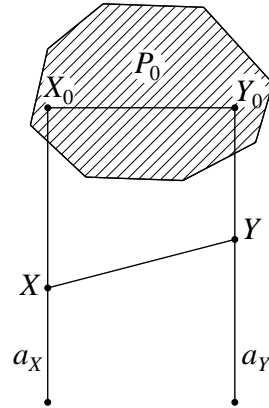


Рис. 26

Итак, выпуклая оболочка  $R$  содержит многогранник  $P$  и сама содержится в нем, а следовательно, многогранник  $P$  и есть эта выпуклая оболочка.

Все бесконечные ребра многогранника  $P$ , как ясно из его построения, параллельны полупрямой  $a$ . Поэтому его предельный угол и есть эта полупрямая.

Таким образом, для случая, когда угол  $V$  сводится к одной полупрямой  $a$ , теорема доказана.

Если дан угол  $V$  с  $n$  ребрами  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , то искомым многогранник  $P$  строим последовательно. Сначала, перенося начальную точку ребра  $a_1$  по многограннику  $P_0$ , получаем многогранник  $P_1$ , потом, перенося начало ребра  $a_2$  по  $P_1$ , получаем многогранник  $P_2$  и т. д.

Допустим, что теорема верна в случае угла с  $n - 1$  ребром, и докажем ее для угла  $V$  с  $n$  ребрами  $a_1, \dots, a_n$ . Если провести плоскость через ребра  $a_1$  и  $a_{n-1}$ , то она отделит ребро  $a_n$ , и мы получим угол  $V'$  с  $n - 1$  ребром  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  (рис. 27, а). Пусть  $P'$  — выпуклая оболочка фигуры, образованной данными точками  $A_1, \dots, A_m$  и углом  $V'$ . По предположению, она является выпуклым многогранником с предельным углом  $V'$ .

Перенося по всем точкам многогранника  $P'$  начало полупрямой  $a_n$ , являющейся  $n$ -м ребром данного угла  $V$ , получим тело  $P$ . Повторяя предыдущие рассуждения с заменой  $P_0$  на  $P'$  и  $a$  на  $a_n$ , убедимся в том, что тело  $P$  будет выпуклым многогранником, представляющим собой выпуклую обо-

лочку фигуры, образованной многогранником  $P'$  и полупрямой  $a_n$ <sup>12)</sup>. Но  $P'$  сам есть выпуклая оболочка фигуры, образованной точками  $A_1, \dots, A_m$  и углом  $V'$ , а угол  $V'$  (по теореме 2) есть выпуклая оболочка совокупности своих ребер  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ . Отсюда следует, что многогранник  $P$  будет выпуклой оболочкой совокупности точек  $A_1, \dots, A_m$  и всех полупрямых  $a_1, \dots, a_n$ , т. е. выпуклой оболочкой фигуры, образованной точками  $A_1, \dots, A_m$  и углом  $V$ .

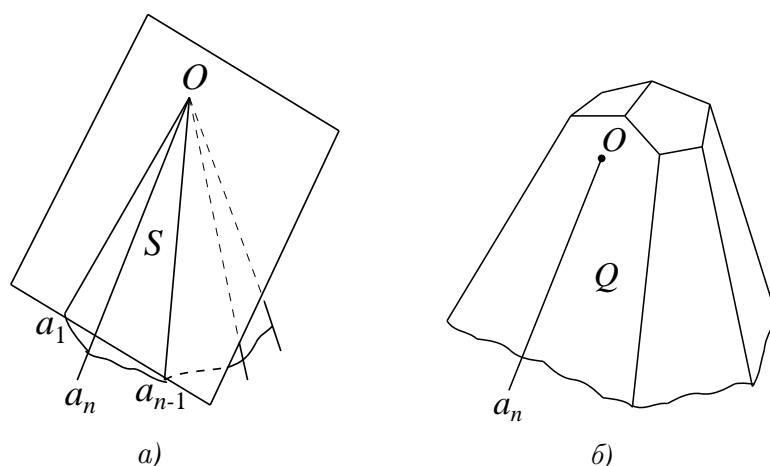


Рис. 27

Эти заключения основаны на очевидном замечании: если  $G$  — выпуклая оболочка фигуры  $F$ , а  $G'$  — фигуры  $F \cup F'$ , то  $G'$  — также выпуклая оболочка фигуры  $G \cup F'$ . Доказательство следует из самого определения выпуклой оболочки.

Остается доказать, что угол  $V$  будет его предельным углом.

Так как  $V'$  есть предельный угол многогранника  $P'$ , то бесконечные ребра у  $V'$  и  $P'$  соответственно параллельны. При перенесении полупрямой  $a_n$  по точкам многогранника  $P'$  новых бесконечных ребер, кроме параллельных  $a_n$ , не прибавится, потому что к  $P'$  прибавляются только призмы с основаниями на его гранях и с боковыми ребрами, параллельными  $a_n$ <sup>13)</sup>.

<sup>12)</sup>Многогранник  $P'$  теперь бесконечный, а потому полупрямая, идущая изнутри многогранника  $P'$ , может и не пересекать его поверхности. Но тогда она пересекает его поверхность при продолжении в противоположную сторону, так как иначе  $P'$  содержал бы целую прямую, что исключено по предположению. Поэтому все прежние выводы повторяются дословно.

<sup>13)</sup>Многогранник  $P$  складывается из таких призм с основаниями на гранях  $P'$ , но теперь эти призмы могут иметь бесконечные основания — бесконечные грани многогранника  $P'$ .

Отсюда следует, что бесконечные ребра многогранника  $P$  могут быть параллельны только полупрямым  $a_1, \dots, a_n$ , т. е. ребрами угла  $V$ . Однако остается доказать, что каждой полупрямой  $a_j$  действительно отвечает хотя бы одно ребро многогранника  $P$ .

Допустим, что, например, полупрямой  $a_k$  не отвечает никакое ребро многогранника  $P$ . Многогранник  $P$  как выпуклая оболочка совокупности точек  $A_1, A_2, \dots, A_m$  и полупрямых  $a_1, a_2, \dots, a_n$  полностью ими определяется. Поэтому в его построении порядок полупрямых  $a_j$  не может играть роли, и мы можем считать, что именно полупрямая  $a_k$  была последней  $a_n$ . Следовательно, можно считать, что именно полупрямой  $a_n$  не отвечает на  $P$  никакое ребро.

Пусть  $V''$  — предельный угол многогранника  $P$ . Его ребра параллельны ребрам многогранника  $P$ , а потому все они представляют полупрямые  $a_j$ , кроме некоторых и во всяком случае (согласно сделанному предположению) кроме  $a_n$ . Поэтому  $V''$  есть только часть угла  $V$  со всеми ребрами  $a_1, \dots, a_n$ .

Ребро  $a_n$  отделяется от угла  $V''$  плоскостью его грани  $S$  с ребрами  $a_1, a_{n-1}$  (или другими, если, скажем,  $a_1$  или  $a_{n-1}$  не являются ребрами угла  $V''$ ). По теореме 1 о предельном угле многогранник  $P$  имеет грань  $Q$ , параллельную  $S$  (рис. 27, б). Переносим вершину угла  $V''$  на грань  $Q$ , мы убедимся тогда, что ребро  $a_n$  окажется вне многогранника  $P$ . Это, однако, противоречит самому построению многогранника  $P$  как зачерчиваемого полупрямыми, параллельными  $a_n$ .

Таким образом, доказано, что всем ребрам угла  $V$  отвечают параллельные им бесконечные ребра многогранника  $P$ , так что  $V$  и есть его предельный угол.

Теорема доказана полностью.

**Теорема 5а.** *При условиях теоремы 5 многогранник  $P$  может иметь вершины только в данных точках  $A_1, A_2, \dots, A_m$ . Любая из них будет вершиной в том и только в том случае, когда она не содержится в выпуклой оболочке фигуры, образованной остальными точками  $A_i$  и углом  $V$  (при том, конечно, условии, что вершина угла  $V$  находится в одной из остальных точек).*

То, что вершины многогранника  $P$  могут лежать только в точках  $A_1, \dots, A_m$ , видно из самого его построения. Действительно, мы начинали последнее с построения выпуклой оболочки  $P_0$  совокупности точек  $A_1, \dots, A_m$ . Согласно теореме 2 §3, ее вершины лежат только в этих точках, а при проведении полупрямых, приводящем к построению многогранника  $P$ , новые вершины не могут прибавиться.

Пусть  $P'$  — выпуклая оболочка фигуры, образованной углом  $V$  и всеми точками  $A_i$ , кроме  $A_m$ . Согласно изложенному, она есть выпуклый многогранник с вершинами только в точках  $A_1, \dots, A_{m-1}$ . Если точка  $A_m$  содер-

жится в  $P'$ , то ее присоединение ничего не меняет, а потому  $P'$  совпадает с  $P$ , так что и  $P$  не имеет вершины  $A_m$ .

Обратно, если  $A_m$  не является вершиной многогранника  $P$ , то она лежит в  $P'$ . Действительно, согласно теореме 4,  $P$  есть выпуклая оболочка своего предельного угла  $V$  и вершин. Так как среди них нет  $A_m$ , то  $P$  совпадает с  $P'$ , так что и  $P'$  содержит точку  $A_m$ .

Теорема доказана.

Заметим, что по теореме 4 многогранник является выпуклой оболочкой своих вершин и предельного угла  $V$  независимо от того, где в многограннике лежит вершина угла  $V$ . Вершины многогранника  $P$  теоремы 5 лежат в точках  $A_i$ , а из сделанного сейчас замечания следует, что вершину угла  $V$  можно брать где угодно в  $P$ , в частности ее можно брать в любой точке многогранника  $P_0$ , образующего выпуклую оболочку совокупности точек  $A_i$ .

**6. Теорема 6.** *Выпуклая оболочка конечной совокупности полупрямых, исходящих из одной точки внутрь одного полупространства, есть телесный выпуклый многогранный угол. Его ребрами служат данные полупрямые, но не обязательно все. Любая из них будет его ребром тогда и только тогда, когда она не попадает в выпуклую оболочку совокупности остальных полупрямых. (Если полупрямые лежат в плоскости, то их выпуклая оболочка будет плоским углом.)*

Пусть полупрямые  $a_1, \dots, a_m$  идут из точки  $O$  внутрь полупространства  $R$ , ограниченного плоскостью  $Q$ , проходящей через точку  $O$ . Тогда всякая плоскость  $Q'$ , проходящая внутри полупространства  $R$  параллельно  $Q$ , пересекает полупрямые  $a_1, \dots, a_m$  в некоторых точках  $A_1, \dots, A_m$ . Выпуклая оболочка совокупности точек  $O, A_1, \dots, A_m$ , согласно теореме 2 § 3, есть телесный выпуклый многогранник. Этот многогранник представляет собой пирамиду с вершиной  $O$  и с основанием на плоскости  $Q'$ . Очевидно также, что эта пирамида  $P$  является выпуклой оболочкой совокупности отрезков  $OA_1, \dots, OA_m$ .

Если теперь отодвигать плоскость  $Q'$  в бесконечность, то пирамида  $P$  в пределе превратится в телесный выпуклый многогранный угол  $V$ , который будет выпуклой оболочкой совокупности лучей  $a_1, \dots, a_m$ . (Это ясно из того, что такая выпуклая оболочка должна содержать все отрезки  $OA_i$  и тем самым все пирамиды  $P$ .)

По теореме 2 § 3 точка  $A_k$  будет вершиной пирамиды  $P$  тогда и только тогда, когда она не попадает в выпуклую оболочку совокупности остальных точек  $O, A_1, \dots, A_{k-1}, A_{k+1}, \dots, A_m$ . Поэтому и отрезок  $OA_k$  будет ребром пирамиды  $P$  тогда и только тогда, когда он не попадает в выпуклую оболочку совокупности остальных отрезков  $OA_i$ . В пределе мы получим тот же результат для полупрямой  $a_k$ . Это становится совершенно очевидным, если заметить, что при смещении плоскости  $Q'$  в бесконечность пирамида  $P$

только подобно увеличивается из точки  $O$ , так что всякое ее ребро остается ее ребром и всякий отрезок  $OA_k$ , не являющийся ребром, не становится ребром. Теорема таким образом доказана.

(Если полупрямые  $a_1, a_2, \dots, a_n$  не идут в одно полупространство, то их выпуклой оболочкой будет все пространство. Если же они идут в одно полупространство  $R$ , но не идут внутрь никакого полупространства, то их выпуклой оболочкой будет либо полупространство  $R$ , либо двугранный угол с ребром на плоскости, ограничивающей  $R$ .)

**7. Задачи.** 1. Доказать следующее обобщение теорем 5 и 6.

Выпуклая оболочка конечной совокупности точек  $A_i$  и полупрямых  $a_j$ , идущих из некоторых из этих точек внутрь одного полупространства, есть телесный выпуклый многогранник. Его предельный угол есть выпуклая оболочка совокупности полупрямых  $a_j$ , проведенных из одной точки. Вершины его лежат только в точках  $A_i$ , но любая из них будет вершиной тогда и только тогда, когда она не попадает внутрь выпуклой оболочки совокупности остальных точек и полупрямых  $a_j$ . Полупрямые  $a_j$  можно переносить параллельно себе так, чтобы начала их не покидали выпуклой оболочки совокупности точек  $A_i$ , и многогранник от этого не меняется.

2. Доказать теоремы 2–6, исходя из определения выпуклой оболочки как общей части полупространств, содержащих данное множество. (Ср. с задачей 2 § 3.)

3. Доказать теоремы 5 и 5а индукцией по числу точек  $A_1, A_2, \dots, A_m$ .

4. Доказать, что определения предельного угла, дополнительно указанные в  $n^\circ 2$ , равносильны основному (в случае выпуклых многогранников).

5. Доказать, что всякий бесконечный выпуклый многогранник с границей может быть единственным образом дополнен до полного без появления новых вершин. Найти условия, при которых данная граничная вершина исходного многогранника не будет вершиной построенного полного многогранника. (Ср. с теоремой 4 § 3 и задачей 1 § 3.)

6. Пусть  $V$  — телесный выпуклый многогранный угол с вершиной  $A$ . Пусть  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$  — векторы вдоль его ребер. Доказать, что  $V$  есть геометрическое место концов  $X$  векторов  $\mathbf{x} = \overrightarrow{OX} = \mathbf{a} + \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{a}_i$ , где  $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$  — вектор из начала  $O$  в вершину  $A$  и  $\alpha_i$  — любые неотрицательные числа.

7. Пусть даны точки  $A_1, \dots, A_n$  и полупрямые  $b_1, b_2, \dots, b_k$ , исходящие из этих точек. Пусть  $\mathbf{a}_i = \overrightarrow{OA_i}$  — векторы из начала в точки  $A_i$ , а  $\mathbf{b}_i$  — векторы вдоль полупрямых  $b_i$ . Доказать, что выпуклая оболочка совокупности точек  $A_i$  и полупрямых  $b_i$  есть геометри-

ческое место концов векторов  $\mathbf{x} = \overrightarrow{OX} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{a}_i + \sum_{i=1}^k \beta_i \mathbf{b}_i$ , где все  $\alpha_i, \beta_i \geq 0$  и  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ . (Ср. с задачей 4 § 3.)

## § 5. СФЕРИЧЕСКОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ

**1. Сферическое изображение.** Пусть  $F$  — выпуклая поверхность и  $E$  — какая-либо единичная сфера, т. е. сфера радиуса единица. Возьмем на  $F$  некоторое множество точек  $M$  и через каждую точку этого множества проведем все опорные плоскости к  $F$ . Если внешние нормали к этим плоскостям отложить из центра сферы  $E$ , то концы их заполнят на ней некоторое множество, которое называется *сферическим изображением* множества  $M$ .

Это определение приложимо, в частности, к выпуклым многогранникам, причем, если многогранник имеет границу, то опорные плоскости, упирающиеся в него только в граничных точках, исключаются. Если множество  $M$  на многограннике  $P$  есть внутренность грани, то его сферическое изображение состоит из одной точки. Если  $M$  есть ребро с исключенными концами<sup>14)</sup>, то его сферическое изображение есть дуга большого круга с концами в точках, являющихся сферическими изображениями граней, сходящихся в ребре  $M$ , как это ясно из того, что всякая промежуточная плоскость между плоскостями граней, сходящихся в ребре, будет опорной.

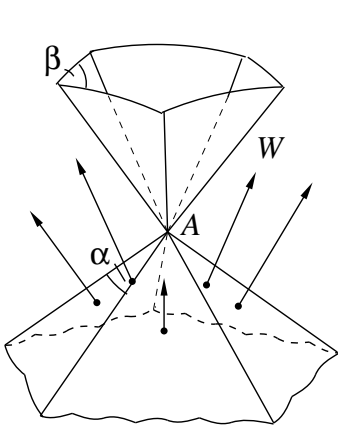


Рис. 28

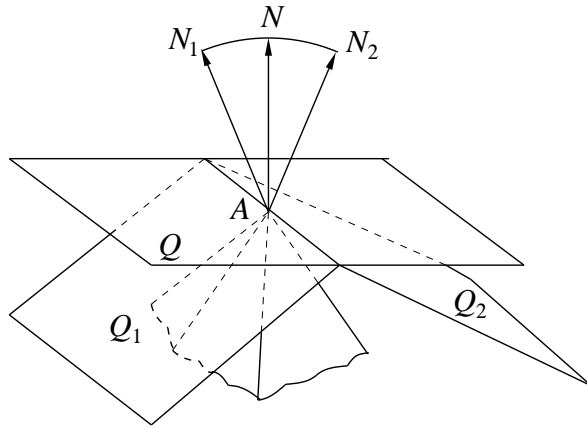


Рис. 29

Если  $M$  состоит из одной вершины  $A$ , то его сферическое изображение есть часть сферы  $E$ , вырезаемая телесным углом, образованным нормальными к всем опорным плоскостям в вершине  $A$ . Этот телесный угол  $W$  представляет собой, как легко убедиться, выпуклый многогранный угол с ребрами, перпендикулярными к граням многогранника, сходящимся в  $A$  (рис. 28).

Если  $Q_1$  и  $Q_2$  — опорные плоскости в вершине  $A$ , то многогранник заключен в двугранном угле между ними, и потому всякая «промежуточная» плоскость  $Q$  также будет опорной в вершине  $A$ . Нормали  $N$  к таким плоскостям  $Q$  заполняют угол между нормальными  $N_1$  и  $N_2$  к плоскостям  $Q_1$  и  $Q_2$  (рис. 29). Это означает, что вместе с лучами  $N_1$  и  $N_2$  угол  $W$  содержит плоский угол между ними. Поэтому угол  $W$  — выпуклый.

<sup>14)</sup> Концы нужно исключить, так как они являются вершинами многогранника и их сферические изображения будут сферическими многоугольниками. По аналогичной причине в предыдущем утверждении говорится о внутренности грани, т. е. грани с исключением ее ребер и вершин.

Грани угла  $W$  образованы нормальными к плоскостям, касающимся многогранника по ребрам, сходящимся в вершине  $A$ . Они представляют поэтому плоские углы, перпендикулярные к этим ребрам. Следовательно, каждый двугранный угол  $\beta_i$  телесного угла  $W$  дополняет до  $\pi$  угол между двумя соответствующими ребрами многогранника, т. е. плоский угол  $\alpha_i$  на грани при вершине  $A$ :

$$\alpha_i = \pi - \beta_i. \quad (1)$$

Сферическое изображение вершины есть, таким образом, выпуклый сферический многоугольник с углами  $\beta_i$ . Вершины этого многоугольника, соответственно ребрам угла  $W$ , являются сферическими изображениями внутренних граней, а стороны, соответственно граням угла  $W$ , представляют сферические изображения ребер с исключенными концами.

Сферическое изображение вершины есть, конечно, то же, что сферическое изображение многогранного угла, образованного сходящимися в ней гранями. Все наши выводы верны для любого выпуклого многогранного угла.

Если теперь  $M$  есть любая часть данного выпуклого многогранника  $P$ , то ее сферическое изображение складывается из сферических изображений попадающих в нее вершин, отрезков ребер и кусков внутренних граней. Так как сферические изображения ребер и граней включаются в сферические изображения вершин, к которым они подходят, то сферическое изображение многогранника складывается из сферических изображений его вершин и тех ребер, оба конца которых лежат на границе<sup>15)</sup>. При этом согласно условию граничные вершины и ребра исключаются. Например, боковая поверхность призмы не имеет вершин внутри, и ее сферическое изображение сводится к большому кругу.

Всякая опорная плоскость, касающаяся многогранника в вершине, не касается других его вершин, если только она не касается его по ребру или грани. Поэтому многоугольники, представляющие сферические изображения вершин, не имеют общих внутренних точек и могут прилегать лишь по сторонам и вершинам, соответственно ребрам и граням, на которых лежат вершины многогранника. Отсюда следует, что сферическое изображение всего многогранника представляет собой сферический многоугольник, составленный из сферических изображений вершин многогранника.

---

<sup>15)</sup> Если многогранник имеет границу, то граничные вершины исключаются. Но на многограннике с границей могут иметься неграничные ребра с обоими концами на границе. Тогда их сферические изображения не входят в сферические изображения вершин, и их нужно включать в сферическое изображение многогранника особо. При этом может случиться, что сферические изображения некоторых вершин соединяются дугами больших кругов, являющимися сферическими изображениями таких ребер.



Если многогранник замкнутый, то его сферическое изображение покрывает всю сферу и представляет разбиение ее на сферические выпуклые многоугольники, соответствующие вершинам многогранника.

Резюмируем все полученные выводы в следующей теореме:

**Теорема 1.** *Сферическое изображение выпуклого многогранника складывается из выпуклых сферических многоугольников  $S_1, \dots, S_m$ , являющихся сферическими изображениями его вершин. Эти многоугольники не имеют общих внутренних точек. Общая сторона двух многоугольников  $S_k, S_l$  есть сферическое изображение ребра (с исключением концов), соединяющего соответствующие вершины. Общая вершина многоугольников  $S_k, \dots, S_q$  есть сферическое изображение внутренней той грани, которой принадлежат вершины многогранника, соответствующие этим многоугольникам. Углы многоугольников  $S_i$  равны дополнениям до  $\pi$  плоских углов при соответствующих вершинах многогранника.*

**2. Площадь сферического изображения.** Пусть  $V$  — выпуклый многогранный угол с  $n$  гранями, плоские углы которых равны  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Его сферическое изображение есть сферический  $n$ -угольник с углами  $\beta_i = \pi - \alpha_i$ . Но площадь  $\omega$  сферического  $n$ -угольника выражается через его углы по формуле

$$\omega = \sum_{i=1}^n \beta_i - (n-2)\pi, \quad (2)$$

т. е. равна избытку суммы его углов над суммой углов плоского многоугольника с тем же числом вершин  $n$ <sup>16)</sup>. А так как  $\beta_i = \pi - \alpha_i$ , то

$$\omega = 2\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i. \quad (3)$$

Так как площадь  $\omega$  положительна, то в этой формуле содержится, между прочим, тот известный факт, что сумма плоских углов выпуклого многогранного угла всегда меньше  $2\pi$ .

Сумму углов  $\alpha_i$  мы называем *полным углом вокруг вершины* и обозначаем через  $\theta$ , а разность  $2\pi - \theta$  называем *кривизной вершины*. Поэтому формула (3) означает, что кривизна вершины выпуклого многогранного угла равна площади его сферического изображения.

<sup>16)</sup> **Доказательство.** Докажем эту формулу сначала для сферического треугольника  $B_1B_2B_3$  с углами  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  (рис. 30). Продолжая стороны треугольника, получим три больших круга, которые в своем пересечении образуют еще треугольник  $B'_1B'_2B'_3$ , симметричный треугольнику  $B_1B_2B_3$  относительно центра сферы. Каждые два больших круга ограничивают два двуугольника с вершинами  $B_1B'_1, B_2B'_2, B_3B'_3$ . Углы этих двуугольников будут соответственно  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ . Отношение площади каждого двуугольника к площади всей сферы равно, очевидно, отношению его угла к  $2\pi$ . Поэтому сумма пло-

*Кривизна* любой части многогранника определяется как сумма кривизн заключающихся в ней вершин, не лежащих на его границе. Вместе с тем согласно теореме 1 сферическое изображение любой части многогранника складывается из сферических изображений заключающихся в ней вершин. Поэтому и для любой части многогранника площадь сферического изображения равна кривизне.

Если деформировать многогранник, не меняя длин кривых на нем, то углы на нем также не будут меняться, потому что они определяются длинами; например, длина кривой, проведенной на многограннике на постоянном малом расстоянии  $r$  от вершины  $A$ , равна, очевидно,  $\theta r$ , где  $\theta$  — полный угол вокруг  $A$ . Длины кривых на многограннике определяют, как говорят, его «внутреннюю метрику», и потому кривизна и вместе с ней площадь сферического изображения зависят только от внутренней метрики многогранника. (Более детально понятие внутренней метрики будет определено в п° 2 § 6.) Полученные результаты резюмируем в виде следующей теоремы:

**Теорема 2.** *Площадь сферического изображения любой части выпуклого многогранника равна ее кривизне, а так как кривизна зависит только от внутренней метрики многогранника, то это же верно для площади сферического изображения. Поэтому при всякой деформации многогранника, не нарушающей его выпуклости и не меняющей длин кривых на нем (т. е. не меняющей его метрики), площадь сферического изображения остается неизменной.*

Это есть элементарный аналог знаменитой теоремы Гаусса о том, что у всякой непрерывно изогнутой поверхности площадь сферического изображения остается неизменной, если деформировать поверхность, не меняя длин кривых на ней.

**3. Сферическое изображение бесконечного многогранника.** Замкнутый выпуклый многогранник имеет опорные плоскости любого направ-

\_\_\_\_\_ щадей всех шести рассматриваемых двугольников будет

$$\frac{2(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)}{2\pi} 4\pi = 4(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3).$$

Вместе с тем непосредственно видно, что наши двугольники покрывают всю сферу и трижды оба треугольника  $B_1 B_2 B_3$  и  $B'_1 B'_2 B'_3$ . Поэтому сумма их площадей равна  $4\pi + 4\omega$ , где  $\omega$  — площадь треугольника  $B_1 B_2 B_3$ . Отсюда  $4(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) = 4\pi + 4\omega$ , т. е.  $\omega = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - \pi$ , как того и требует формула (2).

Если теперь дан сферический  $n$ -угольник, то разбиваем его диагоналями на  $n - 2$  треугольников. Тогда сложение площадей этих треугольников и одновременно углов сразу дает формулу (2) для нашего  $n$ -угольника.

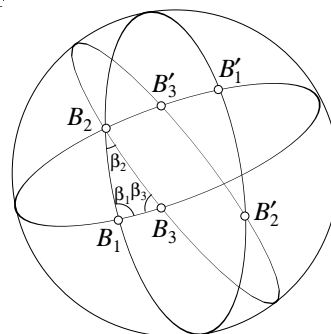


Рис. 30

ления, поэтому его сферическое изображение покрывает всю сферу и площадь его равна  $4\pi$ .

Бесконечный выпуклый многогранник всегда содержит полупрямую. Поэтому для всякой его опорной плоскости  $Q$  найдется опорная плоскость к этой полупрямой с параллельной внешней нормалью, стоит лишь вдвинуть плоскость  $Q$  внутрь многогранника так, чтобы она уперлась в эту полупрямую. Отсюда следует, что сферическое изображение бесконечного многогранника содержится в сферическом изображении полупрямой. Непосредственно видно, что это последнее покрывает полусферу, ограниченную экватором, перпендикулярным к полупрямой. Поэтому *сферическое изображение бесконечного многогранника всегда содержится в полусфере и, следовательно, площадь его не превосходит  $2\pi$* .

Докажем более точную теорему:

**Теорема 3.** *Сферическое изображение бесконечного выпуклого многогранника совпадает со сферическим изображением его предельного угла.*

Пусть  $P$  — бесконечный выпуклый многогранник и  $V$  — его предельный угол. Вершину угла  $V$  мы выберем внутри многогранника, и тогда, как показано в п° 1 § 4, угол  $V$  будет содержаться в многограннике. В таком случае очевидно, что для всякой опорной плоскости  $Q$  многогранника найдется опорная плоскость угла  $V$  с параллельной внешней нормалью, стоит лишь вдвинуть плоскость  $Q$  внутрь многогранника так, чтобы она уперлась в угол  $V$ . Отсюда следует, что сферическое изображение многогранника содержится в сферическом изображении его предельного угла.

Докажем, что, обратно, сферическое изображение угла  $V$  содержится в сферическом изображении многогранника  $P$ . Так как согласно теореме 1 оба сферических изображения представляют собой сферические многоугольники, то достаточно, очевидно, доказать, что всякая внутренняя точка  $N$  сферического изображения угла  $V$  содержится в сферическом изображении многогранника  $P$ .

По доказанному в п° 1 граница сферического изображения многогранного угла складывается из сферических изображений его ребер. Поэтому внутренняя точка  $N$  сферического изображения угла  $V$  отвечает опорной плоскости  $Q$ , касающейся угла  $V$  только в его вершине. Тогда весь угол  $V$ , кроме его вершины, оказывается внутри полупространства  $R$ , ограниченного этой плоскостью.

Так как по самому определению угла  $V$  он состоит из полупрямых, направленных параллельно полупрямым, лежащим на многограннике  $P$ , то все полупрямые, лежащие на  $P$ , будут направлены в то же полупространство  $R$ . Отсюда следует, что в противоположном полупространстве  $R_1$  может заключаться лишь конечная часть многогранника  $P$ . А тогда, выдвигая плоскость  $Q$  в полупространство  $R_1$ , мы дойдем до такого ее положения, что

весь многогранник  $P$  окажется по одну сторону от нее, т. е. мы получим его опорную плоскость, параллельную  $Q$ . Поэтому точка  $N$ , соответствующая на сфере плоскости  $Q$ , входит также в сферическое изображение многогранника  $P$ . Следовательно, сферическое изображение многогранника  $P$  содержит сферическое изображение угла  $V$ , а так как вначале мы доказали обратное включение, то оба сферических изображения совпадают, что и требовалось доказать.

Сферическое изображение всякого многогранного угла представляет собой, как было показано, выпуклый многоугольник, а вершины этого многоугольника  $S$  представляют собой сферические изображения внутренностей граней угла  $V$ . Грани угла  $V$  параллельны тем бесконечным граням многогранника  $P$ , бесконечные ребра которых непараллельны.

Отсюда и из доказанного совпадения сферических изображений многогранника  $P$  и угла  $V$  вытекает следующий вывод:

*Сферическое изображение полного (без границы) бесконечного выпуклого многогранника есть сферически выпуклый многоугольник  $S$ , вершины которого отвечают бесконечным граням с непараллельными бесконечными ребрами. Сферические же изображения граней с параллельными бесконечными ребрами попадают на стороны многоугольника  $S$  (соответствующие ребрам предельного угла, параллельным этим ребрам многогранника). Сферические изображения конечных граней попадают внутрь многоугольника  $S$ .*

Если предельный угол сводится к полупрямой, т. е. если все бесконечные ребра многогранника параллельны, то многоугольник  $S$  представляет собой полусферу. Если же предельный угол сводится к плоскому углу, то многоугольник  $S$  будет двуугольником.

Заметим, что теорема 3 приводит к новому определению предельного угла как многогранного угла, сферическое изображение которого совпадает со сферическим изображением многогранника. Это основано на том факте, что многогранный угол определяется своим сферическим изображением с точностью до переноса. Действительно, если  $V$  — данный многогранный угол, а  $W$  — многогранный угол, заполненный нормальными к опорным плоскостям угла  $V$ , то ребра и грани угла  $W$  перпендикулярны соответственно к граням и ребрам угла  $V$ . Поэтому отношение между углами  $V$  и  $W$  взаимное и они определяют друг друга. Ребра одного перпендикулярны к граням другого, и наоборот. Каждый из них заполняется нормальными к опорным плоскостям другого.

**4. Полярные многогранники.** Указанная только что взаимность многогранных углов  $V$  и  $W$  оказывается интересным образом связанной с существованием взаимных многоугольников и многогранников.

Если  $P$  — выпуклый многогранник и  $O$  — точка внутри него, то, оказывается, можно построить выпуклый многогранник  $P'$ , грани которого перпендикулярны к лучам, идущим из  $O$  через вершины многогранника  $P$ , а вершины лежат на лучах, идущих из  $O$

перпендикулярно к граням многогранника  $P$ . Взаимоотношение между гранями и вершинами многогранников  $P$  и  $P'$  оказывается взаимным. Ребрам одного отвечают ребра другого — ребру, соединяющему вершины  $C_1$  и  $C_2$  многогранника  $P$ , отвечает ребро, по которому смежны грани многогранника  $P'$ , отвечающие вершинам  $C_1$  и  $C_2$ .

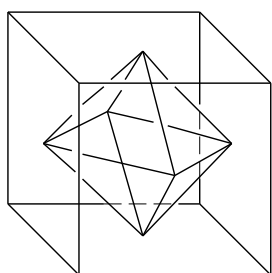


Рис. 31

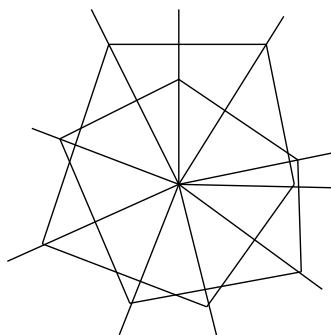


Рис. 32

Находящиеся в таком соответствии многогранники называются *полярными* друг другу. Простейший пример представляют куб и октаэдр с вершинами в центрах граней куба (рис. 31). Вообще, всякому многограннику  $P$ , описанному около шара, отвечает в качестве полярного многогранник  $P_1$ , вписанный в шар, с вершинами в точках касания шара с гранями многогранника  $P$ .

Аналогично определяются полярные многоугольники: вершины одного лежат на лучах, перпендикулярных к сторонам другого, и обратно (рис. 32).

Построение многогранника, полярного данному, осуществляется путем полярного преобразования, состоящего в сопоставлении точкам плоскостей, и обратно. Именно, каждой точке  $C$  ставится в соответствие плоскость, перпендикулярная к лучу  $\vec{OC}$  и удаленная от  $O$  на расстояние, обратно пропорциональное расстоянию  $OC$ . Если  $\mathbf{c}$  — вектор, идущий из начала  $O$  в точку  $C$ , то уравнение соответствующей плоскости будет  $\mathbf{c}\mathbf{x} = 1$  (или  $\mathbf{c}\mathbf{x} = r$ , где  $r$  — радиус шара с центром  $O$ , относительно которого осуществляется полярное преобразование). По этому правилу каждой вершине  $C_1$  данного многогранника с точкой  $O$  внутри сопоставляется плоскость грани другого многогранника.

Если точка  $B$  движется по плоскости  $\mathbf{c}\mathbf{x} = 1$ , соответствующей точке  $C$ , то неизменно  $\mathbf{c}\mathbf{b} = 1$ . Это означает, что плоскости  $\mathbf{b}\mathbf{x} = 1$ , соответствующие точкам  $B$ , проходят через точку  $C$ . Поэтому плоскости  $\mathbf{c}\mathbf{x} = 1$  как геометрическому месту точек соответствует точка  $C$  как центр связки плоскостей, отвечающих точкам плоскости  $\mathbf{c}\mathbf{x} = 1$ . Иными словами, инцидентность точки и плоскости сохраняется, и только плоскости и точки меняются ролями<sup>17)</sup>.

Совершенно аналогично определяется полярное соответствие на плоскости между точками и прямыми.

Мы сначала рассмотрим полярное соответствие на плоскости и выясним его свойства, а потом по аналогии рассмотрим полярность в пространстве.

<sup>17)</sup> Рассматриваемое полярное соответствие есть частный случай полярности относительно любой поверхности второго порядка. Такие общие полярности рассматриваются в проективной геометрии. В нашем случае речь идет о полярности относительно единичного шара.

Пусть  $Q$  — конечный выпуклый многоугольник, лежащий в некоторой плоскости  $R$ . Возьмем внутри него точку  $O$  и восстановим из нее перпендикуляр  $OO'$  к плоскости  $R$  длиной, равной единице. Проведя из  $O'$  полупрямые во все точки многоугольника  $Q$ , получим выпуклый многогранный угол  $V$  (рис. 33).

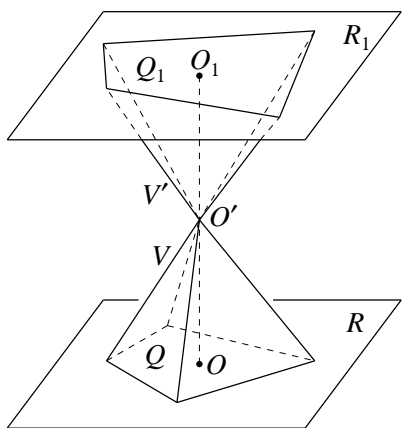


Рис. 33

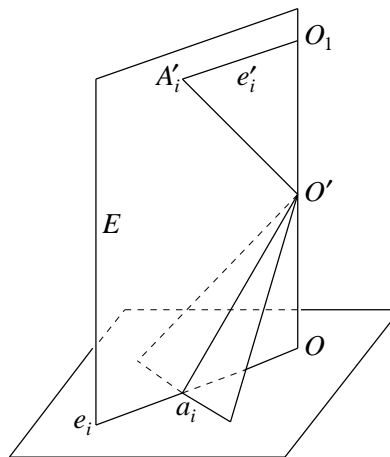


Рис. 34

Построим многогранный угол  $V_1$ , образованный нормальными к опорным плоскостям угла  $V$ , и пересечем его плоскостью  $R_1$ , параллельной  $R$ . В сечении получим выпуклый многоугольник  $Q_1$ , вершины которого получаются в пересечении ребер угла  $V'$  с плоскостью  $R_1$ .

Легко видеть, что продолжение перпендикуляра  $OO'$  пересекает плоскость  $R_1$  в точке  $O_1$ , лежащей внутри многоугольника  $Q_1$  (потому что плоскость, перпендикулярная к  $OO_1$  в точке  $O'$ , будет опорной к углу  $V'$ , касаясь его только в вершине  $O'$ ).

Пусть  $a_i$  — сторона многоугольника  $Q$  и  $e_i$  — луч, идущий из  $O$  перпендикулярно к содержащей ее прямой (рис. 34). Плоскость  $E$ , проходящая через точку  $O'$  и луч  $e_i$ , будет перпендикулярной к плоскости той грани угла  $V$ , которая соответствует стороне  $a_i$ . Но грани угла  $V$  отвечает перпендикулярное ребро угла  $V_1$ ; следовательно, оно будет лежать в плоскости  $E$ . Поэтому соответствующая вершина  $A'_i$  многоугольника  $Q_1$  будет лежать на идущем из точки  $O_1$  луче  $e'_i$ , параллельном  $e_i$  (поскольку плоскость  $E$  пересекает плоскости  $R$  и  $R_1$  по параллельным прямым).

Если спроектировать многоугольник  $Q_1$  на плоскость  $R$  многоугольника  $Q$ , то из сказанного ясно, что получится многоугольник  $Q'$ , вершины которого лежат на лучах, перпендикулярных к сторонам многоугольника  $Q$ .

Но, как было отмечено в конце предыдущего п<sup>о</sup> 3, отношение между многогранными углами  $V$  и  $V'$  взаимно. Следовательно, отношение между многоугольниками  $Q$  и  $Q_1$ , а значит, также  $Q$  и  $Q'$  тоже взаимно. Поэтому как вершины многоугольника  $Q'$  лежат на лучах, идущих из  $O$  перпендикулярно к сторонам многоугольника  $Q$ , так и вершины многоугольника  $Q$  лежат на лучах, идущих из  $O$  перпендикулярно к сторонам многоугольника  $Q'$ . Таким образом, эти многоугольники и будут полярными друг для друга.

Если луч  $OX_1$  идет через внутреннюю точку  $X_1$  многоугольника  $Q_1$ , т. е. внутрь угла  $V'$ , то перпендикулярная к нему плоскость будет опорной к углу  $V$ . Поэтому она пересекает плоскость  $R$  по такой прямой  $x$ , что многоугольник  $Q$  лежит по одну сторону от нее. Если точка  $X_1$  лежит на краю многоугольника  $Q_1$ , то соответствующая прямая  $x$  будет опорной к многоугольнику  $Q$ . Таким образом, точкам многоугольника  $Q_1$ , а значит, и  $Q'$  сопоставляются прямые, не пересекающие  $Q$ , а точкам границы многоугольника  $Q'$  — опорные прямые многоугольника  $Q$ .

Примем точку  $O'$  за начало координат в пространстве, а точку  $O$  — за начало координат в плоскости  $R$ . Оси  $x_1, x_2$  направим параллельно плоскости  $R$ , а ось  $x_3$  — по  $O'O$ . Положение точки  $X$  определяется в пространстве вектором  $(x_1, x_2, x_3)$ , а на плоскости  $R$  — вектором  $(x_1, x_2)$ .

Уравнение плоскости, проходящей через  $O'$  перпендикулярно к лучу  $O'C$ , будет

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0, \quad (1)$$

где  $c_1, c_2, c_3$  — координаты точки  $C$  (скалярное произведение вектора  $(c_1, c_2, c_3)$  точки  $C$  и вектора  $(x_1, x_2, x_3)$  точки на плоскости равно нулю).

Если точка  $C$  лежит в плоскости  $R$ , то  $c_3 = 1$ . Если же на построенной плоскости взять точки ее пересечения с плоскостью  $R'$ , на которой  $x_3 = -1$ , то вместо (1) получим

$$c_1x_1 + c_2x_2 = 1. \quad (2)$$

Это есть не что иное, как уравнение прямой  $s$ , которая сопоставляется точке  $C$ , потому что мы как раз сопоставляем каждой точке  $C$  прямую пересечения плоскости  $R'$  с плоскостью, перпендикулярной к лучу  $O'C$ , или проекцию этой прямой на плоскость  $R$ .

Следовательно, аналитически наше построение сводится к тому, что каждой точке  $C(c_1, c_2)$  плоскости  $R$  мы сопоставляем прямую с уравнением (2). По взаимности верно также обратное. Заметим, что когда точка  $C$  пробегает прямую  $c'$ , соответствующие ей прямые вращаются вокруг точки  $C'$ , которой отвечает прямая  $c'$ . Действительно, движению точки  $C$  по прямой  $c'$  соответствует вращение луча  $O'C$  в плоскости  $(O', c')$ , а тогда перпендикулярные к нему плоскости неизменно проходят через луч  $O'C'$ , перпендикулярный к плоскости  $(O', c')$ . Но это означает, что прямые, соответствующие точке  $C$ , проходят через точку  $C'$ .

Это соответствие прямых и точек и называется полярностью (относительно единичной окружности с центром  $O$ ).

Полярное соответствие в пространстве определяется совершенно аналогично: точке с координатами  $c_1, c_2, c_3$  сопоставляется плоскость с уравнением  $c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 1$ , т. е. концу отложенного из начала  $O$  вектора  $C$  сопоставляется плоскость  $c\mathbf{x} = 1$ . Она перпендикулярна к  $c$ , и расстояние ее от начала равно обратной величине длины вектора  $c$ .

Для построения этого соответствия можно воспользоваться аналогичным приемом. Представим себе пространство как трехмерную плоскость  $R$  в четырехмерном пространстве. Из начала  $O$ , лежащего в  $R$ , проведем перпендикуляр  $OO'$  к плоскости  $R$  длиной единица и ось  $X_4$  направим из  $O'$  к  $O$ . По другую сторону от  $O'$  проведем трехмерную плоскость  $R_1$ , параллельную  $R$ , на расстоянии, равном единице, от точки  $O'$ . Каждой точке  $C$  на «плоскости»  $R$  соответствует луч  $O'C$ , а этому лучу отвечает проходящая через  $O'$  перпендикулярная к нему трехмерная плоскость. Пересечение ее с «плоскостью»  $R_1$  дает двумерную плоскость, проекция которой на  $R$  и будет плоскостью, соответствующей точке  $C$ .

Если  $P$  — выпуклый многогранник (в «плоскости»  $R$ ), содержащий внутри точку  $O$ , то лучи, проходящие через его точки из точки  $O'$ , заполняют многогранный четырехмерный угол  $V$ . Нормали к его опорным плоскостям заполняют угол  $V'$ , пересечение которого

«плоскостью»  $R_1$  даст многогранник  $P'$ , полярный  $P$ , стоит лишь спроектировать его на «плоскость»  $R$ .

Отношения между многогранниками  $P$  и  $P'$  аналогичны отношениям между полярными многоугольниками  $Q$  и  $Q'$ . Вершине  $C$  одного отвечает плоскость грани другого, перпендикулярная к лучу  $OC$ , и обратно. Ребру  $C_1C_2$ , соединяющему вершины  $C_1$  и  $C_2$ , отвечает перпендикулярное ребро, по которому смежны грани, соответствующие этим вершинам. Все это непосредственно усматривается из взаимных отношений элементов многогранных (четырёхмерных) углов  $V$  и  $V'$ . Трёхмерным граням, двумерным граням и ребрам одного отвечают перпендикулярные к ним ребра, двумерные грани и трёхмерные грани другого. Поэтому в сечениях плоскостями  $R$  и  $R_1$  получаем аналогичное соответствие граней, ребер и вершин многогранника  $P$  вершинам, ребрам и граням многогранника  $P'$ .

Многогранник  $P$ , определенный своими вершинами как их выпуклая оболочка, ставится в соответствие многограннику  $P'$ , определенному как пересечение полупространств, ограниченных плоскостями его граней.

**Задача.** Пусть  $P$  — замкнутый выпуклый многогранник,  $O$  — точка внутри него и  $S$  — единичная сфера с центром  $O$ . Многогранник  $P$  определяет два разбиения сферы  $S$  на выпуклые сферические многоугольники. Одно разбиение — на многоугольники, являющиеся сферическими изображениями вершин многогранника. Другое — на многоугольники, являющиеся проекциями граней многогранника на сферу  $S$  при проектировании лучами из центра  $O$ . Убедиться, что многогранник, полярный многограннику  $P$  (относительно точки  $O$ ), определяет эти же разбиения, но с переменной их ролями.

Сначала можно убедиться, что для полярных многоугольников верно совершенно аналогичное утверждение. Только здесь речь идет о разбиениях единичной окружности на дуги.

## § 6. РАЗВЕРТКА

**1. Развертка.** Речь идет об обыкновенном склеивании многогранника из нарезанных из бумаги многоугольников. Совокупность многоугольников с указанием правила склеивания их по сторонам и есть развертка. Правило склеивания содержит указание, какая сторона одного многоугольника склеивается с какой стороной другого или того же самого многоугольника и в каком направлении. Указание направления необходимо, потому что два равных отрезка  $AB$  и  $CD$  можно накладывать друг на друга двумя способами: или так, что совпадают концы  $A$  с  $C$  и  $B$  с  $D$ , или так, что совпадают концы  $A$  с  $D$  и  $B$  с  $C$ . Склеивание друг с другом сторон одного и того же многоугольника мы называем «самосклеиванием». Оно имеет место, например, в известной крестообразной развертке куба (рис. 35).

Так как многоугольник, ограниченный несколькими ломаными, можно разбить на простые многоугольники, т. е. ограниченные каждый одной ломаной без кратных точек, то можно рассматривать развертки, состоящие только из таких простых многоугольников. Простой многоугольник может быть конечным или бесконечным; в последнем случае он имеет конечное число конечных сторон и две бесконечные стороны.



Любую точку внутри стороны многоугольника можно условно считать вершиной, разбив тем самым сторону на две стороны (как, например, в развертке куба, рис. 35). Поэтому не будет ограничением считать, что склеивание происходит всегда по целым сторонам.

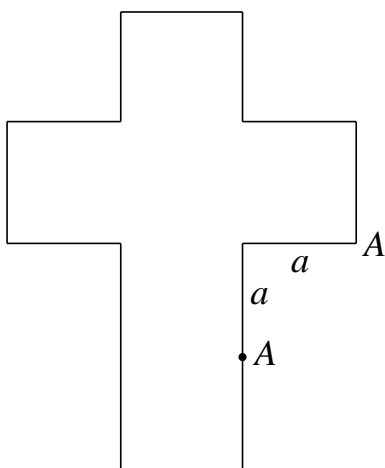


Рис. 35

Говоря теперь точно, *разверткой* мы называем совокупность конечного числа простых, конечных или бесконечных, многоугольников с указанным правилом «склеивания» их по сторонам. Под склеиванием понимается отождествление; т. е. при склеивании двух отрезков между их точками устанавливается взаимно однозначное соответствие и соответственные точки отождествляются, считаясь уже за одну точку развертки. Правило склеивания означает просто задание таких соответствий между точками сторон. При этом, конечно, подразумевается условие: если точка  $A$  отождествлена с  $B$ , а  $B$  с  $C$ , то  $A$  отождествлена с  $C$ <sup>18)</sup>.

Мы будем неизменно предполагать, что правило склеивания удовлетворяет следующим условиям:

1) Любые отождествляемые при склеивании отрезки сторон всегда имеют равные длины. (Иными словами, соответствие между отождествленными точками склеиваемых сторон сохраняет длины.)

2) От каждого многоугольника к другому можно перейти, идя по многоугольникам, имеющим склеенные стороны.

Это условие означает, что развертка не распадается на совершенно не связанные друг с другом части.

3) Каждая сторона каждого многоугольника либо не склеивается ни с какой стороной, либо склеивается только с одной стороной.

Это условие означает, что при склеивании не должен получаться ветвящийся многогранник.

Стороны, не склеиваемые ни с какими другими, образуют «границу» развертки. Если таких сторон нет, то мы говорим, что развертка не имеет границы.

<sup>18)</sup> Например, если сторона  $A_1B_1$  многоугольника  $Q_1$  склеена со стороной  $A_2B_2$  многоугольника  $Q_2$  (конец  $A_1$  с концом  $A_2$ ), а сторона  $A_2C_2$  многоугольника  $Q_2$  склеена со стороной  $A_3C_3$  многоугольника  $Q_3$  (конец  $A_2$  с концом  $A_3$ ), то вершины  $A_1, A_2, A_3$  считаются за одну точку развертки.

Стороны и вершины многоугольников развертки мы называем ребрами и вершинами развертки, считая при этом отождествленные стороны и вершины соответственно за одно ребро и одну вершину развертки.

Многогранник есть не более как частный случай развертки: он составлен из многоугольников — граней, и отождествления, мыслимые в развертке, вообще говоря, только абстрактно, в нем реализованы. Поэтому, рассматривая развертки, мы рассматриваем тем самым и многогранники. Но, конечно, глядя на многогранник как на развертку, мы вовсе пренебрегаем его пространственной формой. Нас не будет также интересовать строение многогранника или развертки. Мы фиксируем свое внимание на том, что есть общего у всех разверток одного многогранника и вообще у всех разверток, которые могут быть получены друг из друга путем операций разрезывания и склеивания. Это общее — их «внутренняя метрика». Мы дадим сейчас ее точное определение.

**2. Внутренняя метрика.** Пусть  $X, Y$  — две точки развертки  $R$ . Их можно соединять в  $R$  ломаными, переходя с одного многоугольника на другой через отождествленные точки их границ<sup>19)</sup>. Точная нижняя граница длин таких ломаных называется *расстоянием* между точками  $X, Y$  в развертке  $R$  и обозначается  $\rho_R(X, Y)$ .

*Это расстояние, рассматриваемое как функция пары точек  $X, Y$ , и есть метрика развертки  $R$ .*

Если между точками разверток  $R$  и  $R'$  установлено соответствие, при котором расстояния между парами соответственных точек равны

$$\rho_R(X, Y) = \rho_{R'}(X', Y'),$$

то такое соответствие называется *изометрическим*, а развертки называются *изометричными*. (Отождествляемые в развертке точки считаются, конечно, за одну.)

Будем говорить, что развертка  $R'$  получается из развертки  $R$  путем разрезывания и склеивания, если можно разрезать многоугольники развертки  $R$  на частичные многоугольники и так их склеить по сторонам, что получится развертка, совершенно одинаковая с  $R'$ , т. е. составленная из таких же многоугольников с таким же правилом склеивания (причем правило склеивания в этой развертке определяется естественным образом: склеиванию подлежат или стороны, подлежавшие склеиванию в  $R$ , или стороны разрезов).

<sup>19)</sup> Возможность перейти таким путем от одного многоугольника к любому другому и, следовательно, соединить любые две точки  $X, Y$  из  $R$  предусмотрена в самом определении развертки — условие 2.

Развертки, получаемые друг из друга разрезываниями и склеиваниями, изометричны, потому что эти операции по существу не меняют ломаных, проводимых в развертке, а только соединяют отождествленные точки или разъединяют точки разреза, превращая одну точку в две, подлежащие отождествлению.

Можно доказать обратное утверждение:

*Изометричные развертки получаются друг из друга путем разрезывания и склеивания.*

Так как в общем виде это утверждение нам не будет нужно, мы оставляем его без доказательства, провести которое не представляет, впрочем, большого труда.

Все те факты, которые зависят только от внутренней метрики развертки и, в частности, многогранника, образуют ее *внутреннюю геометрию*. Изометричные развертки имеют одну и ту же внутреннюю геометрию, так же как, в частности, развертка и склеенный из нее многогранник.

К понятиям внутренней геометрии, помимо самого расстояния, или метрики  $\rho_k$ , относятся длины, углы, площади.

Длина ломаной в развертке есть сумма длин ее звеньев. Каждый же достаточно малый отрезок  $XU$  в развертке является кратчайшей линией между его концами и имеет поэтому длину, равную расстоянию  $\rho_k(X, Y)$ . Следовательно, длина определяется через метрику.

Так как углы плоского треугольника определяются длинами сторон, то углы также могут быть определены через метрику и сохраняются при изометрическом отображении. Аналогичное замечание справедливо для площади.

Многогранник, как мы уже упоминали, есть не что иное, как развертка, в которой склеивания, обычно только указываемые в развертке, осуществлены в действительности. Поэтому к многогранникам применимо то же понятие о их внутренней геометрии, которая определяется расстояниями, измеренными на самом многограннике. Если между точками двух многогранников установлено соответствие, при котором эти расстояния между парами соответственных точек равны, то это соответствие называется *изометрическим*, а сами многогранники, допускающие такое соответствие, — *изометричными*. У изометричных многогранников внутренняя геометрия одна и та же. Примером могут служить боковые поверхности призм с равными периметрами основания и равными длинами боковых ребер.

Роль прямолинейных отрезков во внутренней геометрии играют кратчайшие линии, соединяющие две данные точки многогранника или развертки и проходящие на многограннике или, соответственно, в развертке. Такие линии мы называем коротко *кратчайшими*. Кратчайшая, соединяющая две точки на одной грани, представляет собой прямолинейный отрезок, а со-

единяющая точки на разных гранях представляет собой ломаную из отрезков на нескольких гранях. Примеры кратчайших на кубе даны на рис. 36. Свойства кратчайших в развертках будут рассмотрены дальше, в § 8.

**3. Склеивание многогранника.** Мы говорим, что *многогранник  $P$  склеен из развертки  $R$* , если склеивания (отождествления), только указанные в развертке, действительно осуществлены на многограннике. Говоря точно, это означает, что многогранник допускает такое разбиение  $R'$  на куски — «многоугольники»  $Q'$  (быть может, «переломленные»), ограниченные линиями — «ребрами», сходящимися в «вершинах» разбиения  $R'$ , что выполнены два условия:

1) Развертка  $R$  и разбиение  $R'$  имеют одинаковое строение, т. е. каждому многоугольнику, ребру или вершине развертки  $R$  отвечает «многоугольник», «ребро» или «вершина» разбиения  $R'$  так, что при этом соответствии сохраняется отношение принадлежности (ребра — многоугольнику, вершины — ребру).

2) Если «многоугольник»  $Q'$  из  $R'$  соответствует многоугольнику  $Q$  из  $R$ , то  $Q'$  можно развернуть на плоскость так, что он совпадет с  $Q$ , причем его ребра и вершины совпадут с соответственными ребрами и вершинами многоугольника  $Q$ . Наглядно понятая операция разворачивания на плоскость означает изометрическое отображение, т. е. такое сопоставление точек многоугольника  $Q'$  точкам плоского многоугольника, при котором длины кривых остаются неизменными<sup>20)</sup>.

Так как многоугольники разбиения  $R'$  и развертки  $R$  соответственно изометричны и прилегают по соответственным ребрам и вершинам, то длины любых ломаных в  $R$  и  $R'$  оказываются соответственно равными. Это означает, что многогранник  $P$  изометричен развертке  $R$ . Поэтому многогранники, допускающие одинаковые развертки, или, что то же, склеенные из одинаковых разверток, будут изометричными друг другу. Вообще, склеивание многогранника из развертки можно было бы коротко определить как изометрическое отображение развертки на многогранник.

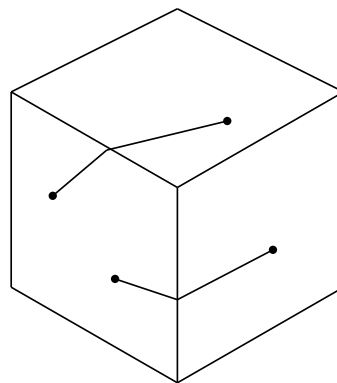


Рис. 36

<sup>20)</sup> Ту же операцию можно описать несколько иначе. Каждый «многоугольник»  $Q'$  состоит, вообще говоря, из нескольких многоугольных кусков граней многогранника  $P$ . Разворачивание на плоскость состоит в том, что эти куски раскладываются на плоскости и прикладываются друг к другу так же, как они прилегали на многограннике. Условие, что  $Q'$  можно развернуть на плоскость, означает, что такое прикладывание его кусков действительно можно осуществить на плоскости.

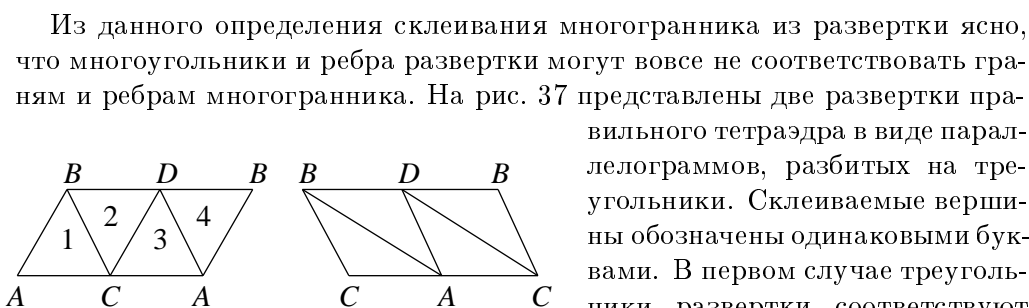


Рис. 37

Из данного определения склеивания многогранника из развертки ясно, что многоугольники и ребра развертки могут вовсе не соответствовать граням и ребрам многогранника. На рис. 37 представлены две развертки правильного тетраэдра в виде параллелограммов, разбитых на треугольники. Склеиваемые вершины обозначены одинаковыми буквами. В первом случае треугольники развертки соответствуют граням тетраэдра, а во втором — нет. Обе развертки имеют одинаковое строение<sup>21)</sup>. Вторая получается из первой, если приложить первый треугольник к четвертому и произвести разрезы треугольников 2, 3 по линии  $BA$ , а треугольников 4, 1 по линии  $DC$  и из получившихся кусков треугольников склеить новые треугольники. Применяя подобную операцию ко второй развертке и т. д., получим бесконечное число различных разверток правильного тетраэдра, которые, однако, все имеют одинаковое строение.

На рис. 38, *a* изображена развертка тетраэдра; стороны, помеченные одинаково, подлежат склеиванию; на рис. 38, *b* штрихами показано, по каким линиям пойдут ребра тетраэдра; на рис. 38, *в* изображен уже склеенный тетраэдр с указанием линий, по которым его нужно разрезать, чтобы обратно получить развертку рис. 38, *a*; кроме как по штриховым линиям, его нужно разрезать по ребрам, сходящимся в вершине  $A$ . Данная развертка любопытна в том отношении, что в ней имеют место довольно сложные «самосклеивания» треугольников.

Задача, которую мы будем решать, состоит в том, чтобы узнать, во-первых, в какой мере выпуклый многогранник определяется своей разверткой и, во-вторых, каковы те необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять заранее заданная развертка для того, чтобы из нее можно было склеить выпуклый многогранник.

Вспоминая изложенное в предисловии, можно считать, что первой задачей является доказать теоремы единственности выпуклого многогранника с данной разверткой. Эта задача решается в главе III и отчасти в § 2 главы V.

Одно из необходимых условий, которое нужно наложить на развертку, мы установим в следующем пункте, другие же будут выяснены в следующем параграфе. После этого встанет вопрос о доказательстве достаточности найденных условий, т. е. речь будет идти о доказательстве теорем существования выпуклого многогранника с данной разверткой. Решению

<sup>21)</sup> Развертки имеют одинаковое строение, если их многоугольники и ребра можно сопоставить так, что соответственные многоугольники склеиваются по соответственным ребрам.

этого вопроса посвящены глава IV и § 1 главы V. Формулировки основных результатов глав III—V даются в § 3 главы II.

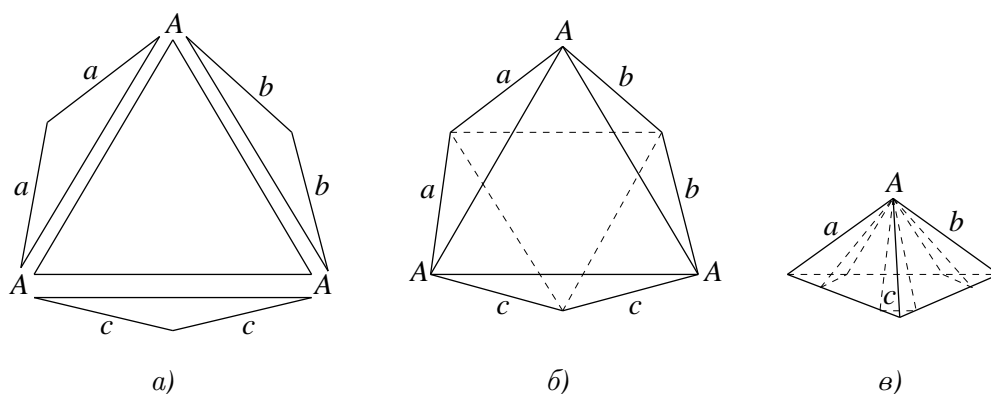


Рис. 38

**4. Кривизна.** *Полным углом* вокруг внутренней, т. е. не лежащей на границе, точки развертки мы называем сумму сходящихся в ней углов. Если эта точка лежит внутри ребра, по которому смежны две грани, то полный угол вокруг нее складывается из двух развернутых углов и потому равен  $2\pi$ . Полный угол вокруг точки, лежащей внутри многоугольника развертки, мы, естественно, полагаем равным  $2\pi$ . (Аналогично определяется полный угол при точке на границе развертки; он может не равняться  $\pi$ , только если точка является граничной вершиной.)

Если на многоугольниках, сходящихся в точке  $A$ , построить круговые секторы малого радиуса  $r$ , то в сумме они образуют окрестность точки  $A$ , и если полный угол вокруг точки  $A$  есть  $\theta$ , то длина окружности этой окрестности будет  $\theta r$  (рис. 39). Если  $\theta$  равно  $2\pi$ , то такая окрестность налагается на плоский круг, и потому точка с полным углом  $2\pi$  в смысле внутренней метрики ничем не отличается от точки внутри грани. Так будет заведомо для точек, лежащих внутри неграничных ребер. Точки, полный угол вокруг которых не равен  $2\pi$ , всегда должны быть вершинами развертки. Их можно назвать *истинными вершинами*.

Разность  $2\pi - \theta$ , где  $\theta$  — полный угол вокруг внутренней точки  $A$  развертки, мы называем *кривизной* точки  $A$ . Так как  $\theta$  может быть отлично от  $2\pi$  только в вершинах, то имеется лишь конечное число точек с кривизной, отличной от нуля. Поскольку углы определяются внутренней метрикой, кривизна также относится к понятиям внутренней геометрии.

Кривизной любой части развертки мы называем сумму кривизн заключающихся в ней истинных вершин.

Если кривизна во всех точках развертки  $\geq 0$ , то мы говорим о *развертке* или *многогранной метрике положительной кривизны*.

У выпуклого многогранного угла сумма плоских углов всегда меньше  $2\pi$ , так что кривизна его положительна. Поэтому выпуклый многогранник всегда имеет положительную кривизну. Таким образом, мы нашли одно условие, необходимое для того, чтобы из данной развертки можно было склеить выпуклый многогранник: суммы углов, сходящихся в каждой вершине развертки, не должны превосходить  $2\pi$ .

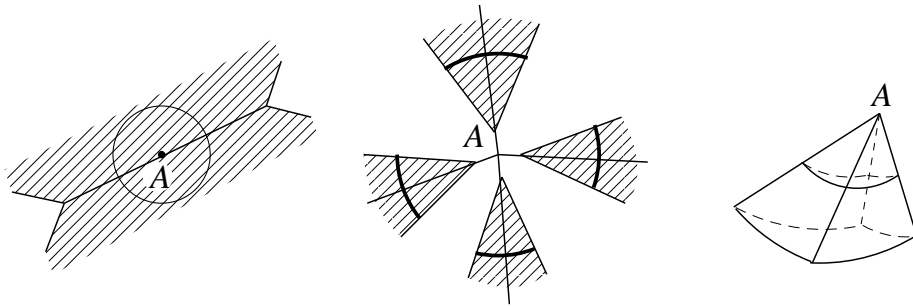


Рис. 39

(Так как выпуклый многогранник с границей есть часть полного выпуклого многогранника, то сумма углов, сходящихся в каждой его граничной вершине, а следовательно, и в каждой граничной вершине его развертки, также не должна превосходить  $2\pi$ .)

**5. Задачи.** 1. Доказать, что: а) кратчайшая на многограннике при переходе через ребро образует с ним равные (не смежные) углы; б) при последовательном разворачивании на плоскость тех граней, по которым проходит кратчайшая, она превращается в прямолинейный отрезок; в) кратчайшая на выпуклом многограннике не может проходить через вершину.

2. Рассмотреть кратчайшие на боковых поверхностях призмы и пирамид.

3. Указать примеры, когда две точки на многограннике соединяются не одной, а несколькими кратчайшими.

4. Указать примеры кратчайших на невыпуклом многограннике, проходящих через его вершины.

5. Какими свойствами характеризуется произвольная развертка боковой поверхности призмы (пирамиды), состоящая из одного многоугольника?

6. Доказать, что всякий замкнутый выпуклый многогранник допускает развертку, состоящую из одного звездчатого многоугольника, подобно естественной развертке пирамиды. («Острия» звезды должны сходиться в одной вершине.)

7. Доказать, что всякий данный (конечный) многогранник допускает не более чем конечное число разверток, вершины которых соответствуют только его вершинам, а ребра имеют длины не больше данной.

## § 7. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МНОГОГРАННИКОВ И РАЗВЕРТОК

1. Топология изучает свойства фигур, сохраняющиеся при любых взаимно однозначных и взаимно непрерывных преобразованиях. Если точки двух фигур могут быть поставлены во взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие<sup>22)</sup>, то фигуры называются *гомеоморфными*, а само соответствие называется *гомеоморфизмом* одной фигуры на другую. Очевидно, две фигуры, гомеоморфные одной и той же третьей, гомеоморфны друг другу: достаточно сопоставить те их точки, которые отвечают одной и той же точке третьей фигуры.

*Топологическим* называется такое свойство фигуры, которое сохраняется при любых ее гомеоморфных отображениях; это есть такое свойство, которое, принадлежа данной фигуре, принадлежит и всем гомеоморфным ей фигурам.

В этом параграфе мы установим основные топологические свойства выпуклых многогранников и их разверток.

**2. Теорема 1.** *Замкнутый выпуклый многогранник гомеоморфен сфере.*

Возьмем внутри замкнутого выпуклого многогранника  $P$  точку  $O$  и опишем вокруг нее сферу  $S$ . Проводя из  $O$  лучи во всех направлениях, сопоставим друг другу точки многогранника  $P$  и сферы  $S$ , лежащие на одних и тех же лучах. Каждый луч пересекает сферу и многогранник в одной точке, а потому установленное соответствие будет взаимно однозначным.

Оно будет также взаимно непрерывным. Действительно, при непрерывном движении точки на многограннике идущий в нее луч будет вращаться вокруг точки  $O$  непрерывно, а потому и соответствующая точка на сфере будет двигаться по ней непрерывно. Обратное, если точка сферы движется непрерывно, то идущий через нее луч также вращается непрерывно, а потому точка  $X$ , в которой он пересекает многогранник  $P$ , будет двигаться по нему непрерывно<sup>23)</sup>. Следовательно, как прямое соответствие точек многогранника точкам сферы, так и обратное соответствие непрерывны, что и означает взаимную непрерывность рассматриваемого соответствия.

Всякий конечный выпуклый многогранник с границей есть часть замкнутого, а потому, проектируя его таким же способом на сферу, убедимся, что

<sup>22)</sup> Соответствие  $\varphi$  между точками  $X$  одной фигуры и соответствующими точками  $Y = \varphi(X)$  другой называется взаимно однозначным, если каждой точке  $X$  отвечает только одна точка  $Y$ , и обратно. Соответствие  $\varphi$  непрерывно, если из того, что точки  $X_n$  сходятся к  $X$ , следует, что точки  $Y_n = \varphi(X_n)$  сходятся к  $Y = \varphi(X)$ . Оно взаимно непрерывно, если то же верно для обратного соответствия  $\varphi^{-1}$  точек  $X$  точкам  $Y$ .

<sup>23)</sup> Это совершенно очевидно, если точка  $X$  движется по одной грани, а при переходе через ребра и вершины непрерывность не нарушается, поскольку всякий луч, близкий к лучу, пересекающему многогранник в точке  $A$  на ребре или в вершине  $A$ , сам пересекает многогранник в точке  $X$ , близкой к точке  $A$ .



он гомеоморфен некоторому сферическому многоугольнику. Если граница многогранника состоит из единственной замкнутой ломаной, то этот многоугольник будет тоже ограничен одной замкнутой сферической ломаной. Такой многоугольник гомеоморфен кругу. (Это утверждение мы оставляем без доказательства, считая его непосредственно очевидным. Строгое доказательство по идее не представляет труда, но несколько кропотливо.)

Если граница многогранника состоит из нескольких замкнутых ломаных, то так же устроен соответствующий сферический многоугольник. Он гомеоморфен кругу с соответствующим числом круглых дыр. (Это утверждение мы не доказываем, поскольку оно не будет использовано.)

**3. Теорема 2.** *Бесконечный выпуклый многогранник, предельный угол которого не вырождается ни в плоский угол, ни в полупрямую, можно спроектировать на плоскость так, что каждой точке плоскости будет отвечать одна и только одна точка многогранника. Тем самым такой многогранник гомеоморфен плоскости.*

**Доказательство.** Пусть предельный угол  $V$  бесконечного многогранника не вырождается. Тогда внутри него можно провести полупрямую  $a$ . Если точка  $A$  лежит на многограннике, то ее можно принять за вершину угла  $V$ , и тогда весь угол  $V$  лежит в многограннике (см. теорему 1 § 4). Поэтому полупрямая, идущая из точки  $A$  в направлении  $a$ , содержится внутри многогранника.

Отсюда следует, что всякая прямая  $b$ , параллельная  $a$ , может пересекать многогранник только в одной точке (потому что начинающаяся от точки пересечения полупрямая, идущая в направлении  $a$ , уже оказывается вся внутри многогранника).

Докажем, что вместе с тем всякая прямая, параллельная  $a$ , пересекает многогранник. Допустим противное и пусть прямая  $b$ , параллельная  $a$ , многогранник не пересекает. Внутри него она не может лежать, так как многогранник не содержит никакой прямой. Следовательно, она лежит вне многогранника.

Пересечем многогранник плоскостью, проходящей через какую-либо его внутреннюю точку и прямую  $b$ . В сечении получим выпуклый многоугольник, лежащий по одну сторону от прямой  $b$ . Непосредственно очевидно, что такой многоугольник имеет опорную прямую  $b'$ , параллельную  $b$  (рис. 40). Но часть этой прямой, идущая от точки касания  $A$  в направлении полупрямой  $a$ , по доказанному должна лежать внутри многогранника и, следовательно, не может быть частью опорной прямой  $b'$ . Полученное противоречие показывает, что всякая прямая  $b$ , параллельная  $a$ , должна пересекать многогранник.

Итак, всякая такая прямая пересекает многогранник и притом только в одной точке. Поэтому, проектируя многогранник на плоскость такими

прямыми, получим проекцию, существование которой утверждает теорема, что и требовалось доказать.

Многогранник с предельным углом, вырождающимся в плоский угол или в полупрямую, не может быть спроектирован на всю плоскость и никакая его проекция не однозначна (т. е. в некоторые точки плоскости проектируется несколько или даже бесконечно много точек многогранника). Если направление проектирования параллельно полупрямой, идущей в предельном угле, то некоторые проектирующие прямые будут скользить по бесконечным граням, другие же вовсе не будут пересекать многогранник.

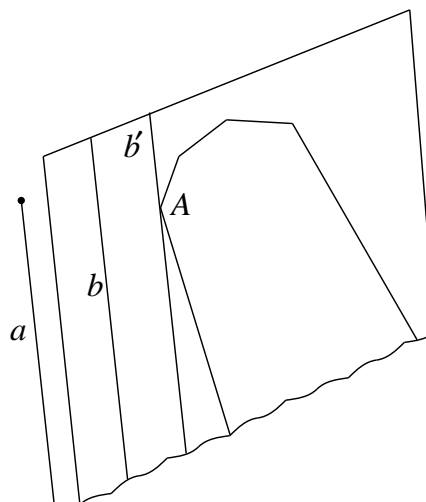


Рис. 40

Нетрудно убедиться, что в случае плоского предельного угла  $V$  многогранник можно спроектировать в полосу между парой параллельных прямых; эти прямые будут проекциями бесконечных граней, параллельных плоскости угла  $V$ . В случае же вырождения угла  $V$  в полупрямую  $a$  проекция вдаль нее представляет выпуклый многоугольник, стороны которого будут проекциями бесконечных граней.

Во всяком случае, проектирование не дает здесь взаимно однозначного отображения на всю плоскость, и потому необходимо другое построение.

Рассмотрим многогранник  $P$ , предельный угол которого сводится к полупрямой. Все его бесконечные ребра параллельны. Пересекая их перпендикулярной плоскостью, отсечем от  $P$  бесконечную в одну сторону призму  $P'$  (к которой мы присоединим ее основание). Возьмем внутри этой призмы точку  $O$ . Всякий луч, идущий из  $O$  и пересекающий  $P'$ , пересечет  $P$ , и обратно (рис. 41). В результате, сопоставляя точки на одних и тех же лучах, получим взаимно однозначное и взаимно непрерывное соответствие точек на  $P$  и  $P'$  (точки, общие у  $P$  и  $P'$ , соответствуют сами себе).

Но призму  $P'$ , очевидно, можно отобразить на плоскость взаимно однозначно и взаимно непрерывно. Достаточно наложить ее боковые грани на плоскость основания и растянуть их так, чтобы они покрыли всю плоскость (рис. 42).

Этим доказано, что многогранник  $P$  гомеоморфен плоскости.

Рассмотрим теперь многогранник  $P$ , предельный угол которого плоский, но не сводится к полупрямой. У такого многогранника имеются две бесконечные грани, параллельные плоскости угла  $V$ , с бесконечными ребрами,

параллельными ребрам угла  $V$ ; у всех других его бесконечных граней ребра попарно параллельны. Пересечем многогранник  $P$  плоскостью, отсекающей все его конечные грани (рис. 43). В результате получим многогранник  $P'$  с одной конечной гранью, содержащийся в  $P$ , и с бесконечными гранями, налегающими на грани многогранника  $P$ .

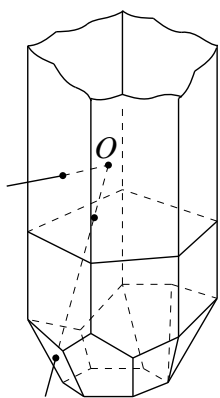


Рис. 41

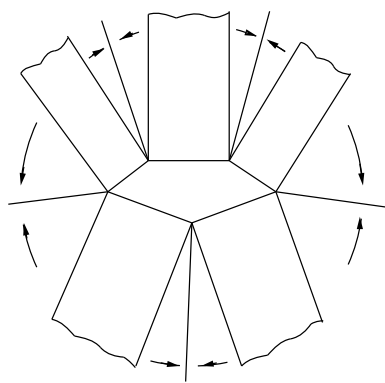


Рис. 42

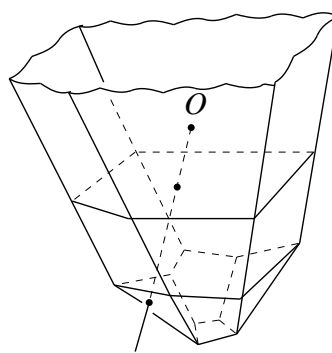


Рис. 43

Возьмем внутри  $P'$  точку  $O$ . Легко убедиться, что всякий луч, идущий из  $O$  и пересекающий один многогранник, пересекает и другой. Таким образом, многогранник  $P$  отображается на  $P'$  взаимно однозначно и взаимно непрерывно.

Далее, аналогично предыдущему, легко видеть, что многогранник  $P'$  можно взаимно однозначно и взаимно непрерывно отобразить на плоскость. Этим доказывается, что многогранник  $P$  также гомеоморфен плоскости. (Этот вывод применим ко всякому бесконечному многограннику.)

Наши выводы привели к следующей теореме:

**Теорема 3.** *Бесконечный выпуклый многогранник гомеоморфен плоскости.*

4. Операция склеивания многогранника из развертки представляет собой такое отображение развертки на многогранник, которое, как ясно из определения этого отображения (п° 3 § 6), взаимно однозначно и взаимно непрерывно при том неперемном условии, что точки развертки, отождествляемые в силу «закона склеивания», считаются за одну точку развертки. Поэтому развертка, из которой можно склеить данный многогранник, необходимо ему гомеоморфна.

Утверждая это, мы здесь и всюду дальше имеем в виду, что склеиваемые точки считаются за одну.

На основании этого замечания из теорем 1 и 3 следует

**Теорема 4.** *Развертка замкнутого выпуклого многогранника гомеоморфна сфере, развертка же бесконечного выпуклого многогранника гомеоморфна плоскости.*

(Можно также заключить, что развертка конечного многогранника с границей гомеоморфна сферическому многоугольнику, а развертка бесконечного многогранника с границей гомеоморфна бесконечному многоугольнику.)

Однако это условие, налагаемое на развертку, неудобно в том отношении, что заранее не видно простого способа проверить для данной развертки, гомеоморфна она сфере или нет. Поэтому мы заменим это условие другим, которое для любой развертки проверяется совсем просто. Условие это дается теоремой Эйлера, которую мы и докажем.

**5.** Будем называть *сетью* любую совокупность конечного числа простых (т. е. не имеющих самопересечений), незамкнутых ломаных, лежащих на многограннике и не имеющих общих точек, кроме концов. Каждую ломаную назовем «ребром» сети, концы ломаных назовем «вершинами» сети. Вообще говоря, такая сеть будет разбивать многогранник на некоторые области<sup>24)</sup>. Если она его вовсе не разбивает, то считаем, что имеется всего одна область. Простейший пример сети дает сеть ребер самого многогранника; областями здесь будут его грани.

В общем случае сеть может слагаться из нескольких частей, не имеющих попарно общих точек. Каждую такую часть, не распадающуюся далее, мы называем связной компонентой сети.

**Теорема 5.** (Обобщенная теорема Эйлера.) *Если дана сеть на замкнутом выпуклом многограннике и  $e$  — число ее вершин,  $k$  — число ребер,  $l$  — число связных компонент, а  $f$  — число областей, на которые сеть разбивает многогранник, то*

$$e - k + f = l + 1. \quad (1)$$

*В частности, если сеть связна (т. е. состоит из одной компоненты), то  $e - k + f = 2$ .*

Доказательство основано на следующей непосредственно очевидной теореме, известной под наименованием теоремы Жордана: *всякая замкнутая ломаная на замкнутом выпуклом многограннике разбивает его.* При всей очевидности этой теоремы строгое доказательство ее оказывается не слишком простым; оно будет дано дополнительно в последнем пункте настоящего

<sup>24)</sup> Одну область будут образовывать все точки, которые можно соединить друг с другой ломаными, не пересекая сети.

параграфа. А сейчас, приняв теорему Жордана на веру, докажем обобщенную теорему Эйлера.

Для «пустой сети», т. е. когда никакой сети на многограннике нет, теорема верна, потому что в этом случае  $e = k = l = 0$ , а область одна, так что  $f = 1$  и равенство (1) выполняется. Поэтому, если мы докажем, что, не меняя величины  $e - k + f - l$ , можно, устраняя ребра по одному, уничтожить всю сеть, то теорема будет доказана.

Рассмотрим следующие три операции устранения ребер сети.

1) Устраняется ребро с одним свободным концом. Тогда числа ребер  $k$  и вершин  $e$  уменьшаются на единицу, а число областей  $f$  и число компонент  $l$ , очевидно, не меняются. Поэтому величина  $e - k + f - l$  остается неизменной.

2) Устраняется ребро, являющееся общей границей (или частью границы) двух областей. Тогда эти области сливаются и число их  $f$  уменьшается на единицу. Число ребер  $k$  также уменьшается на единицу. Ребро, разделяющее области, не имеет свободных концов, а потому они остаются, так что число  $e$  не изменяется. Число компонент  $l$  также остается неизменным, потому что область ограничена замкнутой ломаной, которая при изъятии одного ребра не может распасться на несвязанные части.

Таким образом, величина  $e - k + f - l$  не меняется.

3) Устраняется ребро с двумя свободными концами. Такое ребро представляет само по себе связную компоненту сети, а потому число  $l$  уменьшается на единицу. Число ребер  $k$  также убывает на единицу. Число вершин  $e$  уменьшается на два, число же областей  $f$ , очевидно, не меняется. Поэтому величина  $e - k + f - l$  снова остается неизменной.

Пусть теперь нам дана любая сеть. Пользуясь первой и третьей операциями, устраняем все ребра со свободными концами. Если после этого еще остались ребра, то они образуют замкнутые ломаные и потому (в силу теоремы Жордана!) разбивают многогранник на области. В таком случае применима вторая операция, которая рано или поздно приводит, очевидно, к появлению свободных концов. Тогда опять устраняем ребра со свободными концами и т. д. до тех пор, пока не уничтожим всю сеть. При всех операциях число  $e - k + f - l$  не меняется, а в отсутствии сети оно равно 1. Поэтому и для исходной сети  $e - k + f - l = 1$ , что и требовалось доказать.

Пусть теперь  $R$  — развертка, из которой можно склеить замкнутый выпуклый многогранник  $P$ . Согласно определению, это означает, что многогранник  $P$  можно разбить на области, соответствующие многоугольникам развертки так, что общие отрезки границ областей отвечают склеиваемым сторонам соответствующих многоугольников. Эти отрезки границ представляют ломаные, образующие сеть на многограннике  $P$ . Числа вершин  $e$ , ребер  $k$  и областей  $f$  этой сети равны соответственно числам вершин, ребер

и многоугольников развертки (при том принятом нами условии, что склеиваемые стороны и вершины считаются за одно ребро и за одну вершину).

Мы условились также предполагать, что развертка состоит из простых многоугольников (т. е. многоугольников, ограниченных каждой одной замкнутой ломаной). Докажем, что в силу этого условия сеть будет связной. Пусть  $A$  и  $B$  — какие-либо вершины развертки (соответственно сети). Если они принадлежат одному многоугольнику, то соединяются ломаной, потому что он простой. Если же они принадлежат разным многоугольникам  $Q$  и  $R$ , то от  $Q$  к  $R$  можно перейти, идя по многоугольникам с общими вершинами или сторонами. Поэтому, идя по границам этих многоугольников, мы соединим вершины  $A$  и  $B$  цепью ребер. А раз любые две вершины соединяются цепью ребер, то сеть связна.

Итак, число компонент нашей сети  $l = 1$ , а потому в силу теоремы Эйлера  $e - k + f = 2$ .

Эти рассуждения привели к следующей теореме:

**Теорема 6.** *Если из развертки можно склеить замкнутый выпуклый многогранник, то число  $f$  ее многоугольников, число  $k$  ребер и число  $e$  вершин необходимо связаны соотношением Эйлера  $e - k + f = 2$ .*

Обобщенная теорема Эйлера имеет топологический характер; при топологическом преобразовании ломаные, образующие сеть, могут стать кривыми, но ни число их, ни число вершин, ни число областей не изменятся. Поэтому то же соотношение между ними имеет место для сетей на всякой поверхности, гомеоморфной замкнутому выпуклому многограннику, и тем самым на всякой поверхности, гомеоморфной сфере. В связи с этим и теореме 6 можно придать топологический вид: *для всякой развертки, гомеоморфной сфере,  $e - k + f = 2$ . При этом сами многоугольники развертки можно подвергать любым топологическим преобразованиям, так что их можно мыслить как «кривые многоугольники».*

**6<sup>25)</sup>. Теорема 7.** (Обратная теорема Эйлера.) *Если развертка без границы, составленная из конечных многоугольников, удовлетворяет условию Эйлера  $e - k + f = 2$ , то она гомеоморфна сфере.*

В доказательстве мы будем допускать топологические преобразования многоугольников, так что ничто, кроме числа их сторон и правила склеивания, не будет играть роли.

Если развертка состоит более чем из одного многоугольника, то, «приклеивая» к одному из них другой, к ним третий и т. д., получим развертку, состоящую из одного многоугольника. При этом склеивание производим каждый раз по одной паре сторон, подлежащих склеиванию, как указано в развертке. Поэтому при каждом склеивании число многоугольников и

<sup>25)</sup> Все дальнейшие выводы пп. 6–8 имеют значение только для гл. IV.

число ребер уменьшаются на 1, а число вершин остается прежним, так что величина  $e - k + f$  не меняется и остается равной 2. В полученной развертке  $f = 1$  и потому  $e = k + 1$ .

Единственный многоугольник полученной развертки имеет  $2k$  сторон, потому что стороны склеиваются попарно и каждая пара их дает одно ребро. Число же вершин многоугольника — такое же, как число сторон, т. е. тоже  $2k$ . (Не путать вершины многоугольника с вершинами развертки! Подлежащие склеиванию вершины многоугольника считаются за одну вершину развертки.)

Покажем, что у нашего многоугольника имеется пара подлежащих склеиванию сторон  $a, b$  с общим концом, причем при склеивании  $a$  с  $b$  этот общий конец соответствует сам себе и дает только одну вершину развертки. (Если отметить на этих сторонах направления, совпадающие при склеивании, то они будут противоположными, рис. 44.)

Действительно, если бы такой пары склеиваемых сторон не было, то у каждой пары склеиваемых сторон никакой конец не соответствовал бы сам себе (эти стороны либо несоседние, либо соседние, но одинаково направлены, как на рис. 45<sup>26)</sup>). Поэтому все концы сторон, т. е. все  $2k$  вершин многоугольника, склеивались бы по крайней мере попарно, давая тем самым не более чем  $k$  вершин развертки. Следовательно, число вершин развертки  $e \leq k$ . Между тем мы имеем  $e = k + 1$ . Поэтому должна иметься пара соседних склеиваемых и противоположно направленных сторон.

Осуществим склеивание двух таких сторон  $a, b$  (это возможно, так как мы допускаем любые топологические деформации многоугольников). Получим новый многоугольник с меньшим числом сторон. Для этого многоугольника, очевидно, снова  $e' = k' + 1$  и к нему приложимы те же рассуждения. Повторяя эту операцию, мы придем, наконец, к «многоугольнику», имеющему только две стороны  $a, b$  (рис. 46). Непосредственно очевидно, что склеивание этих сторон превращает такой многоугольник в поверхность, гомеоморфную сфере (рис. 46); это легко представить как склеивание краев разреза сферы вдоль некоторой дуги. Теорема, таким образом, доказана.

Соединяя ее с теоремой Эйлера в ее топологической форме, приведенной в конце предыдущего пункта, приходим к следующей теореме:

*Для того чтобы развертка без границы, составленная из конечных многоугольников, была гомеоморфна сфере, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Эйлера  $e - k + f = 2$ .*

Это условие, следовательно, является характеристическим для закона склеивания поверхности типа сферы из простых кусков.

<sup>26)</sup> Такое склеивание наглядно кажется невозможным, но нужно помнить, что склеивания заданы заранее и потому такие склеивания не могут считаться заранее исключенными.

**7. Развертки с границей.** Теорема 7 может быть дополнена следующим утверждением: для всякой развертки без границы, составленной из конечных многоугольников, число Эйлера  $e - k + f$  не может быть больше 2.

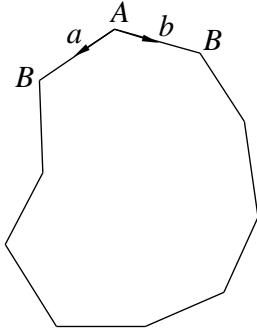


Рис. 44

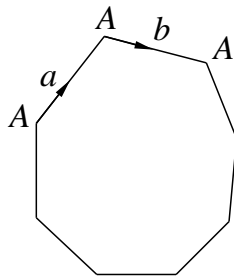


Рис. 45

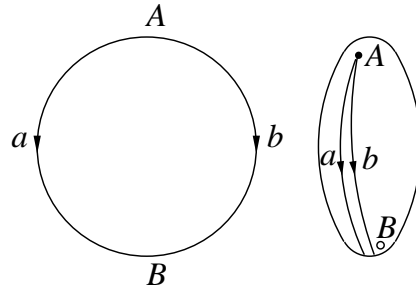


Рис. 46

Если допустить  $e - k + f > 2$ , то, повторяя рассуждение, проведенное в начале доказательства теоремы 7, мы придем к развертке из одного многоугольника, так что для нее будет  $f = 1$  и  $e > k + 1$ . Продолжая это рассуждение, мы найдем пару соседних сторон  $a, b$ , склеиваемых в противоположном направлении (рис. 44). Склеивая их и повторяя то же рассуждение, придем, наконец, к многоугольнику с двумя сторонами, склеиваемыми в одно ребро, и двумя вершинами, т. е. к развертке с  $f = 1, k = 1, e = 2$ . Для нее  $e - k + f = 2$ , а так как при всех операциях число Эйлера не менялось, то и вначале оно было равно 2, вопреки предположению.

Тот же результат верен и для разверток с границей. В общем случае можно высказать такую теорему:

**Теорема 8.** Для всякой развертки, состоящей из конечных многоугольников,  $e - k + f \leq 2 - h$ , где  $e, k, f$  имеют обычный смысл, а  $h$  есть числа замкнутых ломаных, образующих границу развертки. При этом, если  $e - k + f = 2 - h$ , то развертка гомеоморфна сферическому многоугольнику, ограниченному  $h$  ломаными; и обратно, для всякой такой развертки  $e - k + f = 2 - h$ .

В частности, для развертки без границы  $h = 0$ , и потому здесь заключаются все предыдущие результаты<sup>27)</sup>.

<sup>27)</sup> То, что граница конечной развертки складывается из замкнутых ломаных, понимается в том смысле, что, идя от одного граничного ребра к следующему, имеющему с ним общую вершину (она может быть общей в силу склеивания смежных с этими ребрами сторон многоугольников развертки), и т. д., получим замкнутую ломаную. Это очевидно, поскольку число ребер конечно и их ряд должен замкнуться. Если таких замкнутых



**Доказательство.** Для разверток без границы ( $h = 0$ ) данная теорема уже содержится в доказанных утверждениях. Рассмотрим развертку с границей. К любой ограничивающей ее замкнутой ломаной можно подклеить простой многоугольник с тем же числом сторон. Получим новую развертку, у которой числа вершин и ребер — прежние, число многоугольников увеличилось на один, а число ограничивающих ломаных стало меньше на одну, т. е. для новой развертки число  $e - k + f + h$  осталось прежним. Но, заклеивая таким путем границу, мы приходим к развертке без границы, а для нее  $e - k + f + h \leq 2$  ( $h = 0$ ). Так как это число не меняется, то то же верно для исходной развертки.

Если для исходной развертки было  $e - k + f = 2 - h$ , то путем заклеивания границ мы приходим к развертке без границ и с  $e - k + f = 2$ . Такая развертка по теореме 7 гомеоморфна сфере, а потому исходная развертка гомеоморфна сферическому многоугольнику. Обратно, всякая развертка, гомеоморфная сферическому многоугольнику, доклеивается до развертки, гомеоморфной сфере, а потому для нее  $e - k + f = 2 - h$ .

Теорема доказана полностью.

**8. Бесконечные развертки.** Для бесконечных разверток могут быть получены аналогичные зависимости между их топологическим строением и числом Эйлера. Так как бесконечные выпуклые многогранники, а значит, и их развертки гомеоморфны плоскости, то мы рассмотрим соотношение Эйлера для таких разверток.

**Теорема 9.** *Для того чтобы развертка без границы, содержащая бесконечные многоугольники, была гомеоморфна плоскости, необходимо и достаточно, чтобы ее число Эйлера равнялось единице:  $e - k + f = 1$ .*

**Необходимость.** Отобразим развертку на плоскость и вырежем из нее конечную часть, ограниченную одной замкнутой ломаной. Это мы сделаем так, чтобы в этой конечной части содержались все вершины, все конечные ребра и многоугольники, а от каждого бесконечного ребра имелось бы по одному отрезку и от каждого бесконечного многоугольника — по одному конечному куску (рис. 47). В результате получим конечную развертку с тем же числом многоугольников  $f$ , но к числу вершин  $e$  и числу ребер  $k$  прибавятся число вершин граничной ломаной и число ее сторон. Но число вершин и сторон этой ломаной — одно и то же, а потому для нашей конечной развертки число Эйлера будет то же самое  $e - k + f$ , что и для исходной.

Наша конечная развертка ограничена одной ломаной и гомеоморфна многоугольнику. Поэтому согласно теореме 8  $e - k + f = 2 - 1 = 1$ , что и требовалось доказать.

---

ломаных несколько, то они не имеют общих точек, потому что в одной граничной вершине сходятся только два граничных ребра, а значит, цепь последовательно смежных граничных ребер определяется любым из них однозначно.

**Достаточность.** Пусть дана бесконечная развертка без границы с числом Эйлера  $e - k + f = 1$ . Пусть  $Q_1$  — бесконечный многоугольник развертки,  $Q_2$  — бесконечный многоугольник, склеиваемый с ним по бесконечной стороне  $L_1$ , и т. д. Так как число всех многоугольников конечно и стороны склеиваются попарно, то полученная последовательность должна замкнуться так, что последний ее многоугольник  $Q_n$  склеится с  $Q_1$  по бесконечной стороне  $L_n$ . В результате получается циклическая последовательность бесконечных многоугольников  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ , смежных по бесконечным сторонам  $L_1, L_2, \dots, L_n$ . В частности, многоугольник  $Q_1$  может склеиваться сам с собой, и тогда последовательность состоит из него одного.

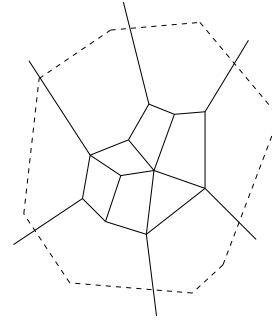


Рис. 47

Если в развертке остаются еще бесконечные многоугольники, то, исходя из любого из них, точно так же построим другую циклическую последовательность. Повторяя это построение, разобьем совокупность всех бесконечных многоугольников развертки на такие последовательности  $R^1, R^2, \dots, R^m$ . Каждая из них представляет как бы один бесконечный конец развертки.

Возьмем на ребрах  $L_1, L_2, \dots, L_n$ , по которым смежны многоугольники первой последовательности  $R^1$ , точки  $A_1, A_2, \dots, A_n$  и соединим их последовательно ломаными в многоугольниках  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ . В результате получим замкнутую ломаную  $M^1$ , которая отрезет бесконечные части этих многоугольников (рис. 48; чертеж имеет условный характер, так как склеивание производится только абстрактно).

Продельвая ту же операцию со всеми последовательностями  $R^i$ , получим конечную развертку с тем же числом многоугольников  $f$ . Число ее вершин  $e$  увеличится на число вершин ломаных  $M^i$ , а число ребер  $k$  — на число сторон ломаных  $M^i$ . Но у каждой замкнутой ломаной число вершин равно числу сторон, а потому число Эйлера полученной конечной развертки будет то же, что у исходной:  $e - k + f = 1$ . По теореме 8 для развертки с границей это возможно, если и только если развертка гомеоморфна обыкновенному многоугольнику, ограниченному одной замкнутой ломаной. Поэтому имеется только одна ломаная  $M$  и соответственно лишь одна последовательность бесконечных многоугольников исходной развертки.

Отобразим теперь нашу конечную развертку в выпуклый многоугольник. Из вершин его проведем полупрямые, разбивающие внешнюю область на бесконечные многоугольники. На каждой из них можно отобразить бесконечную часть соответствующего многоугольника исходной развертки, отрезанную при построении ломаной  $M$ . В результате получится отображение

всей исходной развертки на плоскость. Тем самым она гомеоморфна плоскости, что и требовалось доказать.

Из только что проведенного рассмотрения видно, что вырезанная часть развертки имеет число Эйлера  $e - k + f = 1$  тогда и только тогда, когда она ограничена одной ломаной  $M$ . Это соответствует тому, что исходная бесконечная развертка имеет только один «бесконечный конец». По доказанному, равенство  $e - k + f = 1$  необходимо и достаточно для того, чтобы бесконечная развертка была гомеоморфна плоскости. Поэтому наличие только одного бесконечного конца также необходимо и достаточно для этого, т. е. мы получаем следующую теорему:

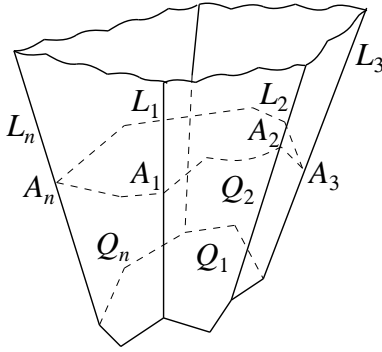


Рис. 48

**Теорема 10.** Для того чтобы развертка без границы была гомеоморфна плоскости, необходимо и достаточно, чтобы она имела один бесконечный конец (т. е. чтобы она со-

держала хотя бы один бесконечный многоугольник и чтобы все ее бесконечные многоугольники образовывали одну циклическую последовательность при указанном в развертке склеивании их по бесконечным сторонам).

Заметим, что построение ломаных  $M^i$  сводит задачу о бесконечной развертке с  $m$  «бесконечными концами»  $R^i$  к задаче о развертке с  $m$  граничными ломаными. Это сразу позволяет получить для бесконечных разверток теорему, аналогичную теореме 8:

Для всякой развертки без границы, имеющей бесконечные многоугольники,  $e - k + f \leq 2 - m$ , где  $m$  — число «концов»; при этом  $e - k + f = 1$  тогда и только тогда, когда развертка гомеоморфна плоскости (один бесконечный конец<sup>28)</sup>). Можно, далее, получить общую теорему: для бесконечных разверток с границей  $e - k + f \leq 2 - m - h$ , где  $h$  — число замкнутых или бесконечных ломаных, образующих границу.

Впрочем, эти результаты нам не понадобятся.

**9. Теорема Жордана.** Эта теорема утверждает, что всякая простая замкнутая кривая, лежащая на поверхности, гомеоморфной сфере, разбивает поверхность на две области.

Мы не будем доказывать эту наглядно очевидную теорему во всей общности. Нам достаточно доказать ее лишь для того случая, когда рассматриваемая кривая есть простая замкнутая ломаная на замкнутом выпуклом многограннике.

Итак, пусть имеется замкнутый выпуклый многогранник  $P$  и на нем замкнутая ломаная  $C$ , не имеющая кратных точек. Возьмем внутри многогранника  $P$  произвольную точку  $O$  и проведем из нее луч  $L$ , не пересекающий ломаную  $C$ . Тогда очевидно, что «достаточно острая» треугольная пирамида с вершиной  $O$ , содержащая внутри кусок

<sup>28)</sup>Присоединяя к каждому концу одну абстрактную вершину и считая, что в ней сходятся все его бесконечные ребра, получим абстрактную развертку без границы с  $t$  абстрактными вершинами соответственно  $m$  концам. Это замечание дает также новое доказательство указанного обобщения теоремы 9.

луча  $L$ , пересекает  $P$ , также не задевая  $C$ . Взяв эту пирамиду настолько длинной, чтобы ее основание  $T$  лежало вне  $P$ , мы построим усеченную пирамиду  $P'$  с основанием  $T$ , содержащую внутри себя многогранник  $P$  (рис. 49, а).

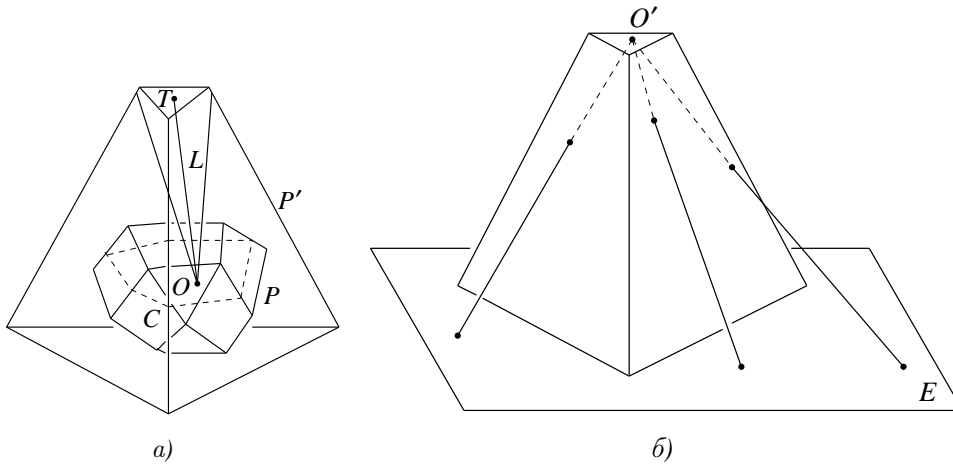


Рис. 49

Спроектируем  $P$  на  $P'$  из точки  $O$ . Тогда ломаная  $C$  перейдет в ломаную  $C'$  на  $P'$ . При этом в силу нашего построения ломаная  $C'$  не будет задевать треугольника  $T$ . Очевидно, наша теорема будет доказана, как только мы установим, что  $C'$  разбивает на две области многогранник  $P'$  с выгнутой гранью  $T$  (считая при этом, что грань  $T$  удалена вместе с ее ребрами).

Усеченную пирамиду  $P'$  с исключенным основанием  $T$  проектируем на плоскость  $E$  второго основания из некоторой точки  $O'$ , лежащей внутри  $T$  (стереографическая проекция, рис. 49, б). Так как указанное проектирование, очевидно, устанавливает взаимно однозначное отображение продырявленного многогранника  $P'$  на всю плоскость  $E$ , то остается доказать, что простая замкнутая ломаная  $C''$ , в которую проектируется  $C'$ , разбивает плоскость  $E$  на две области. Для этого мы должны указать такое разбиение точек плоскости  $E$  (кроме точек ломаной  $C''$ ) на два класса I и II, что точки, принадлежащие одному классу, всегда соединимы ломаной, не имеющей общих точек с  $C''$ , а для любой пары точек из разных классов такой ломаной не существует.

Выберем на плоскости направление, не параллельное ни одной из сторон ломаной  $C''$ , и определим классы I и II следующим образом: точка принадлежит классу I, если луч, проведенный из нее в выбранном направлении, пересекает  $C''$  в четном числе точек (если луч проходит через вершину ломаной  $C''$ , то эта вершина считается точкой пересечения лишь при условии, что звенья ломаной  $C''$ , сходящиеся в этой вершине, лежат по разные стороны от луча); в противном случае точка принадлежит классу II.

Докажем, что классы I и II обладают требуемым свойством. Прежде всего заметим, что в обоих классах заведомо имеются точки. Чтобы убедиться в этом, достаточно провести через внутреннюю точку  $t$  стороны ломаной  $C'$  прямую, параллельную данному направлению. Тогда точки этой прямой, лежащие по разные стороны от точки  $t$  достаточно близко от нее, принадлежат разным классам.

Пусть теперь две точки  $p$  и  $q$  соединимы ломаной, не имеющей общих точек с  $C''$ . Тогда, двигаясь непрерывно по этой ломаной, мы перейдем от точки  $p$  к точке  $q$ , ни разу не попав на  $C''$ . Но при таком движении точки число пересечений исходящего из нее

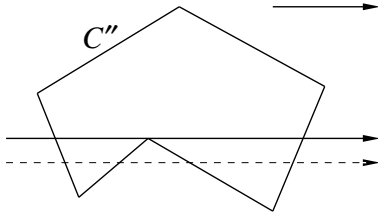


Рис. 50

луча данного направления с ломаной  $C''$  может измениться лишь вследствие того, что луч наталкивается на новые вершины ломаной  $C''$  или перестает проходить через прежние вершины. При этом легко проверить, что число точек пересечения изменяется лишь за счет тех вершин, в которых звенья ломаной лежат по одну сторону от луча, и при прохождении луча через каждую такую вершину число точек пересечения изменяется на  $\pm 2$ <sup>29</sup>) (рис. 50). Таким образом, четность числа пересечений не меняется, и точки  $p$  и  $q$  принадлежат одному классу. Тем самым

доказано, что точки из разных классов нельзя соединить ломаной, не имеющей общих точек с  $C''$ .

Осталось доказать, что точки из одного класса всегда соединимы ломаной, не пересекающей  $C''$ . Пусть точки  $p$  и  $q$  — из одного класса. Соединим  $p$  и  $q$  отрезком  $pq$ . Если на  $pq$  лежат вершины ломаной  $C''$ , для которых подходящие к ним звенья ломаной лежат по одну сторону от отрезка  $pq$ , то мы заменим достаточно малый участок отрезка  $pq$ , проходящий через такую вершину, двумя отрезками, не имеющими общих точек с  $C''$ . Аналогичным образом заменим участки отрезка  $pq$ , лежащие на звеньях ломаной  $C''$ . В результате мы получим ломаную  $R$ , соединяющую точки  $p$  и  $q$  и не имеющую с ломаной  $C''$  никаких общих точек, кроме настоящих точек пересечения, когда звено ломаной  $R$ , встречаясь со звеном ломаной  $C''$ , переходит с одной его стороны на другую (рис. 51, а).

Пусть  $p'$  — первая, а  $q'$  — последняя из этих точек пересечения.

Взяв на участке  $pp'$  ломаной  $R$  точку  $p''$ , близкую к  $p'$ , проведем из нее ломаную  $R'$ , идущую «вдоль  $C''$ » в одном из двух направлений (эта ломаная получается в результате малых параллельных смещений звеньев ломаной  $C''$ ). Ломаная  $R'$  по построению не будет иметь общих точек с  $C''$  и, будучи близкой к  $C''$ , пересечется с  $R$  в точке  $q''$ , близкой к  $q'$ .

Рассмотрим ломаную  $R''$ , составленную из участка  $pp''$  ломаной  $R$ , участка  $p''q''$  ломаной  $R'$  и участка  $q''q$  ломаной  $R$  (см. рис. 51, а). Эта ломаная могла бы иметь лишь одну точку пересечения с  $C''$ , именно точку  $q'$ , если бы последняя оказалась внутри отрезка  $q''q$ <sup>30</sup>). Но тогда при переходе от  $q''$  к  $q$  число пересечений луча, исходящего из этих точек, с ломаной  $C''$  меняло бы свою четность и точки  $q''$  и  $q$  принадлежали

<sup>29</sup>) В этом месте мы опираемся на тот факт, что из каждой вершины ломаной  $C''$  исходят ровно два звена, т. е. используем замкнутость этой ломаной.

<sup>30</sup>) Этот случай может показаться невообразимым, однако тот факт, что отрезок  $q''q$  не пересекается с ломаной  $C''$ , очевиден не в большей степени, чем сама теорема Жордана, выражающая определенное топологическое свойство сферы. Полезно убедиться, что на поверхностях другого топологического строения указанный факт может не иметь места. На рис. 51, б изображена развертка листа Мёбиуса (противоположные стороны прямоугольника склеиваются так, что направления стрелок совпадают), на котором наше построение приводит к тому, что отрезок  $q''q$  пересекает замкнутую ломаную  $C''$  в точке  $q'$ . (Так как стороны прямоугольника склеиваются так, что стрелки совпадают, то пункт действительно образует одну линию.)

бы разным классам. Но  $q''$  и  $p$  принадлежат одному классу, так что тогда также  $p$  и  $q$  принадлежали бы разным классам, вопреки предположению. Значит,  $R''$  вовсе не имеет общих точек с  $C''$ , и теорема доказана.

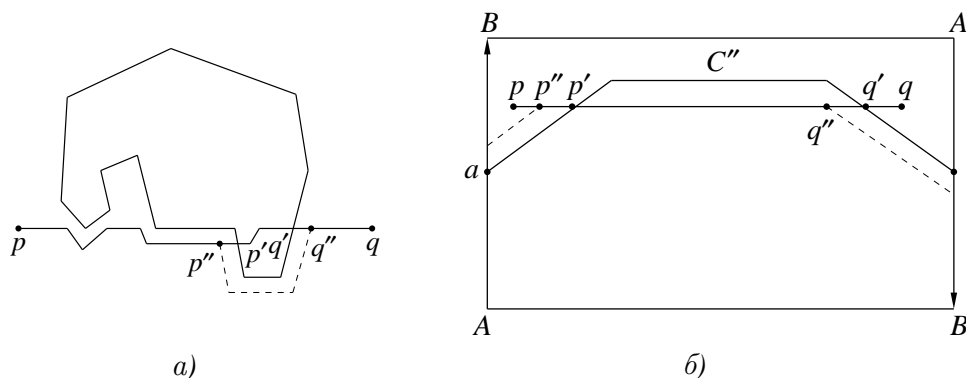


Рис. 51

§ 8. НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ИЗ ВНУТРЕННЕЙ ГЕОМЕТРИИ РАЗВЕРТОК <sup>31)</sup>

**1. Кратчайшие.** Кривая в развертке  $R$ , имеющая наименьшую длину среди всех кривых в той же развертке с теми же концами, называется *кратчайшей*.

А) *Кратчайшая* складается из конечного числа прямолинейных отрезков в многоугольнике развертки. Через внутреннюю точку ребра она переходит «без преломления», т. е. углы, образуемые ею с ребром с обеих сторон, равны (рис. 52). Через точку с полным углом  $< 2\pi$  кратчайшая проходить не может. (Через точку с полным углом  $> 2\pi$  кратчайшая может проходить всегда, как это легко видеть на простейших примерах. Этот случай нас не интересует, потому что мы заняты развертками положительной кривизны.)

Доказательство этих утверждений основано на следующем очевидном замечании: если  $A$  — точка кратчайшей, то на достаточно малом отрезке  $AB$  кратчайшая сводится к прямолинейному отрезку в многоугольнике развертки. Это действительно так, потому что окрестность точки развертки складается из углов многоугольников или, что еще проще, представляет часть внутренности многоугольника.

Если бы полный угол вокруг точки  $A$  был меньше  $2\pi$ , то сходящиеся в ней отрезки  $AX$ ,  $AU$  кратчайшей хотя бы с одной стороны образовывали бы угол, меньший  $\pi$ . Тогда точки  $X_1$ ,  $Y_1$  на этих отрезках, близкие к  $A$ , можно было бы соединить с этой стороны отрезком (рис. 53) и тем самым укоротить кратчайшую, что невозможно по самому ее определению. Это построение отрезка  $X_1Y_1$  естественно назвать срезанием угла в точке  $A$ .

<sup>31)</sup>Эти теоремы используются только в гл. IV и V.

Если бы, переходя через внутреннюю точку  $A$  на ребре, кратчайшая преломлялась, то ее отрезки, сходящиеся в  $A$ , образовывали бы с одной стороны угол, меньший  $\pi$ . Срезая его, мы опять укоротили бы кратчайшую, что невозможно.

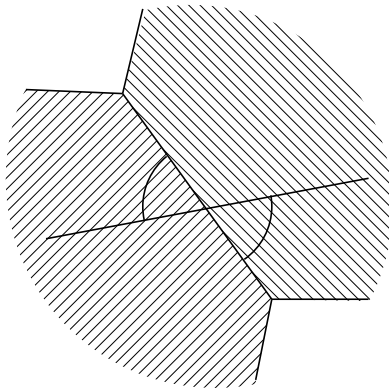


Рис. 52

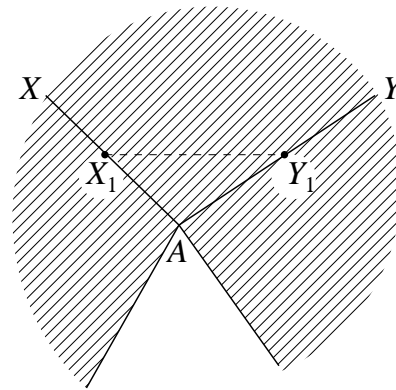


Рис. 53

Пусть теперь  $L$  — отрезок кратчайшей, лежащий в данном многоугольнике развертки<sup>32)</sup>. Каждая его точка имеет окрестность, в которой  $L$  представляется прямолинейным отрезком, откуда ясно, что и в целом  $L$  есть отрезок.

Кратчайшая пересекает каждый многоугольник конечное число раз. Действительно, если бы она пересекала многоугольник  $Q$  бесконечное число раз, то длины ее отрезков, лежащих в  $Q$ , должны были бы стремиться к нулю; иначе она имела бы бесконечную длину. Но тогда эти отрезки сгущались бы к одной из вершин многоугольника  $Q$ . Эта вершина, будучи их предельной точкой, должна была бы принадлежать кратчайшей. Но в окрестности вершины кратчайшая должна быть прямолинейным отрезком и уж никак не может пересекать многоугольник  $Q$  бесконечное число раз. Полученное противоречие показывает, что число отрезков кратчайшей в многоугольнике конечно.

Теорема, таким образом, полностью доказана.

<sup>32)</sup> Не исключено, конечно, что кратчайшая проходит по многоугольнику развертки неоднократно и тем самым имеет в нем несколько отрезков. Пример неоднократного прохождения кратчайшей по многоугольнику развертки легко построить на развертке, состоящей всего лишь из одного многоугольника подобно крестообразной развертке куба (рис. 35).

В) Если развертка имеет границу, то кратчайшая может частично проходить по границе (как линия  $CB$  на рис. 54). При этом ее отрезки могут образовывать углы в тех и только тех вершинах границы, угол при которых больше  $\pi$ .

Действительно, пусть два отрезка  $AX$ ,  $AУ$  одной кратчайшей сходятся в точке  $A$  на границе развертки, образуя друг с другом некоторый угол. Если бы этот угол  $\alpha$  с внутренней стороны развертки был меньше  $\pi$ , то его можно было бы срезать (рис. 53). Тогда мы заменили бы кратчайшую более короткой линией, что невозможно. Следовательно, угол  $\alpha > \pi$  и потому тем более полный угол при точке  $A$  больше  $\pi$ .

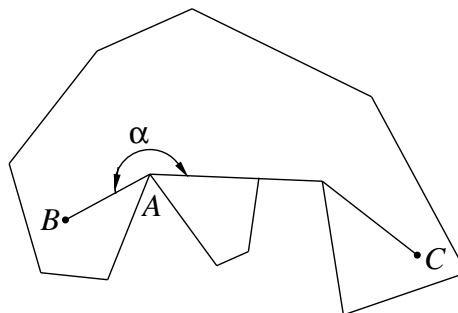


Рис. 54

С) В развертке положительной кривизны у каждой кратчайшей, идущей внутри развертки, есть окрестность, которую можно развернуть на плоскость, причем кратчайшая переходит в прямолинейный отрезок. (Под разворачиванием на плоскость понимается изометрическое отображение.)

Если конец кратчайшей лежит в точке  $O$  с полным углом  $< 2\pi$ , то его окрестность нельзя развернуть на плоскость. Но тогда, проведя из точки  $O$  отрезок и надрезав по нему ее окрестность, можно будет надрезанную окрестность развернуть на плоскость. Возможность развернуть на плоскость окрестности концов кратчайшей мы понимаем именно в этом смысле.

Теорема  $C$  следует из теоремы  $A$ . Действительно, согласно теореме  $A$ , кратчайшая не может проходить через точки с полным углом  $< 2\pi$ . Поэтому в развертке положительной кривизны каждая внутренняя точка кратчайшей имеет окрестность, разворачиваемую на плоскость. Согласно теореме  $A$ , в каждой такой окрестности кратчайшая оказывается отрезком. Выбирая конечное число таких окрестностей, покрывающих всю кратчайшую, получим ее окрестность, которую можно развернуть на плоскость, причем кратчайшая уже вся в целом превратится в отрезок.

Д) В развертке положительной кривизны две кратчайшие  $AB$  и  $AC$ , исходящие из одной точки  $A$  в разные точки  $B$  и  $C$ , либо не имеют общих точек, помимо  $A$ , либо одна из них есть просто часть другой.

Для доказательства допустим, что кратчайшие  $AB$  и  $AC$  имеют общую точку  $D$ , но не совпадают на участке  $AD$  (рис. 55). При этом не исключается, что  $D$  может быть концом одной из них, скажем  $D = B$ . Тогда участки  $AD$  этих кратчайших имеют равные длины, так как иначе, заменяя более длинный более коротким, мы сократили бы соответствующую кратчайшую.



Поэтому мы получаем две кратчайшие между точками  $A$  и  $C$ , совпадающие на участке  $CD$  и дальше расходящиеся вдоль разных отрезков  $AD$ .

Но тогда их ветви образуют три угла, два из которых, как угол между  $AD$  и  $DC$ , равны  $\pi$ . Полный угол вокруг точки  $D$ , где они расходятся, получается больше  $2\pi$ , что исключено по предположению о положительности кривизны. Поэтому на участке  $AD$  кратчайшие должны совпадать. Но по совершенно тем же соображениям они и дальше нигде не могут разойтись. Таким образом, они полностью налегают так, что одна из них есть часть другой.

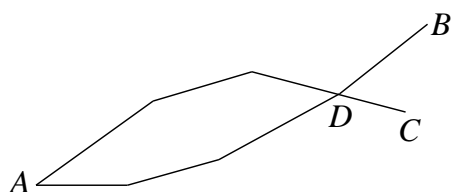


Рис. 55

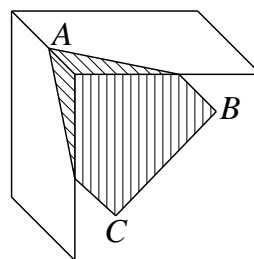


Рис. 56

Е) В любой развертке каждые две точки можно соединить кратчайшей.

Пусть  $A$  и  $B$  — две данные точки развертки  $R$ . Пусть их соединяет ломаная некоторой длины  $l$ . Тогда кратчайшую  $AB$  нужно, очевидно, искать только среди более коротких кривых.

Пусть  $G$  — множество всех точек  $X$  развертки  $R$ , удаленных от  $A$  на расстояние  $\rho_R(A, X) \leq l$ . Очевидно, каждая точка развертки и, в частности, каждая точка множества  $G$  имеют окрестность, в которой кратчайшая заведомо существует и представляется отрезком. Каждую такую окрестность можно считать состоящей из многоугольников, являющихся частями многоугольников развертки.

В силу известной леммы Бореля из данных окрестностей можно выбрать конечное число покрывающих множество  $G$ . А тогда их все можно разбить на треугольники, которые обозначим  $T_i$ .

В результате множество  $G$  оказывается покрытым непересекающимися треугольниками  $T_i$ , в каждом из которых кратчайшая заведомо существует и представляет собой отрезок.

Очевидно, что кратчайшую  $AB$  достаточно искать среди ломаных со звеньями в разных треугольниках  $T_i$ . (Из  $G$  кратчайшая  $AB$  выйти не может, так как тогда ее длина была бы больше  $l$ , потому что все точки, удаленные от  $A$  не более чем на  $l$ , включены в  $G$ .) Длина ломаной со звеньями в тре-

угольниках есть, очевидно, функция конечного числа переменных, меняющихся в конечной замкнутой области<sup>33)</sup>. Поэтому она достигает минимума, т. е. существует кратчайшая  $AB$ .

Все полученные результаты  $A — E$  можно резюмировать в следующей теореме:

**Теорема 1.** *В любой развертке положительной кривизны каждые две точки соединимы кратчайшей. Она складывается из отрезков на многоугольниках развертки. Внутри развертки она проходит через ребра «без преломления» и у нее есть окрестность, разворачиваемая на плоскость, причем кратчайшая переходит в прямолинейный отрезок. Если же развертка имеет границу и кратчайшая подходит к границе, то она может преломляться только в тех вершинах на границе, угол при которых больше  $\pi$ .*

**2. Кривизна геодезического многоугольника.** Назовем *геодезическим многоугольником* любую часть развертки, ограниченную замкнутой линией, составленной из кратчайших, и гомеоморфную кругу, т. е. допускающую взаимно однозначное и непрерывное отображение на круг подобно простому плоскому многоугольнику, конечно, с учетом отождествлений (склеиваний), заданных в развертке. Так как кратчайшие состоят из отрезков на многоугольниках развертки, то геодезический многоугольник вырезается из развертки ломаной, составленной из таких отрезков, и потому, естественно, сам представляет некоторую развертку, составленную из кусков многоугольников исходной развертки. Однако в отличие от обыкновенного многоугольника геодезический многоугольник может содержать внутри истинные вершины развертки. Примером может служить геодезический треугольник  $ABC$  на рис. 56, где роль развертки играет обыкновенный куб.

<sup>33)</sup> Точно определить эту функцию можно, например, следующим образом. На каждой стороне  $a_j$  треугольников  $T_i$  будем определять положение точки расстоянием  $x_j$  от одного из концов. Рассмотрим такие ломаные, соединяющие точки  $A$  и  $B$ , которые пересекают стороны треугольников  $T_i$  в некотором данном порядке:  $a_{j_1}, a_{j_2}, a_{j_3}, \dots$  (при этом, если ломаная на некотором отрезке совпадает со стороной  $a_k$ , то мы не считаем, что она ее пересекает, но считаем, что она пересекает стороны, подходящие к концам  $a_k$ ). Длина рассматриваемой ломаной есть, очевидно, вполне определенная непрерывная функция переменных  $x_{j_1}, x_{j_2}, \dots$  и потому достигает минимума. Рассматриваем все возможные последовательности сторон  $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots$ , как их могут пересекать ломаные  $AB$ . Каждой из этих последовательностей отвечает своя функция и свой минимум. Наименьший из этих минимумов и даст кратчайшую  $AB$ . То, что здесь речь идет о многих функциях, не противоречит изложенному вначале о том, что длина ломаной  $AB$  есть одна непрерывная функция, потому что любое число функций можно объединить в одну, но от большего числа переменных. Например,  $f(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ) и  $g(x)$  ( $c \leq x \leq d$ ) можно считать функцией  $\varphi(x, y) = \begin{cases} f(x) & (a \leq x \leq b, y = y_0 < c), \\ g(y) & (c \leq y \leq d, x = x_0 < a). \end{cases}$

Так как геодезический многоугольник сам представляет некоторую развертку, то углы его определяются так же, как углы при граничных вершинах развертки (т.е. как суммы сходящихся в одной граничной вершине углов плоских многоугольников, образующих ту развертку, которую представляет данный геодезический многоугольник).

**Теорема 2.** *Избыток суммы углов геодезического  $n$ -угольника (в сравнении с суммой углов плоского  $n$ -угольника) равен его кривизне, т.е. если  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  — внутренние углы геодезического  $n$ -угольника,  $\omega_1, \dots, \omega_m$  — кривизны вершин развертки, содержащихся внутри него, то*

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i - (n-2)\pi = \sum_{j=1}^m \omega_j. \quad (1)$$

Для доказательства разобьем данный геодезический многоугольник  $P$  на треугольники  $T_i$  так, чтобы каждый из них содержался в одном многоугольнике развертки. При этом может оказаться, что некоторые вершины этих треугольников, лежащие на границе многоугольника  $P$ , не служат его вершинами. Однако мы их примем также за вершины многоугольника  $P$ , что не изменит величины, стоящей в (1) слева, так как угол при такой вершине равен  $\pi$ .

Точно так же некоторые вершины треугольников  $T_i$ , лежащие внутри многоугольника  $P$ , могут не быть вершинами развертки. Однако «разрезов» развертку на треугольники  $T_i$ , мы эти вершины сделаем вершинами развертки. И это не изменит суммы кривизн, потому что полный угол вокруг новой вершины равен  $2\pi$  и кривизна ее равна нулю.

Итак, мы можем все вершины треугольников  $T_i$ , лежащие на границе многоугольника  $P$ , считать его вершинами, а вершины этих треугольников, лежащие внутри  $P$ , — вершинами развертки.

Так как каждый треугольник  $T_i$  содержится в одном многоугольнике развертки и является поэтому обыкновенным плоским треугольником, то сумма его углов равна  $\pi$ . Если число всех треугольников  $T_i$  есть  $f$ , то сумма всех их углов есть  $f\pi$ . С другой стороны, та же сумма равна сумме углов при всех вершинах на границе и внутри  $P$ . Поэтому

$$f\pi = \sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{j=1}^m \theta_j, \quad (2)$$

где  $\theta_j$  — полный угол вокруг соответствующей вершины внутри  $P$ .

Если  $k$  — число сторон треугольников  $T_i$  и  $e$  — число вершин, то по теореме Эйлера  $f - k + e = 1$  (теорема 8 § 7). Вместе с тем число всех

вершин равно сумме числа вершин внутри и на границе, т. е.  $e = m + n$ ; поэтому

$$f - k + m + n = 1. \quad (3)$$

Наконец, у каждого треугольника по три стороны, и только  $n$  сторон, лежащих на границе, принадлежат каждая одному треугольнику, внутренние же стороны принадлежат каждая двум треугольникам. Поэтому

$$3f = 2k - n. \quad (4)$$

Умножая обе части равенства (3) на 2 и принимая во внимание, что в силу равенства (4)  $2k = 3f + n$ , получим

$$f = 2m + n - 2. \quad (5)$$

Подставляя это выражение для  $f$  в формулу (2), находим

$$2\pi m + \pi(n - 2) = \sum_{i=1}^n \alpha_i + \sum_{j=1}^m \theta_j$$

или

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i - (n - 2)\pi = \sum_{j=1}^m (2\pi - \theta_j) = \sum_{j=1}^m \omega_j,$$

ибо по самому определению кривизны  $\omega_j = 2\pi - \theta_j$ . Теорема доказана.

**Теорема 3.** *Полная кривизна развертки, гомеоморфной сфере, равна  $4\pi$ .*

Для доказательства вырежем внутри одного из многоугольников развертки  $R$  многоугольник  $P$ . Тогда, если  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  — его углы, то

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = (n - 2)\pi. \quad (6)$$

Если развертка гомеоморфна сфере, то дополнение  $P' = R - P$  (с присоединенной границей) будет геодезическим многоугольником. По построению этот многоугольник содержит все вершины развертки и потому полная его кривизна равна полной кривизне развертки. Поэтому, если  $\Omega$  — эта полная кривизна, а  $\alpha'_1, \dots, \alpha'_n$  — углы геодезического многоугольника  $P'$ , то согласно теореме 2

$$\sum_{i=1}^n \alpha'_i - (n - 2)\pi = \Omega. \quad (7)$$

Но каждая вершина многоугольника  $P'$  есть вместе с тем вершина многоугольника  $P$  и полный угол вокруг нее равен  $2\pi$ , потому что она лежит внутри многоугольника развертки. Следовательно,

$$\alpha_i + \alpha'_i = 2\pi,$$

откуда

$$\sum_{i=1}^n \alpha'_i + \sum_{i=1}^n \alpha_i = 2\pi n$$

или вследствие (6)

$$\sum_{i=1}^n \alpha'_i = (n+2)\pi.$$

Подставляя это в (7), получим

$$\Omega = 4\pi,$$

что и требовалось доказать.

### 3. Многоугольник нулевой кривизны.

**Теорема 4.** *Если геодезический треугольник не содержит внутри себя точек с кривизной, отличной от нуля, и его стороны идут внутри развертки, то он разворачивается на плоскость, т. е. изометричен обычному плоскому треугольнику<sup>34)</sup>.*

Пусть геодезический треугольник  $ABC$  не содержит точек с кривизной, отличной от нуля, и его стороны идут внутри развертки. По теореме 1 у него нет углов, кроме вершин. По теореме 2 сумма его углов равна  $\pi$ , так что каждый угол меньше  $\pi$ .

По теореме 1 окрестность стороны  $AB$  можно развернуть на плоскость, причем  $AB$  перейдет в прямолинейный отрезок. А так как угол  $B$  меньше  $\pi$ , то отсюда следует, что от треугольника  $ABC$  можно отрезать некоторый узкий треугольник  $ABX$  с вершиной  $X$  на стороне  $BC$  так, что этот треугольник разворачивается на плоскость.

Но к оставшемуся треугольнику  $AXC$  приложимо то же рассуждение. Поэтому точку  $X$  можно отодвигать по направлению к  $C$ , разворачивая на плоскость все большую и большую часть треугольника  $ABC$ , пока он не окажется весь развернутым на плоскость.

<sup>34)</sup> Если разбивать развертку на части, то она всегда разворачивается на плоскость. Здесь речь идет о разворачивании на плоскость без каких бы то ни было разрезов, так что все склеивания, данные в развертке, должны быть реализованы на самом деле, а не только абстрактно.

Строгое проведение этого очевидного рассуждения не представляет, конечно, никакого труда <sup>35)</sup>.

**Теорема 5.** *Если геодезический многоугольник  $Q$  не содержит внутри себя точек с кривизной, отличной от нуля, то его можно разбить на треугольники непересекающимися диагоналями.*

Мы рассматриваем многоугольник  $Q$  как развертку и понимаем под диагональю кратчайшую, идущую внутри него от одной вершины до другой. (Однако, если  $Q$  есть часть развертки  $R$ , то эта кратчайшая в многоугольнике  $Q$  может не быть кратчайшей во всей развертке  $R$ . Пример представляет линия  $AB$  на рис. 57; она — кратчайшая в части  $Q$ , составленной из граней  $Q_1, Q_2, Q_3$ , но не кратчайшая на всем изображенном многограннике.)

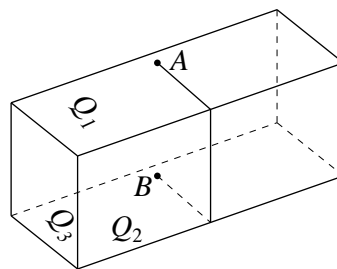


Рис. 57

Для доказательства теоремы заметим, что кривизна многоугольника  $Q$  равна нулю, а потому согласно теореме 2 сумма всех его углов  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  — такая же, как у плоского многоугольника с тем же числом вершин  $n$ , т. е.

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = (n - 2)\pi.$$

Поэтому среди его углов имеется по крайней мере три, меньших  $\pi$ .

Пусть  $A, B, C$  — вершины, углы при которых меньше  $\pi$ . Очевидно, что какие-то две из них — не соседние. (Если бы они все три были соседними друг с другом, то многоугольник сводился бы к треугольнику и его нечего было бы разбивать на треугольники.) Пусть несоседними будут вершины  $A$  и  $B$ . Они делят периметр многоугольника на две ломаные, на которых лежат еще другие вершины (рис. 58).

Возьмем любые две из этих вершин  $D, E$ , лежащих на разных ломаных, и соединим их кратчайшей  $DE$  в многоугольнике  $Q$ . Согласно теореме 1, она не может пройти через вершины  $A, B$ , так как углы при них меньше  $\pi$ . Поэтому она не может все время идти по периметру многоугольника, но должна, отходя от каких-то его вершин, проходить внутри него. На рис. 58, а, например, такой вершиной служит  $F$ . Тогда отрезок  $EF$  представляет собой диагональ, разбивающую многоугольник  $Q$  на два многоугольника с меньшим числом вершин. Применяя к каждому из них те же

<sup>35)</sup> Доказываем, что предел разворачиваемых треугольников есть разворачиваемый треугольник. Тогда существует крайняя точка  $X_0$  такая, что треугольник  $ABX_0$  разворачивается на плоскость. Точка  $X_0$  должна совпадать с  $C$ , так как иначе, применяя наше рассуждение, мы получили бы еще больший разворачиваемый треугольник.

рассуждения, мы разобьем их диагоналями и т. д., пока не придем к разбиению многоугольника  $Q$  на треугольники.

Теорема доказана.

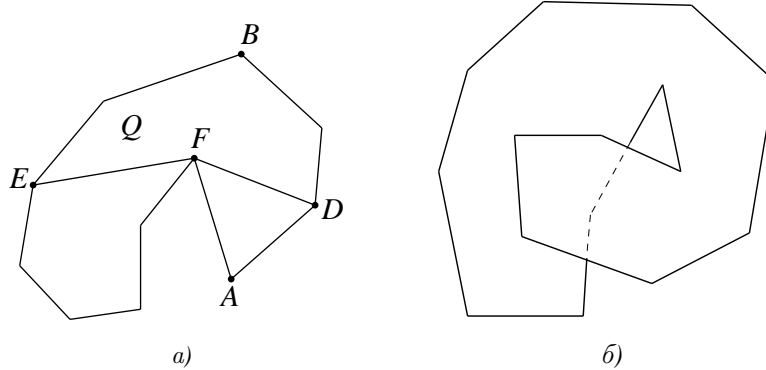


Рис. 58

Согласно теореме 4, каждый треугольник из тех, на которые разбивается многоугольник  $Q$ , можно развернуть на плоскость. Разворачивая их все на плоскость и прикладывая друг к другу по сторонам, по которым они прилегли друг к другу в многоугольнике  $Q$ , мы тем самым и многоугольник  $Q$  развернем на плоскость. Однако при таком последовательном прикладывании треугольников они могут налегать один на другой, так что развернутый многоугольник  $Q$  может перекрываться сам с собой (см. рис. 58, б).

Резюмируя, можно высказать следующую теорему:

**Теорема 6.** *Геодезический многоугольник, не имеющий внутри себя точек ненулевой кривизны, можно развернуть на плоскость с той, однако, возможной особенностью, что он будет перекрываться сам с собой.*

В § 3 была доказана теорема о том, что всякий конечный выпуклый многогранник  $P$  с границей может быть дополнен единственным образом до замкнутого  $\bar{P}$  без добавления новых вершин (теорема 4 § 3). Если граница  $P$  представляет одну ломаную  $L$ , то замкнутый многогранник  $\bar{P}$  состоит, очевидно, из многогранника  $P$  и многогранника  $Q$ , смежного с ним по ломаной  $L$  (рис. 59). Этот многогранник  $Q$  имеет только граничные вершины и потому согласно теореме 6 может быть развернут на плоскость.

Если многогранник  $P$  ограничен несколькими ломаными, то то же верно для каждого из тех кусков  $Q_i$ , которые дополняют его до замкнутого.

Полученный результат можно выразить в следующей теореме, которую мы формулируем в наглядных терминах.

**Теорема 7.** *Всякий конечный выпуклый многогранник с границей может быть и притом единственным образом дополнен до замкнутого путем под-*

клеивания к ограничивающим его ломаным таких многогранников, которые не имеют внутренних вершин и разворачиваются поэтому на плоскость (с возможностью перекрывания).

4. **Задачи.** 1. Доказать что полная кривизна (т. е. сумма кривизн всех вершин) любой конечной развертки выражается формулой

$$\omega = 2\pi\chi - \sum_{i=1}^n (\pi - \alpha_i),$$

где  $\chi = e - k + f$  — эйлерово число развертки, а  $\alpha_i$  — углы при ее граничных вершинах. Для развертки без границы  $\omega = 2\pi\chi$ . (Положительность кривизны не предполагается. Проверить на примерах, вроде рис. 2, в.)

2. Доказать, что полная кривизна бесконечной развертки, гомеоморфной плоскости, не превосходит  $2\pi$ . Обобщить этот результат, показав, что для всякой бесконечной развертки без границы  $\omega \leq 2\pi\chi$ . Какое неравенство будет при наличии границы (в него войдут углы при граничных вершинах)? (Это — довольно трудная задача.)

3. Дать пример кратчайших на невыпуклом многограннике, исходящих из одной точки и совпадающих на некотором отрезке, а дальше расходящихся, образуя «вилку».

4. Вырезать из куба геодезический многоугольник (без вершин внутри), который разворачивался бы на плоскость с перекрыванием.

5. Найти пример плоского многоугольника с перекрыванием, который нельзя было бы наложить ни на какой выпуклый многогранник. (Такой пример будет дан в н° 8 §1 гл. V.)

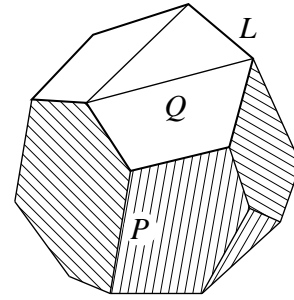


Рис. 59

## §9. ОБОБЩЕНИЯ

1. **Выпуклые тела.** Понятие выпуклого тела было определено в §1. Ряд понятий и результатов следующих параграфов может быть обобщен на любые выпуклые тела. Так, можно доказать, что выпуклое тело имеет в каждой точке своей поверхности опорную плоскость и что, обратно, всякое тело, обладающее этим свойством, — выпуклое. Каждая точка, не принадлежащая выпуклому телу, отделима от него некоторой опорной плоскостью. Поэтому выпуклое тело является общей частью полупространств, ограниченных его опорными плоскостями. Обратно, общая часть любого числа полупространств будет выпуклым телом (если только она имеет внутренние точки).

Выпуклые тела могут быть конечными и бесконечными. Для бесконечных выпуклых тел можно определить предельный конус (аналог предельного угла) как поверхность тела, заполняемого лучами, откладываемыми от любой его точки и целиком содержащимися в рассматриваемом выпуклом теле. При подобном сжатии поверхность тела переходит в предельный конус. Сферическое изображение предельного конуса совпадает с замыканием сферического изображения поверхности тела.

Одним из основных методов исследования выпуклых тел является метод приближения выпуклыми многогранниками. Если на поверхности тела взять несколько точек и построить их выпуклую оболочку, то получим выпуклый многогранник, вписанный в тело. Если число точек безгранично увеличивать, располагая их все гуще и гуще, то соответствующие выпуклые многогранники будут сходиться к телу. Легко доказать, что



опорные плоскости этих многогранников будут давать в пределе опорные плоскости тела, откуда легко вывести, что через каждую точку поверхности тела проходит опорная плоскость.

Выпуклые поверхности могут быть полными — целые поверхности выпуклых тел — и неполными. Полные поверхности могут быть либо замкнутые, ограничивающие конечные выпуклые тела, либо бесконечные, но не содержащие прямых, либо бесконечные цилиндры. Замкнутые гомеоморфны сфере, бесконечные (не цилиндры) гомеоморфны плоскости (доказательство первого утверждения аналогично доказательству для многогранников, доказательство второго — несколько иное). Неполную выпуклую поверхность можно дополнить до полной, беря поверхность ее выпуклой оболочки.

Понятие развертки к общим выпуклым поверхностям неприменимо, так как такая поверхность не может быть составлена из многоугольников. Однако совершенно аналогично случаю многогранников для любых поверхностей можно ввести понятие об их внутренней метрике, задаваемой расстояниями между точками поверхности, измеряемыми на самой поверхности. Совокупность свойств поверхности и фигур на ней, зависящих только от внутренней метрики, образует внутреннюю геометрию поверхности. Внутренняя геометрия общих выпуклых поверхностей исследована в моей книге [18]. Там среди других исследованы вопросы, аналогичные тем, которые были рассмотрены здесь для многогранников. На место задания развертки ставится абстрактное задание внутренней метрики поверхности.

**2. Многогранники в  $n$ -мерном пространстве.** Геометрия  $n$ -мерного евклидова пространства может быть построена аналитически, по аналогии с обычной аналитической геометрией, или синтетически, исходя из аксиом, обобщающих естественным образом аксиомы трехмерного евклидова пространства<sup>36</sup>). На этом синтетическом пути начала  $n$ -мерной геометрии получаются аналогично началам трехмерной. На этом пути не представляет никакого труда построить начала теории многогранников в  $n$ -мерном евклидовом пространстве. Определение телесного многогранника идет от  $m$  к  $m + 1$ :  $(m + 1)$ -мерный (телесный) многогранник есть тело, лежащее в  $(m + 1)$ -мерной плоскости, имеющее в ней внутренние точки и ограниченное конечным числом  $m$ -мерных многогранников.  $n$ -мерный многогранник есть тело, ограниченное конечным числом  $(n - 1)$ -мерных многогранников. Каждый такой  $(n - 1)$ -мерный многогранник называется гранью с условием, что к нему присоединены все другие (если они имеются), лежащие в той же  $(n - 1)$ -мерной плоскости и имеющие с ним и далее друг с другом общие куски их собственных, т. е.  $(n - 2)$ -мерных, граней.

Если называть  $(n - 1)$ -мерную плоскость просто плоскостью, то понятие выпуклого многогранника определяется дословно так же, как в § 1, и совершенно так же устанавливается эквивалентность двух определений выпуклости. Далее, все теоремы § 2–5 вместе

<sup>36</sup>) Вводится понятие  $m$ -мерной плоскости  $P^m$ ,  $0 \leq m \leq n - 1$ : нульмерная плоскость есть точка, одномерная — прямая, двумерная — обычная плоскость, трехмерная — обычное трехмерное пространство и т. д. Аксиомы сочетания: 1) Через всякие  $m + 1$  точек «в общем расположении» (т. е. не лежащих на менее чем  $m$ -мерной плоскости) проходит и притом только одна  $m$ -мерная плоскость. 2) Если две плоскости  $P^m$ ,  $P^k$  имеют общую точку, то их общая часть есть плоскость  $P^l$ , число измерений которой удовлетворяет неравенству  $l \geq m + k - n$ . (Например, в четырехмерном пространстве двумерные плоскости могут пересекаться либо в одной точке:  $l = 0$ , либо по прямой:  $l = 1$ .) 3) В пространстве есть по крайней мере  $n + 1$  точек в общем расположении (не лежащих ни в какой плоскости). Прочие аксиомы (порядка, конгруэнтности, непрерывности, параллельности) — такие же, как в трехмерном пространстве. См., напр., [103, гл. V, п° 14].

с их доказательствами переносятся на  $n$ -мерные выпуклые многогранники без каких бы то ни было изменений. Нужно только называть плоскостью  $(n - 1)$ -мерную плоскость и помнить, что имеются еще плоскости меньших измерений. Например, предельный угол многогранника может вырождаться в плоский любого числа измерений от  $n - 1$  до 1.

Понятия полупространства, перпендикуляра к плоскости и параллельных плоскостей определяются так же, как в трехмерном пространстве. Сферическое изображение строится на  $(n - 1)$ -мерной сфере, которая определяется как геометрическое место точек, равноудаленных от данной — центра. На сфере имеются аналогично большим кругам «большие сферы» измерений от  $n - 2$  до 1, получаемые сечением сферы плоскостями измерений от  $n - 1$  до 2, проходящими через центр. Одномерная сфера есть окружность. Понятие сферического многоугольника естественно обобщается в понятие сферического многогранника. И тут имеется та же аналогия с обычной геометрией.

На основе этих общих замечаний можно без труда обобщить все результаты §1–5 на многогранники в  $n$ -мерном пространстве.

Понятия о развертке и внутренней геометрии также допускают естественное обобщение. Однако здесь дело существенно усложняется тем, что не только вершины могут не иметь окрестности, изометричной  $(n - 1)$ -мерному шару (по аналогии с кругом). Этим свойством могут обладать точки, лежащие на гранях любого числа измерений от  $n - 2$  до 0 (т. е. до вершин). У выпуклого многогранника точки внутри  $(n - 2)$ -мерных граней никогда не имеют таких окрестностей. Это ведет к усложнению понятия о кривизне. Появляются, так сказать, кривизны разных измерений от 1 до  $n - 1$  соответственно граням измерений от  $n - 2$  до 0. Установление понятия об этих кривизнах возможно элементарным путем. Но мы не будем на этом останавливаться.

**3. Многогранники на  $n$ -мерной сфере и в пространстве Лобачевского.** Трехмерное сферическое пространство есть не что иное, как сфера в четырехмерном пространстве, и в нем естественно определяются выпуклые многогранники. Заменяя отрезки дугами больших кругов, а плоскости — «большими» двумерными сферами, легко обобщить на такое пространство все выводы §1–3, 6 и 7. Бесконечные многогранники здесь отсутствуют. Понятие сферического изображения может быть перенесено в сферическое пространство, несмотря на отсутствие параллельных прямых. Делается это путем сопоставления большой сфере ее центров (на всей трехмерной сфере) и точке — большой сферы, для которой она служит центром. Во избежание двусмысленности, связанной с тем, что большая сфера, как и большой круг, имеет два диаметрально противоположных центра, можно отождествлять диаметрально противоположные точки. Тогда получим так называемое эллиптическое пространство Римана.

Если из центра сферы в четырехмерном пространстве проводить лучи через точки ее поверхности, то многогранникам на сфере сопоставляются многогранные углы. Поэтому теория многогранников в сферическом пространстве эквивалентна теории многогранных углов в четырехмерном евклидовом пространстве.

Совершенно аналогичные соображения применимы к  $n$ -мерному сферическому пространству, которое есть не более, как сфера в  $(n + 1)$ -мерном евклидовом пространстве.

Пространство Лобачевского отличается от евклидова отсутствием аксиомы о единственности прямой, проходящей через данную точку и параллельной данной прямой. Поэтому все выводы, где понятие параллельности не используется (явно или неявно), могут быть дословно перенесены в пространство Лобачевского. Таким путем можно перенести в него понятие о выпуклом многограннике и все выводы о них, не опирающиеся на параллельность, т. е. все, кроме понятий предельного угла и сферического изображения.

Для наглядного представления выпуклых многогранников и любых выпуклых тел в пространстве Лобачевского воспользуемся той его интерпретацией, в которой оно пред-

ставляется внутренностью некоторого шара  $E$  в евклидовом пространстве, а прямые Лобачевского изображаются отрезками евклидовых прямых. Тогда отрезки в смысле геометрий Лобачевского и Евклида совпадают, а потому всякое выпуклое тело пространства Лобачевского изображается евклидовым выпуклым телом, у которого исключены точки, не лежащие внутри шара  $E$ . Обратно, всякое такое евклидовски выпуклое тело  $H$  будет представлять выпуклое тело  $H'$  в пространстве Лобачевского.

Если тело  $H$  подходит к поверхности шара  $E$ , то это означает, что тело  $H'$  бесконечно. А так как  $H$  может подходить к поверхности  $E$  неоднократно, то бесконечное выпуклое тело в пространстве Лобачевского может иметь тем самым несколько (и даже бесконечно много!) «бесконечных концов».

Плоскость Лобачевского изображается куском плоскости, лежащим в шаре  $E$ , а потому выпуклые многогранники пространства Лобачевского изображаются евклидовыми выпуклыми многогранниками с исключением точек, не лежащих внутри шара  $E$ . Бесконечные выпуклые многогранники пространства Лобачевского могут иметь любое конечное число «бесконечных концов», тогда как в евклидовом пространстве бесконечные выпуклые многогранники имеют один такой конец или два (и тогда они являются призмами). Это обстоятельство значительно обогащает и усложняет теорию бесконечных выпуклых многогранников в пространстве Лобачевского.

Конечные многогранники пространства Лобачевского изображаются конечными евклидовыми многогранниками и их теория не представляет почти ничего нового.

Понятие о развертке определяется в пространстве Лобачевского так же, как в евклидовом; нужно только говорить о многоугольниках на плоскости Лобачевского.

Результаты § 1–3, 6, 8 и 7 в части, касающейся конечных многогранников, переносятся в пространство Лобачевского дословно. Что же касается бесконечных многогранников и обобщения понятия о сферическом изображении, то они еще мало изучены и их всестороннее исследование может служить темой чисто геометрической работы, сулящей, надо думать, интересные и содержательные результаты.

---

---

## Глава II

### Метод и результаты

---

---

#### § 1. ЛЕММА КОШИ

1. Все теоремы единственности или, что то же самое, теоремы о равенстве многогранников с некоторыми совпадающими данными, формулируемые дальше в § 3 и 4, доказываются в главах III и VI с помощью единого метода. Это — тот метод, которым О. Коши доказал свою теорему о равенстве замкнутых выпуклых многогранников, одинаково составленных из равных граней. Метод Коши представляет собой одно из прекраснейших рассуждений, какие только знает геометрия; это мнение, по-видимому, всеобщее. Основан метод на одной топологической лемме, которую мы будем называть леммой Коши. Мы докажем сначала эту лемму, а потом покажем, как применил ее сам О. Коши; тем самым станет ясной общая схема ее применения для доказательства теорем единственности.

**Лемма Коши.** Пусть на замкнутом выпуклом многограннике некоторые ребра отмечены знаками плюс или минус. При обходе вокруг вершины, к которой подходят такие отмеченные ребра, могут быть переменны знаки. Утверждается, что не может быть, чтобы при обходе вокруг всякой такой вершины было не менее четырех перемен знака (для иллюстрации см. рис. 60).

Этой лемме можно придать чисто топологическую форму:

Пусть на поверхности, гомеоморфной сфере, задана «сеть ребер», т. е. задано конечное число ломаных (или любых других линий, гомеоморфных каждой прямолинейному отрезку), не имеющих попарно общих точек, кроме концов — «вершин сети». (Такова сеть отмеченных ребер многогранника.) И пусть

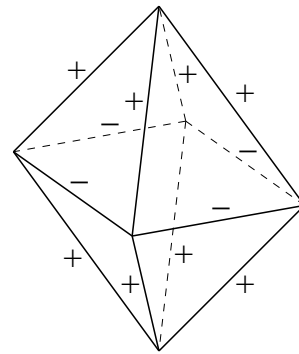


Рис. 60

среди областей, на которые этой сетью разбивается сфера, нет ни одной, ограниченной только двумя ребрами. (Это условие соответствует тому, что на многограннике никакие две вершины не соединяются двумя ребрами<sup>1)</sup>.) Утверждается, что невозможно сопоставить ребрам сети знаки плюс и минус так, чтобы при обходе вокруг каждой вершины было не менее четырех перемен знака.

Доказывается даже несколько больше. Пусть  $N$  — общее число перемен знаков при обходах вокруг всех вершин, а  $E$  — общее число вершин сети. Тогда

$$N \leq 4E - 8. \quad (1)$$

Из этого неравенства утверждение леммы вытекает непосредственно.

2. Воспроизведем доказательство неравенства (1), данное О. Коши. Оно основано на подсчете перемен знаков при обходе вокруг областей, на которые поверхность разбивается ребрами сети. Если при обходе вокруг вершины  $A$  два ребра оказываются соседними, то они будут соседними и при обходе вокруг области, в границу которой они входят. Обратное тоже верно.

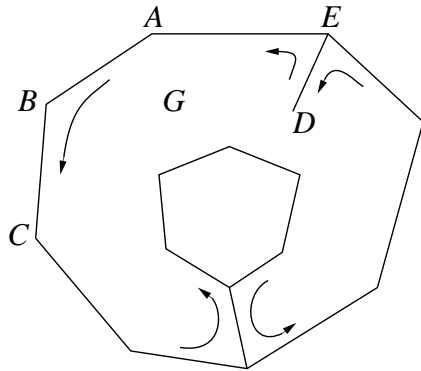


Рис. 61

Поэтому, если подсчитывать переменны знаков, обходя вокруг областей, то общее их число будет тоже  $N$ .

Это простое замечание требует некоторого обоснования. Введем на поверхности ориентацию и будем обходить область, следуя этой ориентации. Предположим, что мы прошли ребро  $AB$ , обходя контур области  $G$ , идя от  $A$  к  $B$ . Будем теперь огибать вершину  $B$ , начиная с ребра  $AB$ , идя по области  $G$  до тех пор, пока не дойдем до следующего ребра  $BC$  (рис. 61). Это ребро и будет следующим за  $AB$  при обходе как вокруг области  $G$ ,

так и вокруг вершины  $B$ . Таким образом, переменна знака от  $AB$  к  $BC$  окажется учтенной в обоих обходах.

Будем продолжать обход области  $G$  далее по ребру  $BC$  от  $B$  к  $C$  и т. д. Этот процесс мы будем продолжать до тех пор, пока не дойдем до пройденного уже ребра и притом так, что при дальнейшем обходе мы должны будем пройти его в том же направлении, что и в первый раз.

<sup>1)</sup>Без этого условия лемма неверна. Достаточно взять на сфере четное число  $2n > 2$  меридианов и попеременно отметить их знаками плюс и минус. Можно дать и более сложные примеры.

Дело в том, что в сети могут быть ребра, не отделяющие область  $G$  от других, например потому, что рассматриваемое ребро имеет в  $G$  свободный конец, или может, например, соединять два ограничивающих  $G$  замкнутых контура (см. рис. 61). Каждое такое ребро будет проходиться дважды: сначала в одном, потом в другом направлении. Таким образом, можно считать, что каждое ребро входит в границу разных областей или одной и той же области дважды и проходится в двух противоположных направлениях. Поэтому, например, если два ребра  $AB$  и  $BC$  разделяют области  $G$  и  $H$ , то в  $G$  они проходятся от  $AB$  к  $BC$ , а в  $H$  от  $BC$  к  $AB$ , что дает полный обход вокруг  $B$ . Если вершина  $D$  есть свободный конец ребра  $DE$ , то при обходе вокруг  $G$  мы огибаем вершину  $D$  и возвращаемся к тому же ребру  $DE$ . Тем самым мы обойдем также вокруг вершины  $D$ .

Говоря, что область имеет  $n$  ребер, мы будем иметь в виду, что ребро, не отделяющее ее от другой области, считается дважды. Число перемен знака при обходе вокруг области не может быть больше числа  $n$  ее ребер, а кроме того, оно четно, так как при полном обходе мы возвращаемся к исходному знаку. Поэтому, если  $F_n$  есть число областей с  $n$  ребрами, то для общего числа  $N$  перемен знаков мы получаем оценку

$$N \leq 2F_3 + 4F_4 + 4F_5 + \dots \quad (2)$$

Здесь мы пользуемся тем, что по условию области с двумя ребрами отсутствуют, т. е.  $F_2 = 0$ .

Теперь преобразуем оценку (2), используя обобщенную формулу Эйлера. Если  $E, K, F$  — числа вершин, ребер и областей сети, то

$$E - K + F \geq 2. \quad (3)$$

Для связной сети, согласно теореме Эйлера,  $E - K + F = 2$ , а для сети из  $H$  связных компонент  $E - K + F = 1 + H$ , как это доказано в §7 главы I (теорема 5).

Так как каждое ребро либо принадлежит двум областям, либо считается дважды у одной области, то

$$2K = \sum_n nF_n. \quad (4)$$

Общее число областей  $F$  есть

$$F = \sum_n F_n \quad (5)$$

Из формулы (3) следует, что

$$4E - 8 \geq 4K - 4F,$$

а подставляя сюда  $K$  и  $F$  из (4) и (5), получаем

$$4E - 8 \geq \sum_n 2(n-2)F_n = 2F_3 + 4F_4 + 6F_5 + \dots \quad (6)$$

Правая часть этого неравенства не меньше правой части неравенства (2), потому что при  $n \geq 3$  число  $2(n-2)$  не меньше ближайшего к  $n$  снизу четного числа. Следовательно, из (2) и (6) следует

$$N \leq 4E - 8,$$

т. е. формула (1), что и требовалось доказать.

Из неравенства (1) можно извлечь небольшое усиление леммы Коши:

*В условиях леммы Коши невозможно, чтобы не менее четырех перемен знака было вокруг всех вершин, кроме трех, вокруг которых имеются по две перемен знака, либо кроме двух, вокруг одной из которых нет перемен знака, а вокруг другой их только две, либо кроме одной, вокруг которой любое число перемен знака меньше четырех. Иначе было бы  $N \geq 4E - 6$ , вопреки неравенству (1).*

Этой уточненной леммой Коши мы будем иметь случай воспользоваться.

**3.** Приведенное доказательство леммы Коши ввиду своего вычислительного характера кажется несколько таинственным и не раскрывает наглядного основания этой леммы. Поэтому будет, пожалуй, не лишним дать чисто геометрическое ее доказательство.

Доказательство будем вести от противного. Допустим, что в некоторой сети на сфере дана такая расстановка знаков на ее ребрах, что вокруг каждой вершины имеется не менее четырех перемен знака. Возьмем какое-либо ребро  $AB$  этой сети, помеченное плюсом. К вершине  $B$  подходят кроме него другие ребра так, что вокруг  $B$  имеется не менее четырех перемен знака. Поэтому из  $B$  выходит хотя бы одно ребро  $BC$ , помеченное плюсом и такое, что вместе с ребром  $AB$  они разделяют подходящие к  $B$  ребра, отмеченные минусами. Из вершины  $C$  опять исходит помеченное плюсом ребро  $CD$ , которое вместе с  $BC$  разделяет ребра, отмеченные минусами. Будем идти, таким образом, от ребра  $AB$  по ребрам  $BC$ ,  $CD$  и т. д. Так как число ребер конечно, то в некоторый момент мы вернемся к уже пройденной вершине  $O$  и получим некоторый замкнутый контур  $L$  (рис. 62). В частном случае  $O$  может совпадать с  $A$ . Контур  $L$  разбивает сферу на две области; рассмотрим одну из них,  $G$ .

Все ребра контура  $L$  помечены плюсами и каждая пара соседних ребер разделяет ребра, отмеченные минусами, кроме, может быть, ребер, сходящихся в вершине  $O$ . Поэтому в области  $G$  содержатся ребра с минусами, исходящими из всех ее вершин, кроме, может быть,  $O$ .

Покажем, что внутри области  $G$  содержатся вершины сети. Если бы это было не так, то концы всех содержащихся в ней ребер лежали бы в ее вершинах. Но из всех вершин, кроме, может быть, одной  $O$ , внутрь области  $G$  идут ребра, а в таком случае какие-нибудь две соседние вершины должны быть соединены таким ребром. (Чтобы убедиться в этом, достаточно представить себе  $G$  в виде многоугольника; ребра внутри  $G$  изображаются непересекающимися линиями, соединяющими его вершины. Но непересекающиеся диагонали можно провести из всех вершин, кроме двух. Если же ребра идут из всех вершин, кроме одной, то среди них есть ребро, соединяющее две соседние вершины. Строгое доказательство проводится индукцией по числу вершин.)

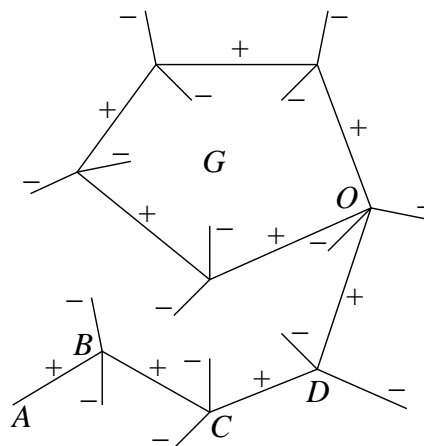


Рис. 62

Но если две соседние вершины  $X, Y$  контура  $L$  соединены ребром внутри  $G$ , то получается двугольная область, ограниченная двумя ребрами  $XY$ . И если внутри  $G$  нет вершин, то это будет двугольная область в сети. Таких областей в сети нет по условию. Следовательно, предположение об отсутствии внутри  $G$  вершин сети неверно.

Пусть  $A_1$  — вершина внутри  $G$ ; из нее исходит некоторое ребро  $A_1B_1$ , отмеченное плюсами. Так же как и раньше, мы заключаем, что к вершине  $B_1$  подходит еще ребро  $B_1C_1$ , тоже отмеченное плюсом и разделяющее вместе с  $A_1B_1$  ребра, отмеченные минусами, подходящие к  $B_1$ .

Будем идти, таким образом, по ребрам  $A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1$  и т. д. до тех пор, пока не случится одно из двух: либо мы вернемся к уже пройденной вершине, нигде не выходя за пределы  $G$ , либо мы дойдем до границы области  $G$  в некоторой ее вершине  $N$ .

В первом случае мы получаем замкнутый контур  $L_1$ , который выделяет из  $G$  новую односвязную область  $G_1$ . К этой области  $G_1$  приложимы все те рассуждения, какие мы применили к  $G$ .

Во втором случае мы пойдем от вершины  $N$  в обратную сторону до исходной вершины  $A_1$  и дальше за нее. Если полученный при этом путь замкнется, то будем иметь опять первый случай. Если же он кончится в некоторой



вершине  $M$  области  $G$ , то получим линию  $MN$ , которая разобьет  $G$  на две односвязные части  $G'$  и  $G''$ .

Если вершины  $M$  и  $N$  отличны от  $O$ , то из каждой из них идут ребра с минусами внутрь  $G$ , т. е. внутрь  $G'$  или  $G''$ . Поэтому хотя бы одна из областей  $G'$  и  $G''$  — такая, что внутрь нее из всех вершин, кроме, может быть, одной, идут ребра с минусами. (Три возможных здесь случая изображены на рис. 63,  $a$ ,  $b$ ,  $в$ ; под каждым отдельным рисунком указаны область, обладающая требуемым свойством, и ее исключительная вершина.) Мы обозначим эту область  $G_1$ . Если, скажем,  $N$  совпадает с  $O$ , то за  $G_1$  берем ту из областей  $G'$  или  $G''$ , в которую идут из вершины  $M$  ребра с минусами. Таким образом, во всех случаях из области  $G$  можно выделить область  $G_1$ , обладающую теми же свойствами, что и область  $G$ . Но тогда, повторяя наше рассуждение, мы можем в  $G_1$  выделить область  $G_2$  и т. д. до бесконечности. Это, однако, невозможно ввиду конечности числа ребер сети. Следовательно, вообще не может быть сети с предполагаемой расстановкой знаков, что и требовалось доказать.

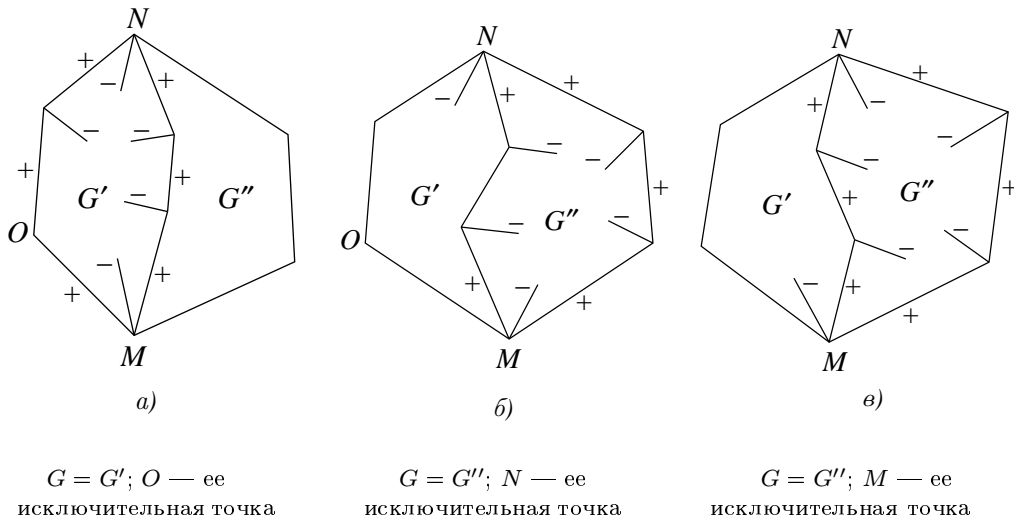


Рис. 63

4. Теперь покажем, как применяется лемма Коши к доказательству его теоремы о равенстве замкнутых выпуклых многогранников, одинаково составленных из равных граней.

О. Коши доказывает лемму: *если два выпуклых многогранных угла составлены из соответственно равных плоских углов, следующих друг за другом в одинаковом порядке, то либо эти многогранные углы равны, либо раз-*

ности их соответственных двугранных углов меняют знак не менее четырех раз при обходе вокруг вершины. (Эта лемма доказывается в §1 главы III.)

Пусть теперь  $P_1$  и  $P_2$  — два многогранника, удовлетворяющие условиям теоремы Коши. Если все двугранные углы их равны, то сами многогранники равны. Если же не все двугранные углы равны, то пометим плюсом (минусом) каждое ребро многогранника  $P_1$ , двугранный угол при котором больше (меньше), чем при соответствующем ребре многогранника  $P_2$ . Тогда, согласно приведенной только что лемме, вокруг каждой вершины, к которой подходит хотя бы одно отмеченное ребро, будет не менее четырех перемен знака. Но по лемме Коши это невозможно. Следовательно, у многогранников  $P_1$  и  $P_2$  не может быть соответственных неравных двугранных углов, и теорема Коши доказана<sup>2)</sup>.

Конечно, не во всех случаях лемма Коши применяется так непосредственно. Однако простые дополнительные рассуждения, если они только необходимы, всегда приводят к цели при том необходимом условии, что заранее доказаны леммы, обеспечивающие нужные свойства расстановки знаков на рассматриваемой сети.

Поэтому главы III и VI, посвященные теоремам о равенстве многогранников, начинаются именно с доказательства таких лемм.

## §2. ЛЕММА ОБ ОТОБРАЖЕНИИ<sup>3)</sup>

1. Все теоремы существования для выпуклых многогранников, которые формулированы дальше в §3–5, будут доказаны (не считая двух-трех самых простых теорем) единым методом, основанным на одной топологической теореме, установленной впервые Л. Э. Я. Брауэром в 1912 г. и известной под названием **теоремы об инвариантности области**: *если область, т. е. открытое множество  $G$   $n$ -мерного евклидова пространства, гомеоморфно отображается на какое-либо подмножество  $G'$   $n$ -мерного евклидова пространства, то  $G'$  также является областью<sup>4)</sup>*. Из этой теоремы мы выводим лемму, которую называем «леммой об отображении»; в единообразном

<sup>2)</sup>Исторические сведения о теореме Коши можно найти в [200, 278, 281]. Варианты доказательства леммы о деформациях выпуклого многогранного угла см. [273, 344, 352]. Один аналог, способный заменять эту лемму, предложен А. В. Погореловым и доказан в [83], другой — в [107]. Утверждение, могущее заменять лемму Коши о расстановке знаков, см. в [213]. На этих основах предложен ряд доказательств теоремы Коши [159, 170, 205, 213]. Принципиально иным путем она доказана в [46]. — Прим. В. А. Залгаллера.

<sup>3)</sup>В этом параграфе используются некоторые сведения из топологии. Читатель, не знакомый с ней, должен будет прочесть сначала §8 этой главы, где дается в простейшей форме весь необходимый материал. Впрочем, лемма об отображении используется лишь в гл. IV, VII и IX.

<sup>4)</sup>Доказательство этой теоремы излагается в §9 этой главы. Впрочем, само ее доказательство не играет для нас роли.

применении этой леммы и состоит метод доказательств существования, о котором идет речь.

Мы будем называть  *$n$ -мерным многообразием* такое топологическое пространство, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную внутренней  $n$ -мерной куба и каждые две точки которого можно заключить в непересекающиеся окрестности<sup>5)</sup>.

Напомним, что множество  $M$  (в топологическом пространстве) называется *связным*, если его нельзя разбить на два непустых замкнутых относительно него подмножества (т. е. так, чтобы всякая точка прикосновения каждого из этих подмножеств  $M^i$ , принадлежащая  $M$ , содержалась бы в  $M^i$ ).

*Связной компонентой* множества  $M$  называется всякое связное подмножество  $M'$  множества  $M$ , не содержащееся уже ни в каком его связном подмножестве, не считая, конечно, самого  $M'$ . Множество  $M$  есть объединение своих непересекающихся компонент.

**2. Лемма об отображении.** Пусть  $A$  и  $B$  — два многообразия одного и того же числа измерений  $n$ . Пусть дано отображение  $\varphi$  многообразия  $A$  в многообразии  $B$ , удовлетворяющее следующим условиям:

1) В каждой связной компоненте многообразия  $B$  содержатся образы точек из  $A$ .

2)  $\varphi$  взаимно однозначно.

3)  $\varphi$  непрерывно.

4) Если точки  $B_m$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) многообразия  $B$  являются образами точек  $A_m$  многообразия  $A$  и  $B_m$  сходятся к точке  $B$ , то в  $A$  существует точка  $A$ , отображающаяся в  $B$ , такая, что имеется подпоследовательность  $A_{m_i}$  из точек  $A_m$ , сходящаяся к  $A$ .

При этих условиях  $\varphi(A) = B$ , т. е. все точки многообразия  $B$  оказываются образами точек многообразия  $A$ .

Отображение  $\varphi$  в силу условия 4) взаимно непрерывно. Действительно, пусть  $B_m = \varphi(A_m)$ ,  $B = \varphi(A)$  и  $B_m$  сходятся к  $B$  ( $m = 1, 2, \dots$ ). Допустим, что точки  $A_m$  не сходятся к  $A$ . Тогда есть такая окрестность точки  $A$ , вне которой лежит бесконечно много точек  $A_m$ ; пусть это будут точки  $A_{m_1}, A_{m_2}, \dots$ . Мы получаем, что<sup>6)</sup>

$$B_{m_j} = \varphi(A_{m_j}); \quad B_{m_j} \rightarrow B; \quad B = \varphi(A),$$

<sup>5)</sup> Иногда в понятие многообразия включаются еще требования связности и возможности разбиения на симплексы; эти требования мы отбрасываем.

<sup>6)</sup> Стрелка обозначает сходимости: точки  $B_{m_j}$  сходятся к  $B$ , т. е. для всякой «сколь угодно малой» окрестности точки  $B$  можно указать такой номер, что точки  $B_{m_j}$  с большими номерами  $j$  все содержатся в этой окрестности.

и никакая подпоследовательность точек  $A_{m_j}$  не может сходиться к  $A$ . Но это противоречит условию 4, так как по взаимной однозначности отображения  $\varphi$  только данная точка  $A$  отображается в  $B$ . Следовательно, точки  $A_m$  должны сходиться к  $A$ , т. е.  $\varphi$  взаимно непрерывно.

Так как отображение  $\varphi$  взаимно однозначно и взаимно непрерывно, то оно является гомеоморфизмом. Отсюда на основании теоремы об инвариантности области следует, что образ многообразия  $\mathbf{a}$ , т. е.  $\varphi(\mathbf{A})$ , есть открытое множество в  $\mathbf{B}$ . Действительно, пусть  $B \in \varphi(\mathbf{A})$ , т. е. является образом некоторой точки  $A$  из  $\mathbf{A}$ ; пусть  $U_B$  — окрестность точки  $B \in \mathbf{B}$ , гомеоморфная внутренности куба, т. е. гомеоморфная  $n$ -мерному евклидову пространству. По непрерывности отображения  $\varphi$  у точки  $A$  существует окрестность  $V_A$ , образ которой содержится в  $U_B$ . Точка  $A$  имеет окрестность, гомеоморфную  $n$ -мерному кубу; пересечение ее с  $V_A$  также есть окрестность точки  $A$  и отображается в  $U_B$ . Эта окрестность  $W_A$  гомеоморфна, очевидно, открытому множеству  $n$ -мерного евклидова пространства. Поэтому на основании теоремы об инвариантности области ее топологический образ  $\varphi(W_A)$  в  $U_B$  есть открытое множество, т. е. является окрестностью точки  $B$ . Следовательно, всякая точка  $B \in \varphi(\mathbf{A})$  имеет окрестность, содержащуюся в  $\varphi(\mathbf{A})$ , а это означает, что  $\varphi(\mathbf{A})$  — открытое множество.

Вместе с тем из условия 4 следует, что  $\varphi(\mathbf{A})$  также замкнуто в  $\mathbf{B}$ . Действительно, если точки  $B_n = \varphi(A_n)$  сходятся к  $B$ , то по условию 4 существует точка  $A$  из  $\mathbf{A}$ , отображающаяся в  $B$ , т. е.  $B$  принадлежит  $\varphi(\mathbf{A})$ , и следовательно,  $\varphi(\mathbf{A})$  замкнуто.

Но если  $\varphi(\mathbf{A})$  и открыто, и замкнуто в  $\mathbf{B}$ , и имеет точки в каждой связной компоненте многообразия  $\mathbf{B}$ , то оно простирается на все  $\mathbf{B}$ . Действительно, так как  $\varphi(\mathbf{A})$  открыто, то его дополнение  $\mathbf{B} \setminus \varphi(\mathbf{A})$  замкнуто. Поэтому пересечения множеств  $\varphi(\mathbf{A})$  и  $\mathbf{B} \setminus \varphi(\mathbf{A})$  любым множеством  $M$  из  $\mathbf{B}$  замкнуты относительно этого  $M$ <sup>7)</sup>. Возьмем в качестве  $M$  связную компоненту  $\mathbf{B}'$  многообразия  $\mathbf{B}$ . Тогда формула  $\mathbf{B}' = [\varphi(\mathbf{A}) \cap \mathbf{B}] \cup [(\mathbf{B} \setminus \varphi(\mathbf{A})) \cap \mathbf{B}']$  дает разложение компоненты  $\mathbf{B}'$  на два замкнутых относительно нее множества. По связности множества  $\mathbf{B}'$  такое разложение невозможно, так что одно из множеств должно быть пустым. Но по условию 1 в  $\mathbf{B}'$  есть точки из  $\varphi(\mathbf{A})$ , т. е.  $\mathbf{B}' \cap \varphi(\mathbf{A})$  не пусто. Поэтому именно  $(\mathbf{B} \setminus \varphi(\mathbf{A})) \cap \mathbf{B}'$  пусто. Следовательно,  $\mathbf{B}' = \varphi(\mathbf{A}) \cap \mathbf{B}'$ . Суммируя по всем связным компонентам, получим  $\mathbf{B} = \varphi(\mathbf{A})$ . Лемма доказана.

**3.** Покажем теперь, как лемма об отображении применяется к доказательствам существования. Наметим, например, доказательство теоремы Минковского о существовании замкнутого выпуклого многогранника с дан-

<sup>7)</sup>Замкнутое множество по определению содержит все свои точки прикосновения. Поэтому общая часть, например, множеств  $\varphi(\mathbf{A})$  и  $M$  содержит все свои точки прикосновения, содержащиеся в  $M$ , и, следовательно, замкнута относительно  $M$ .

ными направлениями<sup>8)</sup> и площадями граней. (Детальное доказательство см. § 1 главы VII.)

Выясним сначала необходимые условия, которым должны удовлетворять единичные векторы внешних нормалей  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_n$  и площади граней  $F_1, F_2, \dots, F_n$ . Эти условия следующие:

- 1) векторы  $\mathbf{n}_i$  не компланарны;
- 2) все  $F_i > 0$ ;
- 3)  $\sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i F_i = 0$ .

Необходимость первых двух условий очевидна. Третье условие означает равенство нулю векторной площади замкнутого многогранника. Доказывается оно просто.

Пусть  $T$  — какая-либо плоскость и  $\mathbf{n}$  — нормаль к ней. Тогда скалярное произведение  $\mathbf{n}\mathbf{n}_i$  есть косинус угла между  $\mathbf{n}$  и нормалью  $\mathbf{n}_i$  к  $i$ -й грани; поэтому  $(\mathbf{n}\mathbf{n}_i)F_i$  есть не что иное, как площадь проекции этой грани на плоскость  $T$ , взятая с соответствующим знаком в зависимости от угла между  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{n}_i$ .

Если замкнутый выпуклый многогранник спроектировать на плоскость  $T$ , то его проекция покроет на ней некоторый многоугольник и притом дважды: один раз «положительно» и другой раз «отрицательно». В результате сумма проекций граней со знаком будет равна нулю, т. е.

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{n}\mathbf{n}_i F_i = \mathbf{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i F_i = 0.$$

А так как плоскость  $T$ , а значит, и вектор  $\mathbf{n}$  можно выбрать произвольно, то необходимо

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i F_i = 0.$$

Теорема Минковского утверждает, что три указанных условия не только необходимы, но и достаточны для существования выпуклого многогранника с данными нормальными векторами  $\mathbf{n}_i$  и площадями граней  $F_i$ , т. е. *если данные единичные векторы  $\mathbf{n}_i$  и числа  $F_i$  удовлетворяют этим условиям, то существует замкнутый выпуклый многогранник с внешними нормальными векторами  $\mathbf{n}_i$  и площадями граней  $F_i$ .*

Пусть  $\mathbf{B}$  — множество всех комплексов чисел  $F_1, \dots, F_n$  (при данных неизменных векторах  $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_n$ , удовлетворяющих поставленным условиям).  $\mathbf{B}$  можно изобразить как подмножество  $n$ -мерного пространства  $R^n$  с

<sup>8)</sup> Направление грани определяется внешней нормалью к этой грани.

координатами  $F_1, \dots, F_n$ . Векторное равенство  $\sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i F_i = 0$  эквивалентно трем скалярным равенствам и, следовательно, определяет в  $R^n$   $(n-3)$ -мерную плоскость — линейное пространство  $R^{n-3}$ . В этом линейном пространстве неравенства  $F_i > 0$  определяют некоторое открытое множество. Оно выпукло как пересечение  $R^{n-3}$  с открытыми полупространствами  $F_i > 0$ , и, следовательно, связно. Это и будет наше многообразие  $\mathbf{B}$ . (Предполагается, что  $\mathbf{B}$  не пусто: теорема существования говорит, что если существуют  $F_i$ , удовлетворяющие условиям, т. е. если  $\mathbf{B}$  не пусто, то существует и многогранник.)

Рассмотрим теперь все замкнутые выпуклые многогранники  $P$  с данными внешними нормальными  $\mathbf{n}_i$  к их граням. Такие многогранники существуют. Действительно, по условию векторы  $\mathbf{n}_i$  не компланарны, и существуют такие  $F_i > 0$ , что  $\sum_{i=1}^n \mathbf{n}_i F_i = 0$ . Поэтому векторы  $\mathbf{n}_i$  не направлены в одно полупространство. В таком случае плоскости, касающиеся какого-нибудь шара в точках с нормальными  $\mathbf{n}_i$ , ограничивают конечный (телесный) выпуклый многогранник. Его граница и есть замкнутый выпуклый многогранник с внешними нормальными  $\mathbf{n}_i$  к его граням.

Каждый многогранник  $P$  определяется заданием опорных чисел  $h_1, h_2, \dots, h_n$  (см. §2 главы I). Поэтому множество всех многогранников  $P$  можно представить как подмножество  $n$ -мерного пространства  $R^n$  с координатами  $h_1, \dots, h_n$ . Легко убедиться, что это подмножество открыто, потому что при малых смещениях плоскостей граней грани не исчезают.

Объединим в один класс все многогранники  $P$ , равные и параллельные друг другу. Так как перенос определяется тремя составляющими, то каждый класс задается  $n-3$  переменными. (Можно, например, выбрать в качестве представителя класса многогранник с центром тяжести в начале.) Множество всех этих классов  $\mathbf{A}$  образует  $(n-3)$ -мерное многообразие  $\mathbf{A}$ .

Итак, многообразия  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  имеют одно и то же число измерений  $n-3$ .

Так как площади граней многогранника всегда удовлетворяют условиям теоремы, то мы имеем естественное отображение  $\varphi$  многообразия  $\mathbf{A}$  в  $\mathbf{B}$ . Если мы покажем, что оно удовлетворяет всем условиям леммы об отображении, то тем самым окажется, что всякая точка из  $\mathbf{B}$  есть образ точки из  $\mathbf{A}$ , т. е. что для всякой совокупности чисел  $F_1, \dots, F_n$ , удовлетворяющей условиям теоремы, существует многогранник с такими площадями граней.

Так как  $\mathbf{B}$  связно, то условие 1 леммы об отображении выполняется автоматически. Взаимная однозначность отображения  $\varphi$  следует из теоремы единственности, также открытой Минковским (доказательство — в §3 главы VI): при данных нормальных  $\mathbf{n}_i$  и площадях граней  $F_i$  замкнутый выпуклый многогранник единствен с точностью до переноса. На языке многооб-

разий  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  это означает, что каждой данной точке  $B \in \mathbf{B}$  может отвечать только один класс  $A \in \mathbf{A}$ . Непрерывность отображения  $\varphi$  очевидна из непрерывной зависимости площадей граней от положения граней, т. е. от опорных чисел. Остается четвертое условие леммы, которое доказывается без особого труда (см. § 1 главы VII).

Таким образом, мы убеждаемся, что все условия леммы об отображении выполнены, и теорема доказана.

4. На этом примере видны основные условия применимости нашего метода. Он применим в таких случаях, когда теорема существования имеет форму: «для всякого  $a$  существует  $b$  и, обратно, для всякого  $b$  существует  $a$ »<sup>9)</sup>. В нашем примере  $a$  обозначает замкнутый выпуклый многогранник,  $b$  — совокупность чисел  $F_i$  и соответствующих им единичных векторов  $\mathbf{n}_i$ , причем  $F_i$  и  $\mathbf{n}_i$  допускаются только такие, для которых выполняются условия теоремы. Теорема Минковского утверждает, что как для всякого многогранника  $a$  существует совокупность  $b$  площадей и нормалей его граней, так и для всякой совокупности  $b$  чисел  $F_i$  и векторов  $\mathbf{n}_i$ , удовлетворяющих нужным условиям, существует соответствующий многогранник  $a$ . Такого рода утверждения суть теоремы о необходимых и достаточных условиях. Так, в нашем примере речь идет о необходимых и достаточных условиях того, чтобы данные числа  $F_i$  и векторы  $\mathbf{n}_i$  могли быть соответственно площадями и нормальями граней замкнутого выпуклого многогранника. Необходимость условий часто оказывается очевидной, и существенным оказывается только доказательство их достаточности. Все доказываемые в этой книге теоремы существования или теоремы о необходимых и достаточных условиях имеют именно этот характер.

Далее, в предлагаемом методе доказательству существования должна предшествовать соответствующая теорема единственности. Само соответствие  $\varphi$  непосредственно рассматриваемых объектов бывает обычно естественно определенным; для обеспечения же взаимной однозначности отображения многообразие специально строится с учетом «точности» соответствующей теоремы единственности, для чего при определении элементов многообразия интересующие нас объекты объединяются в классы или снабжаются дополнительными различиями.

Так, в доказательстве теоремы Минковского многообразии  $\mathbf{A}$  состоит из классов многогранников, отличающихся лишь параллельным переносом. Или другой пример: при доказательстве существования многогранника с данной разверткой соответствие развертки многограннику становится естественно однозначным после того, как многогранник рассматривается вместе с нанесенной на нем сетью ребер некоторой развертки. Мы ограничиваемся затем развертками и сетями некоторого фиксированного строения. Наконец, имея целью сделать соответствие и взаимно однозначным, мы объединяем в один класс многогранники, совмещающиеся вместе с нанесенными на них сетями движением или движением и отражением. Рассматриваемое многообразие  $\mathbf{A}$  состоит из этих классов. При этом могло бы быть, что  $\mathbf{A}$  пусто. Однако в доказательстве первого требования леммы об отображении, очевидно, уже содержится доказательство непустоты многообразия  $\mathbf{A}$ . Вместе с тем, говоря формально, пустое множество тоже есть  $n$ -мерное многообразие, потому что в определении многообразия требование непустоты отсутствует.

5. Этот общий метод приложим, конечно, не только к доказательствам существования для многогранников. Например, пользуясь им, можно доказать «основную теорему алгебры» о существовании  $n$  корней у многочлена  $n$ -й степени. В качестве многообра-

<sup>9)</sup>Этот факт сам по себе, конечно, не означает наличия однозначного соответствия между объектами.

зия  $\mathbf{B}$  берется многообразии многочленов  $n$ -й степени с комплексными коэффициентами и со старшим коэффициентом единица, исключая многочлены с кратными корнями. В качестве  $\mathbf{A}$  берется многообразии совокупностей  $A$  по  $n$  различных комплексных чисел без указания порядка. Оба многообразия  $2n$ -мерные. Такое доказательство дано в моей работе [10]. Можно дать другие примеры применимости того же метода к задачам алгебры. Приложение к одной теореме существования в теории функции комплексной переменной было дано Г. М. Голузиным [94]. Возможно, известны и другие, может быть еще более ранние, приложения того же метода<sup>10)</sup>. Стоит еще отметить, что пока нет никакого другого метода, не считая аналогичного метода, о котором речь в § 6 п° 7, 8, который позволял бы доказать все полученные в этой книге теоремы существования. Кстати сказать, это суть вообще все пока известные общие теоремы существования рассматриваемого типа для выпуклых многогранников (т. е. при условии, что речь идет о данных, определяющих многогранник). Только для теоремы Минковского и ей аналогичных (теоремы 9 и 11 § 4) известны другие методы доказательства<sup>11)</sup>.

### § 3. ЗАДАНИЕ МНОГОГРАННИКА РАЗВЕРТКОЙ (ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ ГЛАВ III, IV и V)

1. Речь идет о склеивании многогранника из развертки в том смысле, как это было определено в § 6 главы I.

В § 6 и 7 главы I были выяснены условия, которым должна удовлетворять развертка замкнутого выпуклого многогранника:

1) «Условие положительности кривизны»: сумма углов, сходящихся при склеивании в одной вершине развертки, должна быть не более  $2\pi$  для каждой вершины.

Сумма углов, сходящихся в одной вершине выпуклого многогранника, всегда меньше  $2\pi$ . Допускаемая возможность равенства суммы углов  $2\pi$  означает только, что вершина развертки может дать при склеивании не вершину многогранника, но точку внутри грани или ребра.

Следовательно, это условие необходимо для развертки всякого выпуклого многогранника.

2) «Условие Эйлера»: если  $f$ ,  $k$ ,  $e$  обозначают число многоугольников, число ребер и число вершин развертки, то должно быть  $f - k + e = 2$ .

Необходимость этого условия для развертки замкнутого выпуклого многогранника доказана теоремой 6 § 7 главы I. (Напоминаем, что склеиваемые стороны и вершины считаются соответственно за одно ребро или одну вершину развертки и что все многоугольники развертки предполагаются по условию простыми.)

<sup>10)</sup> Например, в самом примитивном одномерном случае ему соответствует известный метод продолжения по параметру, применявшийся еще С. Н. Бернштейном [66, с. 79]. — Прим. В. А. Залгаллера.

<sup>11)</sup> На появившиеся позже альтернативные доказательства отдельных теорем будет указано в подстрочных примечаниях. — Прим. В. А. Залгаллера.



Казалось, нужно было бы добавить еще, что развертка не содержит бесконечных многоугольников и не имеет границы. Но теоремами 7 и 8 § 7 главы I установлено, что для таких разверток всегда  $f - k + e < 2$ , а потому условие Эйлера уже обеспечивает конечность многоугольников и отсутствие границы.

**2.** Если считать за замкнутый выпуклый многогранник любой дважды покрытый выпуклый многоугольник, т. е. склеенный из двух наложенных друг на друга равных многоугольников, то можно утверждать следующее:

1. *Формулированные условия не только необходимы, но и достаточны для того, чтобы из данной развертки можно было склеить замкнутый выпуклый многогранник. При этом таких многогранников может быть только два: один является зеркальным отображением другого или, что то же самое, один получается из другого выворачиванием на левую сторону.* (Если многогранник имеет плоскость симметрии, то это дает тот же многогранник. Многогранники, различающиеся только положением в пространстве, не считаются различными.)

Случай дважды покрытого многоугольника мы неизбежно должны принять во внимание, потому что развертка может, например, состоять из двух квадратов, которые по заданию нужно склеивать друг с другом по сторонам. Очевидно, все поставленные условия здесь выполнены. Хотя данный случай представляет вырождение, тем не менее мы не исключаем его, потому что это усложнило бы формулировку нашего результата. Далее, в этом параграфе и в главах III и IV, посвященных доказательству указанного результата и других, с ним связанных, дважды покрытый выпуклый многоугольник считается выпуклым многогранником, если только явно не оговорено противное.

Собственно говоря, мы будем непосредственно доказывать теорему 1 в несколько иной формулировке. Как было доказано в § 7 главы I (теорема 6), развертка, удовлетворяющая условию Эйлера  $f - k + e = 2$ , гомеоморфна сфере. Поэтому теорему 1 можно формулировать так:

1\*. *Из всякой гомеоморфной сфере развертки, имеющей суммы углов при вершинах  $\leq 2\pi$ , можно склеить замкнутый выпуклый многогранник и при том только один с точностью до движения или движения и отражения.*

**3.** Преимущество условия Эйлера состоит в том, что оно, так же как другие условия, налагаемые на развертку по ее определению проверяется без труда для каждой данной развертки, и потому всегда имеется фактическая возможность решить вопрос, можно ли из нее склеить замкнутый выпуклый многогранник или нет. При этом вовсе не предполагается заранее, что из данной развертки вообще можно склеить какой бы то ни было многогранник: такая возможность доказывается, если выполнены указанные условия. Так как такой выпуклый многогранник может быть только

один (с точностью до движения и «выворачивания на левую сторону»), то при склеивании развертки он получается как бы сам собой<sup>12)</sup>. Однако мы не можем сказать заранее, какой именно он получится. Дело в том, что многоугольники и ребра развертки могут вовсе не соответствовать граням и ребрам многогранника; заранее известно только, что вершинами многогранника будут те вершины развертки, суммы углов вокруг которых  $< 2\pi$ . Примеры разверток, ребра которых не отвечают ребрам многогранника, были приведены в §6 главы I (рис. 37 и 38).

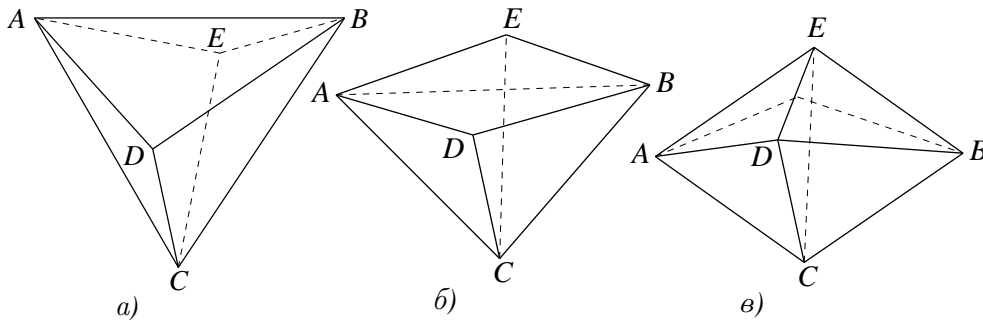


Рис. 64

Определить по развертке строение многогранника, т. е. найти в развертке истинные его ребра, представляется задачей, общее решение которой, по-видимому, безнадежно трудно. Она решается совсем просто лишь для тетраэдра<sup>13)</sup>. Дело в том, что с увеличением числа вершин число различных строений многогранников растет крайне быстро. Если  $n(e)$  — число строений многогранника с  $e$  вершинами, то  $n(4) = 1$ ,  $n(5) = 2$ ,  $n(6) = 7$ ,

<sup>12)</sup> Из развертки выпуклого многогранника можно, конечно, склеить сколько угодно невыпуклых многогранников. Стоит лишь, например, продавить многогранник в окрестности какой-нибудь из вершин. Поэтому слова «сам собой» следует понимать в том смысле, что при склеивании нужно лишь следить за выпуклостью.

<sup>13)</sup> Ребра многогранника должны быть кратчайшими линиями, соединяющими вершины развертки, где суммы углов  $< 2\pi$ . Кроме того, между плоскими углами граней при одной вершине должны выполняться неравенства: каждый из углов не больше суммы остальных. Если уметь проводить в развертке кратчайшие, для чего можно указать эффективный способ, то получается конечное число возможностей, из которых нужно выбрать одну, соответствующую строению многогранника. Следовательно, имеется принципиальная возможность решить задачу о склеивании многогранника эффективно. Впрочем, мне думается, эффективность не интересна: более важно то, что в силу единственности многогранник получается при склеивании «сам собой», какой нужно.

$n(7) = 34$ ,  $n(8) = 257$ <sup>14)</sup>. Кроме того, при непрерывном изменении развертки строение многогранника может меняться. Простой пример тому дается на рис. 64, где многогранники  $b$  и  $c$  получаются из  $a$  путем непрерывного опускания вершин  $A$  и  $B$ . Штриховая линия  $AB$  на многогранниках  $b$  и  $c$  соответствует ребру его развертки, которая имеет то же строение, что и естественная развертка многогранника  $a$ .

4. Поскольку развертка не связана с многогранником однозначно, естественно спросить, какие однозначно связанные с многогранником данные заключаются в развертке.

Как уже говорилось в п° 2 §6 главы I, развертка определяет «внутреннюю метрику» многогранника. Пусть  $X$  и  $Y$  — две точки многогранника  $P$ ; за расстояние между ними на многограннике  $P$  принимается точная нижняя граница длин соединяющих их ломаных, лежащих на  $P$ . Это расстояние  $\rho_R(X, Y)$  как функция пары точек  $X, Y$  и называется внутренней метрикой многогранника.

Пусть  $R$  — развертка многогранника  $P$ . Если  $X'$  и  $Y'$  — две точки развертки, то их можно соединить в развертке  $R$  ломаными, составленными из отрезков, лежащих на многоугольниках развертки и соединяющихся друг с другом в отождествленных точках границ этих многоугольников. Точную нижнюю границу длин таких ломаных естественно считать расстоянием  $\rho_R(X', Y')$  между точками  $X'$  и  $Y'$  в развертке  $R$ . Если при склеивании из развертки  $R$  многогранника  $P$  точки  $X', Y'$  переходят в точки  $X, Y$  на  $R$ , то, очевидно,  $\rho_R(X', Y') = \rho_R(X, Y)$ . Иными словами, склеивание многогранника  $P$  из развертки  $R$  есть не что иное, как изометрическое отображение  $R$  на  $P$ , т. е. отображение, сохраняющее расстояния. Все развертки одного и того же многогранника, очевидно, изометричны между собой (т. е. допускают отображения друг на друга, сохраняющие расстояния).

Развертку можно трактовать как конкретный способ задания внутренней метрики многогранника. Как уже было указано, в силу условия Эйлера развертка замкнутого выпуклого многогранника оказывается гомеоморфной сфере. Отобразив развертку  $R$  на сферу  $S$ , мы перенесем на  $S$  метрику  $\rho_R$  развертки  $R$ , т. е. каждой паре точек  $X, Y$  сферы  $S$  сопоставим расстояние  $\rho_R(X, Y)$ , равное расстоянию соответственных точек в развертке  $R$ . (Это расстояние на сфере, конечно, не имеет ничего общего с собственной метрикой сферы; сфера мыслится здесь как абстрактное многообразие.) В этой метрике  $\rho_R$  каждая точка сферы  $S$  имеет окрестность такую же, как точка в развертке, т. е. изометричную многогранному углу, в частности куску плоскости. Последний случай заведомо имеет место для точек, лежащих внутри

<sup>14)</sup>  $n(9) = 2606$ ; о характере роста следующих чисел см. [276]. — Прим. В. А. Залгаллера.

многоугольников развертки или внутри ее ребер: окрестность точки второго типа складывается из двух полуокрестностей, лежащих на многоугольниках, склеиваемых по данному ребру. Если в вершине  $A$  развертки сумма углов не равна  $2\pi$ , то ее окрестность изометрична многогранному углу. С точки зрения внутренней метрики она полностью характеризуется суммой углов вокруг  $A$  или, как мы говорим, полным углом  $\theta$  вокруг  $A$ . Разность  $2\pi - \theta$  мы назвали кривизной вершины  $A$ . Условие об углах, налагаемое на развертку выпуклого многогранника, утверждает, что кривизны всех вершин не отрицательны<sup>15)</sup>.

Метрику, которую можно задать посредством развертки, мы называем *многогранной метрикой*, а если кривизны всех вершин  $\geq 0$ , то мы говорим, что это — *метрика положительной кривизны* (исключая случай, когда вовсе нет вершин с кривизной  $\neq 0$ ; этот случай заведомо не может иметь места для разверток, гомеоморфных сфере).

Сформулированную выше теорему о существовании многогранника с данной разверткой можно выразить теперь так:

*1\*\*. Для всякой многогранной метрики положительной кривизны, заданной на сфере, существует реализующий эту метрику замкнутый выпуклый многогранник и притом единственный с точностью до движения или движения и отражения. (Утверждение, что многогранник  $P$  реализует метрику  $\rho_R$ , заданную на  $S$ , означает, что  $P$  допускает изометричное в смысле метрики  $\rho_R$  отображение на  $S$ .)*

В этой формулировке нет никакой многозначности: многогранник и его метрика связаны взаимно однозначно, если не различать равные многогранники.

Таким образом, теорема 1\*\* дает ответ на вопрос, поставленный в начале этого пункта. Внутренняя метрика и есть то «содержащееся в развертке», что однозначно связано с многогранником.

**5.** Утверждение единственности, заключенное в теореме 1\*, доказывается в §3 главы III в следующей несколько более сильной форме.

*2. Если задано изометрическое отображение одного замкнутого выпуклого многогранника на другой, то это отображение можно осуществить движением или движением и отражением. В частности, речь может, конечно,*

---

<sup>15)</sup>Обратно, если на сфере  $S$  задана метрика  $\rho$  такая, что каждая точка сферы  $S$  имеет окрестность, изометричную многогранному углу, и расстояние между любыми двумя точками  $X$  и  $Y$  в метрике  $\rho$  равно точной нижней границе длин кривых, соединяющих точки  $X$  и  $Y$ , причем длина измеряется в самой метрике  $\rho$ , то такую метрику можно задать посредством развертки. Достаточно окружить каждую точку  $O$  окрестностью из треугольников с вершиной  $O$  и выбрать конечное число таких окрестностей, покрывающих всю сферу  $S$ . Полученные треугольники дадут в пересечениях конечное число многоугольников, которые образуют требуемую развертку.

идти об отображении многогранника на себя<sup>16)</sup>. Это есть некоторое усиление уже упоминавшейся в § 1 теоремы Коши: два замкнутых выпуклых многогранника, одинаково составленные из равных граней, равны. Доказательство нашей теоремы сводится к теореме Коши с тем обобщением, что речь может идти и не об истинных гранях, а о любых многоугольниках, из которых многогранник составляется, хотя бы некоторые из этих многоугольников и представляли собой не целые грани, а только их части. Это обобщение теоремы Коши мы получаем как прямое следствие такой теоремы:

*3. Если два замкнутых выпуклых многогранника одинаково составлены из плоских многоугольников с соответственно равными углами, то все двугранные углы таких многогранников соответственно равны.*

Читатель, знакомый с доказательством Коши, сам заметит, что именно такую теорему доказал, хотя и не сформулировал, сам О. Коши с тем лишь ограничением, что у него речь идет именно о гранях многогранника. Теорема 3 имеет самостоятельный интерес, потому что многогранники с равными плоскими углами могут быть далеки от изометричности; простой пример тому дают все прямоугольные параллелепипеды<sup>17)</sup>.

Теорему существования замкнутого выпуклого многогранника с данной разверткой мы доказываем в § 1–3 главы IV, опираясь, в частности, на теорему 2.

**6.** Развертка бесконечного выпуклого многогранника, помимо общих для всех разверток условий, указанных в п° 1, должна удовлетворять еще двум условиям:

- 1) *развертка гомеоморфна плоскости;*
- 2) *сумма углов, сходящихся в одной вершине,  $\leq 2\pi$  для каждой вершины.*

Необходимость первого условия ясна из того, что бесконечный выпуклый многогранник гомеоморфен плоскости. Второе условие необходимо по той же причине, по какой оно необходимо в случае развертки замкнутого выпуклого многогранника.

Если к бесконечным выпуклым многогранникам присоединить также дважды покрытые бесконечные выпуклые многоугольники, то можно утверждать следующее:

<sup>16)</sup> В § 5 гл. III мы докажем, что то же самое верно не только для замкнутых, но и для любых выпуклых многогранников с полной кривизной, равной, так же как у замкнутого многогранника,  $4\pi$ . Например, сколь угодно тонкий вырез из поверхности куба, содержащий все вершины куба, не изгибается с сохранением выпуклости!

<sup>17)</sup> Дж. Стокер [354] предполагает справедливость и обратного утверждения: для комбинаторно одинаковых выпуклых многогранников из равенства соответственных двугранных углов следует равенство соответственных плоских углов. Это доказано для частных случаев [56, 144, 301]. — Прим. В. А. Залгаллера.

4. Из всякой развертки, гомеоморфной плоскости и имеющей сумму углов при вершинах  $\leq 2\pi$ , можно склеить бесконечный выпуклый многогранник<sup>18)</sup>.

Условие гомеоморфности плоскости равносильно двум условиям, которые для каждой данной развертки проверяются совсем просто:

- 1а) развертка содержит хотя бы один бесконечный многоугольник;
- 1б) если  $f, k, e$  — числа многоугольников, ребер и вершин развертки, то  $f - k + e = 1$ .

Равносильность этих условий тому, что развертка гомеоморфна плоскости, была доказана в § 7 главы I (теорема 9).

Бесконечный многогранник, вообще говоря, не определяется своей разверткой однозначно, как видно уже на примере многогранного угла, который всегда можно изгибать, не меняя его граней, если их более трех. Единственный случай, когда такая однозначность имеет место, содержится в следующей теореме:

5. Если полная кривизна, т. е. сумма кривизн вершин развертки равна  $2\pi$ , то из нее можно склеить только один (с точностью до движения или движения и отражения) бесконечный выпуклый многогранник. Или: если кривизна бесконечного выпуклого многогранника равна  $2\pi$ , то всякое его изометрическое отображение на выпуклый же многогранник сводится к движению или движению и отражению.

Полная кривизна бесконечного выпуклого многогранника вообще не превосходит  $2\pi$ . Для многогранников с полной кривизной  $< 2\pi$  имеет место следующая теорема:

6. Пусть  $R$  — развертка, удовлетворяющая указанным выше необходимым условиям и имеющая полную кривизну  $\omega < 2\pi$ . В развертке  $R$  задается ориентация. Пусть  $L$  — полупрямая на одном из ее бесконечных многоугольников. Пусть  $V$  — выпуклый многогранный угол с кривизной  $\omega$  и с данной ориентацией, т. е. данным обходом вокруг вершины, а  $L_1$  — какая-либо его образующая. Существует выпуклый многогранник  $P$ , склеенный из развертки  $R$ , имеющий  $V$  в качестве предельного угла и притом так, что при бесконечном подобном сжатии  $P$  в  $V$  линия на  $P$ , соответствующая  $L$ , переходит в  $L_1$ , а ориентация на  $P$ , определенная ориентацией развертки  $R$ , переходит в данную ориентацию угла  $V$ . Такой многогранник  $P$  — единственный с точностью до переноса, если угол  $V$  закреплен в пространстве. (Доказательство см. в § 5 главы IV.)

<sup>18)</sup> На языке метрики эту теорему можно сформулировать так: всякая полная многогранная метрика положительной кривизны, заданная на плоскости, реализуема бесконечным выпуклым многогранником, т. е. допускает изометрическое вложение в трехмерное евклидово пространство в виде выпуклого многогранника. При этом полной называется метрика, в которой всякое ограниченное бесконечное множество точек имеет точку сгущения. Эту теорему мы докажем в § 4 гл. IV.

Для единственности многогранника здесь нужно, следовательно, к заданию развертки  $R$  присоединить задание предельного угла  $V$ , соответственных полупрямых  $L$  и  $L_1$  на  $R$  и  $V$ , а также соответственных ориентаций  $R$  и  $V$ . Перемена ориентации при данном  $V$  не может быть осуществлена простым отражением, потому что при отражении многогранника  $P$  его предельный угол также претерпевает отражение и, следовательно, становится, вообще говоря, отличным от заданного угла  $V$ . Если оставлять  $R$ ,  $V$ ,  $L$  неизменными и вращать  $L_1$  по углу  $V$ , то многогранник  $P$  будет как бы оборачиваться вокруг угла  $V$ , причем строение его будет, вообще говоря, меняться. Точно так же при непрерывном изменении угла  $V$  многогранник  $P$  тоже будет изгибаться. Равенство кривизн развертки  $R$  и угла  $V$  необходимо, потому что, как показывает теорема 3 § 5 главы I, кривизна бесконечного выпуклого многогранника равна кривизне его предельного угла.

Теоремы 5 и 6 принадлежат С. П. Оловянишникову [156]. Теорему 5 и утверждение единственности, заключающееся в теореме 6, мы докажем в главе III (§ 3, 4). Там же (§ 2) доказывается теорема для бесконечных многогранников, аналогичная теореме 3.

*7. Если у двух бесконечных выпуклых многогранников, одинаково составленных из любых многоугольников с соответственно равными углами, предельные углы равны, то двугранные углы этих многогранников также равны.* (Если предельный угол одного из многогранников сводится к полупрямой, то последнее условие лишнее, так как тогда из одного равенства соответственных углов многоугольников следует равенство предельных углов.)

Наконец, мы устанавливаем аналогичные результаты для многогранников, ограниченных каждой одной ломаной. В этом случае для справедливости утверждений теорем 2 и 3 достаточно наложить дополнительное условие на границы многогранников: углы между смежными граничными ребрами двух многогранников должны быть соответственно равны (см. § 5 главы III).

Однако никаких эффективных необходимых и достаточных условий, при которых из данной развертки можно склеить выпуклый многогранник с границей, мы не знаем. Тривиальное условие, что развертку можно дополнить до развертки замкнутого (или бесконечного) многогранника, не эффективно. Однако оно в ряде случаев позволяет формулировать легко проверяемые достаточные условия. Соответствующие результаты будут получены в § 1 главы V.

Вопрос о том, когда многогранник с границей определяется своей разверткой (метрикой) и когда он допускает (при сохранении выпуклости) изгибания (т. е. непрерывные деформации с сохранением метрики и сохранением выпуклости многогранника), рассматривается в § 5 главы III и в § 2

главы V. Здесь получается ряд интересных результатов, но исчерпывающего решения этого вопроса мы также не имеем<sup>19)</sup>.

§ 4. МНОГОГРАННИКИ С ДАННЫМИ НАПРАВЛЕНИЯМИ ГРАНЕЙ  
(ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ ГЛАВ VI, VII и VIII)

1. Направление грани выпуклого многогранника задается внешней нормалью к ней. Мы будем считать грани и опорные плоскости многогранника параллельными только в том случае, если параллельны их внешние нормали<sup>20)</sup>. Нетривиальность задач, касающихся многогранников с заданными направлениями граней, выясняется, между прочим, из того, что эти направления, вообще говоря, вовсе еще не определяют строение многогранника, как это видно на простом примере многогранников, изображенных на рис. 65. В применении же к выпуклым многоугольникам все приведенные дальше теоремы либо просто тривиальны, как, например, наша основная теорема 8, либо доказываются совсем просто; некоторое исключение составляют теоремы 10 и 11, которые и для многоугольников доказываются не очень уж просто.

В § 1–3 главы VI мы докажем следующую теорему:

8. Если у двух замкнутых выпуклых многогранников каждой грани одного соответствует параллельная грань другого, и обратно, и если их соответственные грани не могут быть помещены одна в другую параллельными переносами (т. е. они либо выступают одна из другой, либо совпадают), то многогранники равны и параллельно расположены. Можно даже считать, что если на одном из многогранников нет грани с той же внешней нормалью, что и на другом, то она как бы есть, но вырождается в ребро, лежащее в соответствующей опорной плоскости.

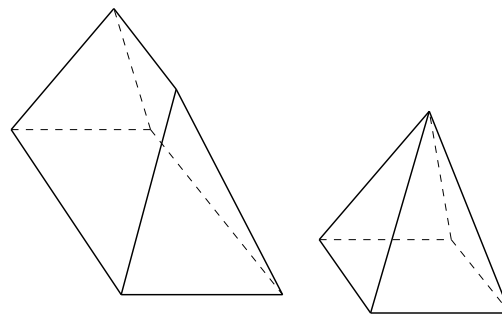


Рис. 65

Можно даже считать, что если на одном из многогранников нет грани с той же внешней нормалью, что и на другом, то она как бы есть, но вырождается в ребро, лежащее в соответствующей опорной плоскости.

<sup>19)</sup>Теперь эффективно проверяемые необходимые и достаточные условия неизгибаемости выпуклого многогранника с одной или несколькими компонентами края известны. Они получены Л. А. Шором [224, 227]. — Прим. В. А. Залгаллера.

<sup>20)</sup>Здесь и далее, говоря о том, что векторы параллельны, всякий раз понимаем под этим и то, что они одинаково направлены. (В этом смысле, если многогранник выродился в дважды покрытый выпуклый многоугольник, то его две грани не считаются параллельными: у них противоположно направлены внешние нормали. — Прим. В. А. Залгаллера.)



Это ребро должно тогда не уместиться в соответствующей грани другого многогранника.

Эту же теорему можно сформулировать и в такой форме:

*Два замкнутых выпуклых многогранника либо равны и параллельно расположены, либо на одном из них есть хотя бы одна такая грань  $Q$ , что на втором многограннике элемент его границы (грань, ребро или вершина), лежащий в опорной плоскости, параллельной  $Q$ , можно путем параллельного переноса поместить в грани  $Q$ , причем он не будет совпадать с  $Q$ .*

Частным следствием теоремы 8 является уже упоминавшаяся теорема единственности Минковского:

9. *Если у двух замкнутых выпуклых многогранников грани соответственно параллельны и имеют равные площади, то многогранники равны и параллельно расположены.* Иными словами, замкнутый выпуклый многогранник однозначно определяется направлениями и площадями своих граней. Действительно, равновеликие многоугольники нельзя поместить один в другом (если они не равны), и потому эта теорема содержится в теореме 8.

Такого рода следствий теоремы 8 можно назвать сколько угодно. Так, функцию  $f(Q)$  выпуклого многоугольника  $Q$  будем называть монотонной, если  $f(Q_1) < f(Q_2)$  всякий раз, когда  $Q_1$  содержится в  $Q_2$  и не совпадает с  $Q_2$ . Тогда, если у двух замкнутых выпуклых многоугольников грани соответственно параллельны и для каждой пары параллельных граней  $Q_i^{(1)}$  и  $Q_i^{(2)}$  есть такая монотонная функция  $f_i$ , что  $f_i(Q_i^{(1)}) = f_i(Q_i^{(2)})$ , то многогранники равны и параллельно расположены. Действительно, вследствие монотонности функций  $f_i$  из равенства  $f_i(Q_i^{(1)}) = f_i(Q_i^{(2)})$  следует, что параллельные грани  $Q_i^{(1)}$ ,  $Q_i^{(2)}$  нельзя поместить одну в другой, а потому равенство многогранников следует из теоремы 8.

Беря за все  $f_i$  площадь, получаем теорему 9, беря за все  $f_i$  периметр, получаем теорему об однозначной определяемости многогранника направлениями и периметрами граней и т. д., и т. д.

Теорема 8 допускает приложения в решении некоторых, хотя и более частных, но важных задач, которые будут рассмотрены в главе VIII. Так, с помощью нее будет доказана теорема Линделефа [312]<sup>21)</sup>.

10. *Среди всех замкнутых выпуклых многогранников с данными направлениями граней и данной площадью, наибольший объем ограничивает многогранник, описанный вокруг шара.*

Эта теорема получится как частное следствие одной теоремы Минковского, имеющей большой самостоятельный интерес. Речь идет о так называемом смешении выпуклых тел и об их смешанных объемах (см. § 2 главы

<sup>21)</sup> Другое ее доказательство дал Г. Минковский в той же работе [321], где он доказал теоремы 9 и 11.

VI и § 2 и 3 главы VII). Другое приложение теоремы 8 касается нахождения всех возможных параллелоэдров, т. е. (телесных) выпуклых многогранников, которыми можно заполнять пространство, прикладывая их друг к другу параллельно по целым граням, подобно ячейкам пчелиных сот (см. § 1 главы VIII).

2. Г. Минковский доказал не только единственность, но и существование замкнутого выпуклого многогранника с данными направлениями и площадями граней.

11. Если единичные векторы  $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m$  и числа  $F_1, \dots, F_m$  удовлетворяют условиям:

- 1) векторы  $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m$  все различны и не компланарны;
- 2) все числа  $F_i > 0$ ;
- 3)  $\sum_{i=1}^m \mathbf{n}_i F_i = 0$ ,

то существует замкнутый выпуклый многогранник, у которого  $\mathbf{n}_i$  и  $F_i$  суть внешние нормали и площади его граней.

Эту теорему мы докажем в § 1 главы VII методом, основанным на «лемме об отображении»; в § 2 главы VII мы воспроизведем также доказательство самого Г. Минковского.

Никакие другие теоремы существования, аналогичные теореме 11, неизвестны. Мы, например, имеем теорему единственности многогранника с данными периметрами граней, но не имеем соответствующей теоремы существования по той простой причине, что неизвестны необходимые условия, которым должны удовлетворять периметры граней замкнутого выпуклого многогранника. Если бы такие условия удалось выяснить, то наш метод позволил бы, надо думать, доказать и соответствующую теорему существования. Это замечание относится к любым другим монотонным функциям граней.

Ясно, что здесь всегда должны иметь место некоторые нетривиальные условия. Замкнутый выпуклый многогранник с  $m$  гранями данных направлений определяется  $m$  расстояниями плоскостей его граней от какой-нибудь его внутренней точки. Однако задание, например,  $m$  периметров  $l_1, \dots, l_m$  его граней определяет его лишь с точностью до переноса, что дает не  $m$ , а всего  $m - 3$  переменных, поскольку перенос задается тремя составляющими вектора переноса. Поэтому периметры должны удовлетворять условиям, выделяющим в  $m$ -мерной области положительных значений  $l_1, \dots, l_m$  некоторую  $(m - 3)$ -мерную область значений, действительно возможных для периметров граней. Вся трудность состоит в отыскании условий, определяющих эту область значений  $l_1, \dots, l_m$ , допустимых для периметров граней.

**3.** Условие равенства замкнутых многогранников, данное в теореме 8, для бесконечных многогранников не имеет смысла в применении к их бесконечным граням; оно не может быть выполнено, если многогранники равны и параллельно расположены, потому что любой из двух равных и параллельно расположенных бесконечных многоугольников можно поместить в другом, как это видно на рис. 66. Требовать же выполнения этого условия для одних конечных граней явно недостаточно, как это видно из простейшего примера рис. 67. Поэтому необходимо дополнительное условие, налагаемое на бесконечные грани:

*Бесконечные многогранника должны иметь равные и параллельные «бесконечные части», т. е. от каждого из них можно отрезать (достаточно большую) конечную часть так, что оставшиеся бесконечные части можно будет совместить путем параллельного переноса.*

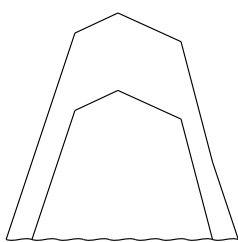


Рис. 66

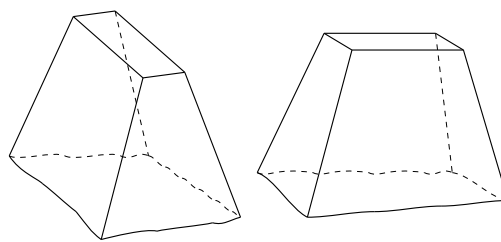


Рис. 67

Это условие равносильно, как очевидно, тому, что можно совместить одним общим переносом плоскости всех бесконечных граней многогранников. Вводя это условие, получаем теорему, доказываемую в § 4 главы VI.

*12. Если у двух бесконечных выпуклых многогранников бесконечные части равны и параллельны, а ни одну конечную грань нельзя поместить в другой параллельным переносом, то многогранники равны и параллельно расположены.*

В случае конечных незамкнутых многогранников мы получим в § 5 главы VI аналогичные теоремы, вводя некоторые условия, налагаемые на их крайние, т. е. прилегающие к границе, грани и граничные ребра. Теорему 12 о бесконечных многогранниках легко пересказать для конечных многогранников, если вспомнить замечания, сделанные в п° 6 § 1 главы I, о замене бесконечных многогранников конечными, но допускающими продолжение крайних граней. В этой связи стоит заметить, что теоремы такого рода можно рассматривать как теоремы о многогранниках, край которых задан, а сами они подчинены тем или иным условиям. Это есть не что иное, как «краевая задача», но поставленная в рамках элементарной геометрии. Во-

обще же в краевых задачах речь идет о функции (или, если угодно, поверхности), которая задается на краю какой-либо данной области и должна удовлетворять в самой области тем или иным условиям — обычно требованию удовлетворять некоторому дифференциальному уравнению. (Связь наших теорем о многогранниках с такими краевыми задачами для дифференциальных уравнений выяснится ближе в параграфах «Обобщение» главы VI и VII.)

4. Из теоремы 12 о равенстве бесконечных многогранников можно извлечь следствие, аналогичное теореме 9 Минковского:

*Если у двух бесконечных выпуклых многогранников бесконечные части равны и параллельны, а конечные грани попарно параллельны и имеют равные площади, то многогранники равны и параллельно расположены.* Аналогичный результат получаем, беря вместо площади любые монотонные функции граней; вывод будет тот же, что и выше, в п° 1.

Вместе с тем, подобно теореме 11 о существовании замкнутого выпуклого многогранника с данными направлениями и площадями граней, можно формулировать аналогичные теоремы для бесконечных многогранников. Для этого выясним сначала необходимые условия, которым должны удовлетворять нормали и площади граней бесконечного многогранника с параллельными бесконечными ребрами.

Бесконечная часть такого многогранника представляет собой бесконечную одну сторону выпуклую призму  $\Pi$ , и если  $\mathbf{n}$  — вектор, направленный вдоль ее ребра в сторону конечной части многогранника, то внешние нормали к конечным граням многогранника должны образовывать с  $\mathbf{n}$  острые углы (рис. 68).

Проекция конечных граней на плоскость  $Q$ , перпендикулярную к  $\mathbf{n}$ , покрывают сечение призмы  $\Pi$  этой плоскостью. Поэтому, если  $\mathbf{n}_i$  — внешние нормали и  $F_i$  площади конечных граней, а  $F$  — площадь указанного сечения, то

$$F = \sum_i (\mathbf{n}\mathbf{n}_i) F_i,$$

потому что  $(\mathbf{n}\mathbf{n}_i) F_i$  есть не что иное, как площадь проекции  $i$ -й грани на плоскость  $Q$ .

Оказывается, что эти условия являются также достаточными для существования выпуклого многогранника с данной бесконечной частью и данны-

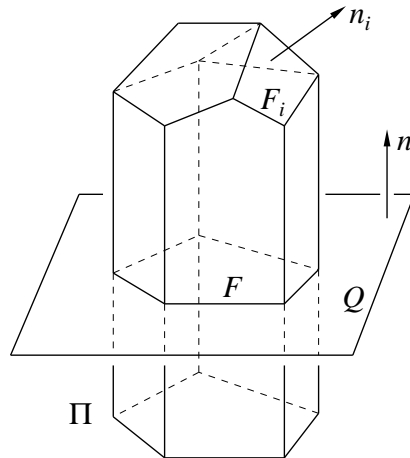


Рис. 68

ми площадями и нормальными конечных граней. Формулируем соответствующую теорему, доказательство которой дается в § 3 главы VII.

13. Пусть задана бесконечная выпуклая призма  $\Pi$  и пусть  $\mathbf{n}$  — единичный вектор вдоль ее ребра. Пусть  $F$  — площадь сечения этой призмы плоскостью, перпендикулярной к  $\mathbf{n}$ . Пусть, далее,  $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m$  — единичные векторы, образующие с  $\mathbf{n}$  острые углы. Пусть, наконец,  $F_1, \dots, F_m$  — такие положительные числа, что  $\sum_{i=1}^m (\mathbf{n}\mathbf{n}_i) F_i = F$ . Тогда существует выпуклый многогранник с бесконечной частью  $\Pi$ , конечные грани которого имеют внешние нормали  $\mathbf{n}_i$  и площади  $F_i$ .

В силу приведенного выше следствия теоремы 12 такой многогранник — единственный с точностью до переноса вдоль вектора  $\mathbf{n}$ , потому что только при таком переносе призма  $\Pi$  переходит сама в себя.

Для бесконечных многогранников с непараллельными бесконечными ребрами имеет место гораздо более общий результат:

14. Пусть  $Q$  — бесконечная часть какого-нибудь бесконечного выпуклого многогранника с непараллельными бесконечными ребрами (рис. 69). Пусть  $S$  — сферический многоугольник, натянутый на сферические изображения граней из  $Q$  и  $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m$  — векторы, идущие из центра во внутренние точки многоугольника  $S$ . Пусть, наконец,  $f_1, \dots, f_m$  — любые монотонные непрерывные функции многоугольника, обращающиеся в нуль и в бесконечность вместе с площадью многоугольника.

Тогда, какие бы положительные числа  $a_1, \dots, a_m$  ни задать, существует бесконечный выпуклый многогранник с бесконечной частью  $Q$  и конечными гранями, имеющими внешние нормали  $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m$ , причем функции  $f_1, \dots, f_m$  принимают для этих граней значения  $a_1, \dots, a_m$ , так что  $f_i = a_i$  для грани с нормалью  $\mathbf{n}_i$ .

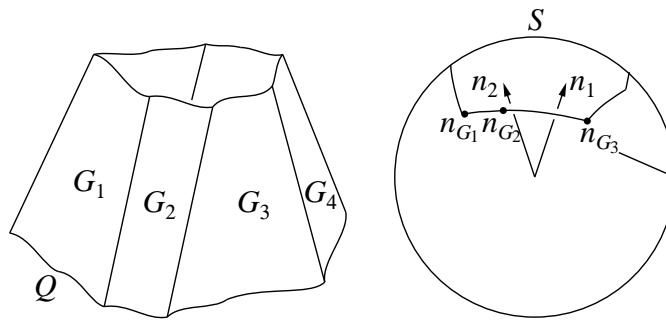


Рис. 69

Из следствия теоремы 12, приведенного в начале этого пункта, вытекает, что такой многогранник — единственный, потому что при закрепленной бесконечной части  $Q$  перенос невозможен.

Необходимость условий, наложенных в теореме 14 на нормали, была уже отмечена в § 2. Сферическое изображение бесконечного выпуклого многогранника представляет собой сферический выпуклый многоугольник, натянутый на сферические изображения его бесконечных граней, в том смысле, что его вершины суть концы проведенных из центра сферы внешних нормалей к граням с непараллельными бесконечными ребрами, а концы нормалей к граням с параллельными бесконечными ребрами лежат на его сторонах. Концы же нормалей к конечным граням лежат внутри этого сферического многоугольника.

Задание бесконечной части  $Q$  равносильно заданию плоскостей ее граней. Однако не всякие плоскости могут служить плоскостями граней какого-либо бесконечного многогранника. Для этого, согласно изложенному, необходимо, чтобы нормали к ним, проведенные из центра сферы, шли во все вершины и еще, может быть, на стороны некоторого выпуклого сферического многоугольника. Однако этого еще недостаточно: нужны условия на расстояния этих плоскостей от начала. Они будут выяснены дальше в п° 7.

Теорема 14 кажется на первый взгляд удивительной по своей общности. Однако на самом деле она представляет собой гораздо более поверхностный факт, чем теоремы 11 и 13, хотя в них фигурирует только площадь. Это будет видно из доказательства теоремы 14, предложенного А. В. Погореловым, которое воспроизводится в § 4 главы VII. При этом мы получим даже несколько более общий результат, сняв условие, чтобы функции  $f_i$  обращались в нуль вместе с площадью.

Для многогранников, имеющих границу, нам неизвестны никакие подобные теоремы, не считая довольно тривиальных следствий самих теорем 8, 13 и 14. Трудность состоит здесь в формулировке условий, которые нужно одновременно наложить на площади граней и границу многогранника, так как между ними, очевидно, есть некоторая зависимость<sup>22)</sup>.

5. Все сформулированные выше теоремы 9–14 дословно обобщаются в пространство любого числа измерений, хотя метод доказательства для теорем 9, 10 и 12 приходится при этом изменить<sup>23)</sup>. Исключение составляет теорема 8 об общем условии равенства замкнутых многогранников. То, что она неверна в четырехмерном пространстве, видно на следующем простом примере. У куба с ребром 2 и прямоугольного параллелепипеда (в четырехмерном пространстве) с ребрами 1, 1, 3, 3 грани не помещаются одна в другой, хотя эти многогранники и не равны.

<sup>22)</sup> Этот вопрос остается нерешенным. — Прим. В. А. Залгаллера.

<sup>23)</sup> Такое общее доказательство теорем 9 и 10 дано Г. Минковским и излагается в § 3 гл. VIII. Общее доказательство теоремы 12 дано А. В. Погореловым и излагается в § 5 гл. VII.

**6.** Замкнутый или бесконечный выпуклый многогранник определяется заданием плоскостей его граней: он является границей пересечения полупространств, ограниченных этими плоскостями. Если заданы единичные векторы  $\mathbf{n}_i$  внешних нормалей к граням, то плоскости граней определяются, если заданы еще их расстояния от начала координат, причем эти расстояния считаются положительными, если направление от начала к плоскости совпадает с направлением внешней нормали, в противном же случае они считаются отрицательными. С таким условием о знаках эти расстояния мы называем опорными числами многогранника<sup>24</sup>). Опорное число  $h_i$  есть не что иное, как правая часть в нормальном уравнении плоскости грани

$$\mathbf{n}_i \mathbf{x} = h_i,$$

где  $\mathbf{n}_i$  — единичная внешняя нормаль, а  $\mathbf{x}$  — вектор, идущий из начала в переменную точку плоскости.

Полупространство, содержащее многогранник, определяется неравенством

$$\mathbf{n}_i \mathbf{x} \leq h_i$$

(а не противоположным, потому что нормаль  $\mathbf{n}_i$  — внешняя, т. е. идет в полупространство, не содержащее многогранника). Сам многогранник есть граница пересечения этих полупространств.

Опорные числа не могут быть произвольными. Пусть векторы внешних нормалей суть  $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m$ , а опорные числа  $h_1, \dots, h_m$ . Пусть вектор  $\mathbf{n}_k$  представляется как линейная комбинация других векторов  $\mathbf{n}_i$  с неотрицательными коэффициентами:

$$\mathbf{n}_k = \sum_{i \neq k} \nu_{ki} \mathbf{n}_i \quad (\nu_{ki} \geq 0). \quad (1)$$

Если  $\mathbf{x}$  — вектор, идущий из начала во внутреннюю точку  $X$   $k$ -й грани, то

$$\mathbf{n}_k \mathbf{x} = h_k. \quad (2)$$

Вместе с тем так как точка  $X$  принадлежит многограннику и не лежит ни на одной из плоскостей других граней, то при  $i \neq k$

$$\mathbf{n}_i \mathbf{x} < h_i.$$

---

<sup>24</sup>) Читатель, знакомый с теорией выпуклых тел, заметит, что опорные числа суть не что иное, как значения опорной функции многогранника для единичных векторов внешних нормалей к его граням. Их задание заменяет задание опорной функции. Отсюда их название. Г. Минковский в своей работе [321] называет их тангенциальными параметрами. Понятие опорной функции введено Г. Минковским.

Умножая эти неравенства на числа  $\nu_{ki} \geq 0$ , получим

$$\sum \nu_{ki} \mathbf{n}_i \mathbf{x} < \sum \nu_{ki} h_i$$

или в силу (1) и (2)

$$h_k < \sum_{i \neq k} \nu_{ki} h_i. \quad (3)$$

Если же вектор  $\mathbf{n}_k$  представлен как линейная комбинация других векторов  $\mathbf{n}_i$  с неположительными коэффициентами

$$\mathbf{n}_k = \sum_{i \neq k} \nu_{ki} \mathbf{n}_i \quad (\nu_{ki} \leq 0), \quad (4)$$

то точно так же получим

$$h_k > \sum_{i \neq k} \nu_{ki} h_i. \quad (5)$$

Следовательно, для того чтобы данные числа  $h_1, \dots, h_m$  были опорными числами выпуклого многогранника с внешними нормальными  $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m$ , необходимо, чтобы каждому разложению (1) или (4) любого из векторов  $\mathbf{n}_k$  со сплошь неотрицательными или неположительными коэффициентами  $\nu_{ki}$  соответствовало неравенство (3) или (5).

В § 5 и 6 главы VII мы докажем, что это условие является также достаточным:

15. Пусть имеется  $m$  различных некопланарных единичных векторов  $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m$ . Пусть каждому из этих векторов отнесено по числу  $h_1, \dots, h_m$  так, что если вектор  $\mathbf{n}_k$  представлен как линейная комбинация других векторов со сплошь неотрицательными или сплошь неположительными коэффициентами

$$\mathbf{n}_k = \sum_{i \neq k} \nu_{ki} \mathbf{n}_i,$$

то

$$h_k < \sum_{i \neq k} \nu_{ki} h_i, \quad \text{если все } \nu_{ki} \geq 0,$$

и

$$h_k > \sum_{i \neq k} \nu_{ki} h_i, \quad \text{если все } \nu_{ki} \leq 0.$$

Тогда существует выпуклый многогранник, грани которого имеют внешние нормали  $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m$  и соответственно опорные числа  $h_1, \dots, h_m$ .



Если векторы  $\mathbf{n}_i$  направлены в одно полупространство, то этот многогранник — бесконечный. В противном случае он замкнутый<sup>25)</sup>. (Предполагается, что полупространство содержит ограничивающую его плоскость.)

Достаточно требовать выполнения только тех неравенств для чисел  $h_k$ , которые соответствуют разложениям каждого вектора  $\mathbf{n}_k$  по трем другим векторам  $\mathbf{n}_i$ .

Последнее замечание существенно по следующей причине. Если вектор  $\mathbf{n}_k$  допускает разложение по четырем или более данным векторам с положительными (отрицательными) коэффициентами, то он допускает бесконечно много таких разложений. Разложение же по трем векторам вообще может быть только одно. Поэтому последнее замечание позволяет ограничиться конечным числом неравенств для чисел  $h_k$  и тем самым делает условия теоремы эффективно проверяемыми.

На первый взгляд, доказательство теоремы 15 может показаться простым: «Возьмем пересечение полупространств  $\mathbf{n}_i \mathbf{x} \leq h_i$ ; оно и даст искомый многогранник». Однако это заключение слишком поспешно, потому что еще не известно, не будет ли такое пересечение пустым<sup>26)</sup>. В этом и состоит первая трудность в доказательстве теоремы 15.

7. Из теоремы 15 легко вывести условие, необходимое и достаточное для того, чтобы данные плоскости были плоскостями бесконечных граней какого-либо выпуклого многогранника.

16. Для того чтобы плоскости  $P_1, \dots, P_m$  с нормальными  $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m$  были плоскостями бесконечных граней какого-либо выпуклого многогранника (с внешними нормальными  $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m$ ), необходимо и достаточно, чтобы, во-первых, нормали  $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m$  шли в вершины и, быть может, еще в точки на сторонах некоторого сферического выпуклого многоугольника (а именно того многоугольника, какой должно представлять сферическое изображение всего многогранника с данными бесконечными гранями), и, во-вторых, чтобы опорные числа  $h_1, \dots, h_m$  плоскостей  $P_1, \dots, P_m$  удовлетворяли условиям теоремы 15.

<sup>25)</sup> В моей работе [10] эта теорема сформулирована неверно: забыты неравенства для  $h_k$ , соответствующие разложениям векторов  $\mathbf{n}_k$  с неположительными  $\nu_{ki}$ . Одних неравенств с неотрицательными  $\nu_{ki}$  недостаточно, как видно из следующего простого примера. Возьмем векторы  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4$  внешних нормалей к граням правильного тетраэдра. Ни один из них не разлагается по другим иначе, как с отрицательными коэффициентами. Поэтому условия на  $h_k$  с положительными коэффициентами  $\nu_{ki}$  отпадают, и, отбрасывая условия с отрицательными  $\nu_{ki}$ , мы не получим никаких условий. Между тем легко передвинуть плоскости граней правильного тетраэдра так, чтобы они не ограничивали никакого многогранника с соответствующими внешними нормальными.

<sup>26)</sup> Этот вопрос существен не только в геометрии. Он составляет важный этап в решении многих задач линейного программирования. В более детальной постановке мы вернемся к этому вопросу в §5 гл. VII. — Прим. В. А. Залгаллера.

Необходимость условий нам уже известна. Они также достаточны. Действительно, в силу теоремы 15 при выполнении ее условий существует многогранник с нормальными  $\mathbf{n}_i$  и опорными числами  $h_i$ . Он будет бесконечный, так как нормали  $\mathbf{n}_i$  направлены в одно полупространство, и все его грани будут бесконечными, потому что нормаль к конечной грани шла бы внутрь сферического многоугольника, натянутого на концы нормалей к бесконечным граням, а между тем по условию все нормали  $\mathbf{n}_i$  лежат на границе такого многоугольника.

Если векторы  $\mathbf{n}_i$  идут к границе выпуклого многоугольника или, что равносильно, лежат на поверхности выпуклого многогранного угла, то, как очевидно, ни один из них не разлагается по другим с отрицательными коэффициентами. Поэтому соответствующее условие теоремы 15 просто отпадает.

Тот факт, что вектор  $\mathbf{n}$  разлагается по трем векторам  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$  с положительными коэффициентами, означает, что он идет внутри трехгранного угла с ребрами  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$ . Поэтому, когда все векторы  $\mathbf{n}_i$  расположены по поверхности выпуклого многогранного угла, то ни один из них не может разлагаться по трем (и более) другим с положительными коэффициентами.

Остается одна возможность, что вектор  $\mathbf{n}_k$  лежит в одной плоскости с двумя другими  $\mathbf{n}_i, \mathbf{n}_j$ , и идет в угле между ними. Тогда он и разлагается по ним с положительными коэффициентами. Это означает, что конец вектора  $\mathbf{n}_k$  лежит внутри стороны сферического многоугольника, натянутой на концы рассматриваемых трех векторов. Такой вектор, как мы знаем, является нормалью к бесконечной грани с параллельными бесконечными ребрами.

Следовательно, условия теоремы 15 в данном случае крайне упрощаются и подлежат проверке лишь для векторов, идущих внутрь сторон сферического многоугольника. Если же таких векторов вовсе нет, то никаких разложений, фигурирующих в теореме 15, для векторов  $\mathbf{n}_i$  быть не может и потому и условий никаких нет, т. е. любые плоскости с такими нормальными  $\mathbf{n}_i$  будут плоскостями бесконечных граней некоторого многогранника.

Особый случай получается, когда все векторы  $\mathbf{n}_i$  компланарны, так что натянутый на их концы сферический многоугольник оказывается полусферой. Это соответствует тому случаю, когда бесконечная часть многогранника является призмой. Здесь условия на числа  $h_i$  должны учитываться полностью. Но  $h_i$  можно рассматривать как опорные числа многоугольника, получающегося в сечении призмы. Тогда в теореме 15 достаточно брать разложения по двум векторам.

Теоремы 15 и 16 обобщаются на пространство любого числа измерений  $n$  с тем лишь изменением, что в  $n$ -мерном пространстве нужно брать разложения по  $n$  векторам.

§ 5. Многогранники с вершинами на данных лучах  
(ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ ГЛАВЫ IX)

1. Возьмем в пространстве какую-либо точку  $O$  и проведем из нее лучи  $l_1, \dots, l_m$ , не направленные в одно полупространство. Мы будем рассматривать замкнутые выпуклые многогранники с вершинами на этих лучах; по условию точка  $O$  должна лежать внутри такого многогранника. Такие многогранники существуют: например, многогранник, вписанный в шар с центром в точке  $O$ .

Пусть  $r_1, \dots, r_m$  — расстояния вершин многогранника от точки  $O$ . Числа  $r_i$  не произвольны, что следует из теоремы:

17. Для того чтобы положительные числа  $r_1, \dots, r_m$  были расстояниями от  $O$  до вершин замкнутого выпуклого многогранника на лучах  $l_1, \dots, l_m$ , необходимо и достаточно следующее условие:

Если  $e_i$  обозначают единичные векторы вдоль лучей  $l_i$  и  $e_k = \sum \nu_{ki} e_i$  есть разложение любого из векторов  $e_k$  по другим векторам с неотрицательными коэффициентами, то

$$\frac{1}{r_k} < \sum \frac{\nu_{ki}}{r_i}.$$

Достаточно, чтобы эти неравенства выполнялись для разложения векторов  $e_k$  по трем другим.

Доказательство этой теоремы элементарно. Взяв точки  $A_i$  на данных лучах, построим выпуклую оболочку совокупности этих точек. Это будет многогранник  $P$ . Для того чтобы любая из точек  $A_i$  была его вершиной, необходимо и достаточно, чтобы она не попадала в выпуклую оболочку совокупности остальных. Отсюда и следует необходимость и достаточность условия теоремы, как будет показано в § 1 главы IX.

Между теоремой 17 и приведенной в предыдущем параграфе теоремой 15 есть формальная аналогия, имеющая простое геометрическое основание. Оно состоит в том, что многогранник с вершинами на лучах  $e_i$  путем полярного преобразования преобразуется в многогранник, грани которого имеют внешние нормали  $e_i$ . При этом, если  $r_i$  суть расстояния вершин первого многогранника от точки  $O$ , то опорные числа второго будут  $h_i = 1/r_i$ . (Полярное преобразование было рассмотрено в п° 4 § 5 главы I.) Однако полного перехода от теоремы 17 к теореме 15 нет, так как в теореме 17 все  $r_i > 0$ , в то время как в теореме 15 допускаются  $h_i < 0$ .

2. Поставим следующий вопрос. Пусть  $l_1, \dots, l_m$  — лучи из точки  $O$ , не направленные в одно полупространство. Каковы условия, необходимые и достаточные для того, чтобы данные числа  $\omega_1, \dots, \omega_m$  были кривизнами (площадями сферических изображений) вершин замкнутого выпуклого многогранника, лежащих соответственно на лучах  $l_1, \dots, l_m$ ? (Предполага-

ется, что других вершин многогранник не имеет.) И в какой мере многогранник определяется условиями, что его вершины лежат на данных лучах и имеют данные кривизны? Ответ на первый вопрос дается следующей теоремой:

18. Пусть из точки  $O$  исходят лучи  $l_1, \dots, l_m$ , не направленные в одно полупространство. Пусть  $\Omega_{i_1, \dots, i_k}$  — площадь сферического изображения телесного угла, являющегося выпуклой оболочкой совокупности лучей  $l_{i_1}, \dots, l_{i_k}$ . Для того чтобы числа  $\omega_1, \dots, \omega_m$  были площадями сферических изображений вершин выпуклого многогранника с вершинами на лучах  $l_1, \dots, l_m$ , необходимы и достаточны следующие условия:

- 1) все  $\omega_i > 0$ ;
- 2)  $\sum_{i=1}^m \omega_i = 4\pi$ ;
- 3) для каждой совокупности лучей  $l_{i_1}, \dots, l_{i_k}$

$$\sum \omega_{j_p} > \Omega_{i_1, \dots, i_k},$$

где сумма берется по всем лучам  $l_{j_p}$ , не попавшим в выпуклую оболочку совокупности лучей  $l_{i_1}, \dots, l_{i_k}$ . Рассматриваются, конечно, только такие совокупности лучей  $l_{i_1}, \dots, l_{i_k}$ , выпуклая оболочка которых не есть все пространство: иначе последнее условие лишено смысла.

Необходимость условий 1 и 2 очевидна: условие 2 означает, что сферическое изображение замкнутого выпуклого многогранника покрывает всю сферу. Докажем необходимость третьего условия. Пусть  $P$  — замкнутый выпуклый многогранник с вершинами на лучах  $l_1, \dots, l_m$ . Берем лучи  $l_{i_1}, \dots, l_{i_k}$  и пусть  $V$  — их выпуклая оболочка, причем  $V$  не простирается на все пространство. Выпуклая оболочка конечной совокупности лучей, исходящих из одной точки  $O$ , есть телесный выпуклый многогранный угол с вершиной  $O$ .

Пусть лучи  $l_{j_1}, \dots, l_{j_l}$ , а соответственно и вершины  $A_{j_1}, \dots, A_{j_l}$  оказываются вне  $V$ . Плоскость, опорная к  $V$ , пересекает многогранник  $P$ , а при параллельном движении от точки  $O$  она становится в некоторый момент опорной в некоторой вершине, не попавшей в  $V$ . (На рис. 70 изображена аналогичная картина в случае многоугольника.) Следовательно, всякая опорная плоскость к  $V$  имеет параллельную ей опорную плоскость к  $P$  в одной из

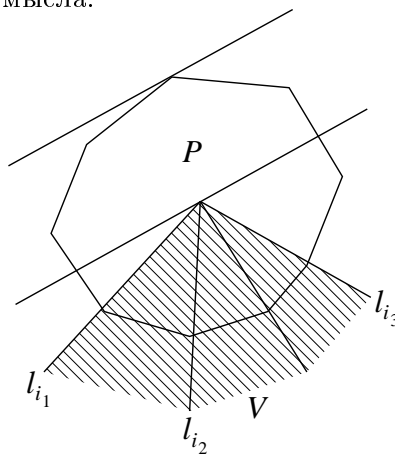


Рис. 70

вершин  $A_{j_1}, \dots, A_{j_l}$ . Кроме того, в этих вершинах имеются и другие опорные плоскости, например плоскости граней, не пересекающих  $V$ . Поэтому сферическое изображение угла  $V$  содержится в сферическом изображении вершин  $A_{j_1}, \dots, A_{j_l}$  и не совпадает с ним. Отсюда и следует неравенство

$$\sum_{p=1}^l \omega_{j_p} > \Omega_{i_1, \dots, i_k}.$$

Достаточность условий теоремы 18 будет доказана в § 1 главы IX, т. е. мы докажем существование выпуклого многогранника, вершины которого лежат на данных лучах и имеют данные площади сферических изображений.

При положительной гомотетии (преобразовании подобия) с центром в  $O$  вершины остаются на тех же лучах и их сферические изображения, очевидно, не меняются. Другие преобразования невозможны, т. е. многогранник определяется лучами  $l_i$ , на которых лежат его вершины, и кривизнами вершин  $\omega_i$  однозначно с точностью до подобного преобразования с центром в общем начале лучей.

Это вытекает из следующей общей теоремы:

19. *Если вершины конечных телесных выпуклых многогранников лежат на одних и тех же лучах, исходящих из внутренней точки  $O$  этих многогранников, то либо эти многогранники положительно гомотетичны с центром подобия в точке  $O$ , либо у них есть такая пара вершин, лежащих на одном луче, что сферическое изображение одной из них содержится в сферическом изображении другой, не совпадая с ним.*

Если площади сферических изображений равны, то вторая возможность исключена, и многогранники должны быть подобны. Вместо площади можно взять любую монотонную функцию сферического многоугольника (или, что равносильно, многогранного угла).

Доказывается теорема 19 очень просто. Пусть многогранники  $P_1$  и  $P_2$  имеют вершины на общих лучах, исходящих из их общей внутренней точки  $O$ . Сожмем  $P_2$  подобно к точке  $O$  так, чтобы он оказался внутри  $P_1$ . Сферические изображения при этом не изменятся.

Будем теперь увеличивать многогранник  $P_2$  подобно из точки  $O$ . В некоторый момент он коснется многогранника  $P_1$  в какой-нибудь точке. Если эта точка не есть вершина, то многогранники  $P_1$  и  $P_2$  касаются по грани или по ребру (пересекаться они не могут, так как  $P_2$  все еще не выходит из  $P_1$ ). А так как вершины многогранников  $P_1$  и  $P_2$  лежат на общих лучах, то в таком случае у них есть хотя бы одна общая вершина, принадлежащая грани или ребру, по которым они касаются. Таким образом, в момент касания многогранников  $P_1$  и  $P_2$  какие-то их вершины  $A_1$  и  $A_2$  совпадают. Но так как  $P_2$  лежит в  $P_1$ , то многогранный угол  $V_2$  при  $A_2$  заключен в многогранном угле  $V_1$  при  $A_1$ . Поэтому плоскость, опорная к  $V_1$ , будет

опорной также к  $V_2$ , т. е. сферическое изображение вершины  $A_2$  содержит сферическое изображение вершины  $A_1$ .

Если площади всех сферических изображений по условию равны, то, следовательно, сферические изображения вершин  $A_2$  и  $A_1$  совпадают. Тем самым совпадают также углы  $V_1$  и  $V_2$ , т. е. ребра многогранников  $P_1$  и  $P_2$ , сходящиеся в их общей вершине  $A_1 = A_2$ , налегают друг на друга. Так как все их вершины лежат на общих лучах, то концы налегающих ребер также совпадают. Применяя к ним то же рассуждение и т. д., убедимся, что многогранники  $P_1$  и  $P_2$  совпадают, так что до преобразования они были подобны с центром подобия в  $O$ , что и требовалось доказать.

**3.** Теперь обратимся к бесконечным многогранникам, причем будем иметь в виду телесные многогранники. Можно было бы рассматривать бесконечные выпуклые многогранники с вершинами на данных лучах, исходящих из точки  $O$ , но мы ограничимся рассмотрением многогранников с вершинами на данных параллельных лучах, что соответствует бесконечно удаленной точке  $O$ . Впрочем, результаты, которые мы получим, нетрудно переделать на случай не бесконечно удаленной точки  $O$ .

То требование, чтобы точка  $O$  лежала внутри многогранника, сводится для бесконечно удаленной точки к тому, что всякая прямая, параллельная данным лучам, либо вовсе не пересекает многогранник, либо имеет с ним общую полупрямую.

Задание параллельных лучей, на которых должны лежать вершины многогранника, эквивалентно заданию плоскости  $T$ , перпендикулярной к этим лучам, и проекций  $A_1, \dots, A_m$  вершин на эту плоскость. Многогранник должен быть расположен так, чтобы всякая прямая, перпендикулярная к плоскости  $T$ , либо вовсе его не пересекала, либо имела с ним общую полупрямую. Тогда проекция многогранника на плоскость  $T$  либо покрывает ее всю один раз, либо покрывает на ней некоторый выпуклый, конечный или бесконечный, многоугольник, причем внутренность этого многоугольника покрывается один раз, а его стороны являются проекциями граней, перпендикулярных к плоскости  $T$ .

Так как бесконечный выпуклый многогранник определяется не одними вершинами, а еще предельным углом, то в рассматриваемых заданиях будет фигурировать предельный угол, который мы считаем здесь телесным углом. (Как уже указывалось, он может, вообще говоря, вырождаться в полупрямую или плоский угол.)

Предельный угол многогранника определяется с точностью до переноса. Для определенности будем считать, что его вершина совпадает с вершиной  $O_1$  многогранника, проектирующейся в данную точку  $A_1$ .

Предельный угол располагается по отношению к плоскости  $T$  так же, как сам многогранник: прямая, перпендикулярная к  $T$ , либо не пересекает его,

либо имеет с ним общую полупрямую. Действительно, пусть прямая  $L$  перпендикулярна к плоскости  $T$  и пересекает предельный угол  $V$  многогранника  $P$ . Так как вершина  $O_1$  предельного угла принадлежит многограннику, то при подобном сжатии многогранника к вершине  $O_1$  мы будем получать многогранники  $P'$ , содержащиеся в  $P$  и содержащие угол  $V$ ; в пределе они будут сходиться к  $V$ . Так как прямая  $L$  пересекает  $V$ , то она пересекает и все эти многогранники  $P'$  и имеет с ними общую полупрямую. (Иначе, увеличивая  $P'$  до  $P$  и соответственно перемещая прямую  $L$ , мы получили бы прямую  $L_1$ , которая пересекает  $P$  не по полупрямой, вопреки условию, наложенному на расположение многогранника  $P$ .) Предел же этих полупрямых будет полупрямой, общей у угла  $V$  и прямой  $L$ .

Далее, условия, наложенные на расположение многогранника и предельного угла относительно плоскости  $T$ , будут предполагаться выполненными.

Сформулируем теперь теорему, аналогичную теореме 18:

20. Пусть на плоскости  $T$  заданы точки  $A_1, \dots, A_m$  и этим точкам  $A_i$  отнесены числа  $\omega_1, \dots, \omega_m$ . Для того чтобы эти числа были площадями сферических изображений вершин бесконечного выпуклого многогранника с проекциями вершин в точках  $A_1, \dots, A_m$ , необходимы и достаточны следующие условия:

- 1) все  $\omega_i > 0$  и  $< 2\pi$ ;
- 2)  $\sum_{i=1}^m \omega_i \leq 2\pi$ .

Необходимость первого условия очевидна; необходимость второго была доказана в п° 3 § 5 главы I: сферическое изображение бесконечного многогранника содержится в полусфере и, следовательно, имеет площадь  $\leq 2\pi$ . Интерес теоремы 20 в том, что кривизны вершин оказываются неподчиненными никаким условиям, кроме этих тривиальных.

При параллельном переносе многогранника в направлении, перпендикулярном к плоскости  $T$ , проекции его вершин и их сферические изображения остаются неизменными. Однако, вообще говоря, многогранник не определяется этими данными однозначно, с точностью до такого переноса, что видно из теоремы:

21. Бесконечный выпуклый многогранник при данных  $A_1, \dots, A_m$  и  $\omega_1, \dots, \omega_m$  будет единственный с точностью до такого переноса тогда и только тогда, когда  $\sum_{i=1}^m \omega_i = 2\pi$ , т. е. когда площадь его сферического изображения равна  $2\pi$ .

В п° 3 § 5 главы I доказано, что сферическое изображение предельного угла совпадает со сферическим изображением многогранника. Поэтому при  $\sum_{i=1}^m \omega_i = 2\pi$  предельный угол сводится к полупрямой и, следовательно,

определен заранее. Если же площадь сферического изображения многогранника, а значит, и предельного угла  $< 2\pi$ , то предельный угол может еще меняться. Это приводит к следующей общей теореме, включающей теоремы 20 и 21:

22. Пусть на плоскости  $T$  заданы точки  $A_1, \dots, A_m$  и им отнесены такие числа  $\omega_1, \dots, \omega_m$ , что 1)  $0 < \omega_i < 2\pi$  при всех  $i$ , 2)  $\sum_{i=1}^m \omega_i \leq 2\pi$ . Пусть, далее,  $V$  — выпуклый многогранный угол с площадью сферического изображения, равной  $\sum_{i=1}^m \omega_i$ , расположенный так, что всякая прямая, перпендикулярная к плоскости  $T$ , либо не пересекает его, либо имеет с ним общую полупрямую<sup>27)</sup>. Тогда существует бесконечный выпуклый многогранник, для которого 1) точки  $A_i$  суть проекции вершин, 2) числа  $\omega_i$  суть площади сферических изображений соответствующих вершин и 3) угол  $V$  есть его предельный угол.

Такой многогранник — единственный, с точностью до переноса в направлении, перпендикулярном к плоскости  $T$ .

Доказательство теоремы 22 дается в § 2 главы IX.

Утверждение единственности, заключенное в этой теореме, является следствием общей теоремы, аналогичной теореме 19 и доказываемой столь же просто (см. § 2 главы IX).

Для многогранников с границей так же получаются аналогичные теоремы существования и единственности.

4. Если заданы предельный угол  $V$  и проекции  $A_1, \dots, A_m$  вершин многогранника на плоскость  $T$ , то для того, чтобы многогранник был определен, остается задать высоты  $p_1, \dots, p_m$  вершин над плоскостью  $T$ , причем они считаются положительными по одну сторону от  $T$  и отрицательными по другую сторону. Условия, необходимые и достаточные для того, чтобы при данных предельном угле  $V$  и проекциях  $A_1, \dots, A_m$  вершин многогранника числа  $p_1, \dots, p_m$  были бы высотами вершин, формулируются несколько громоздко, и мы их не будем здесь приводить. Однако они легко выводятся из того факта, что точка  $B_k$  с высотой  $p_k$  над  $A_k$  будет вершиной многогранника тогда и только тогда, когда она не попадает в выпуклую оболочку его предельного угла и других вершин  $B_i$ .

5. Все теоремы, сформулированные в этом параграфе, вместе с их доказательствами дословно обобщаются на выпуклые многогранники в пространстве любого числа измерений: нужно лишь всюду вместо  $4\pi$  или  $2\pi$  брать соответственно площадь всей сферы или полусферы радиуса единица в таком пространстве. В частности, все они верны для выпуклых многоугольников с заменой  $4\pi$  и  $2\pi$  на  $2\pi$  и  $\pi$  соответственно. Теоремы 20, 21

<sup>27)</sup>  $V$  может быть полупрямой или плоским углом.



и 22 для бесконечных многоугольников доказываются совершенно просто. Предельный угол задает направления бесконечных сторон и потому многоугольник строится непосредственно, если заданы углы  $\alpha_i$  при его вершинах и проекции вершин на прямую  $T$ . (Роль кривизн  $\omega_i$  играют здесь, очевидно, величины  $\pi - \alpha_i$ .) Теорема 18 для конечных многоугольников далеко не так очевидна, и мы не знаем никакого другого ее доказательства, кроме простого пересказа того, которое дается в случае многогранников.

**6.** Вернемся, наконец, к замечанию, сделанному в начале этого параграфа по поводу полярного преобразования многогранника. Полярное преобразование относительно единичной сферы с центром во внутренней точке  $O$  выпуклого многогранника  $P$  сопоставляет ему также выпуклый многогранник  $P'$ . При этом грани многогранника  $P'$  перпендикулярны к лучам, идущим из  $O$  через вершины многогранника  $P$ , и обратно, вершины многогранника  $P'$  лежат на лучах, идущих из  $O$ , перпендикулярно к граням многогранника  $P$ . (См. п° 4 § 5 главы I.) Между гранями и вершинами обоих многогранников имеется полная взаимность: каждой грани одного отвечает вершина другого, и обратно, причем вершинам, принадлежащим данной грани, отвечают грани, сходящиеся в соответственной вершине. Спроектируем многогранник  $P$  из точки  $O$  на сферу  $E$ . Сфера разобьется на выпуклые сферические многоугольники  $S'_i$ , являющиеся проекциями граней  $Q'$  многогранника  $P'$ . Вершины этих многоугольников суть проекции вершин многогранника  $P'$  (см. рис. 32 на с. 46, где для простоты изображены полярные многоугольники. Для них вместо сферы нужно брать единичную окружность с центром  $O$ ).

Лучи, идущие из  $O$  через вершины какой-либо грани  $Q'_i$  многогранника  $P'$ , являются нормальными к граням многогранника  $P$ , сходящимися в его соответствующей вершине  $A_i$ . Поэтому многоугольник  $S_i$  оказывается сферическим многоугольником, натянутым на концы нормалей к граням, сходящимся в вершине  $A_i$ . Иными словами, этот многоугольник есть не что иное, как сферическое изображение вершины  $A_i$ .

Таким образом, проекция грани многогранника  $P'$  на сферу  $S$  есть сферическое изображение соответствующей вершины многогранника  $P$ . Ввиду полной взаимности многогранников  $P$  и  $P'$  их можно поменять здесь ролями.

Пользуясь этими замечаниями, каждой теореме о многогранниках с вершинами на данных лучах можно сопоставить теорему о многогранниках с гранями, перпендикулярными к тем же лучам. Так, например, теорема 18 превращается в следующую теорему:

**23.** Пусть из точки  $O$  исходят лучи  $l_1, \dots, l_m$ , не направленные в одно полупространство. Пусть  $\Omega_{i_1, \dots, i_k}$  — площадь сферического изображения телесного угла, являющегося выпуклой оболочкой совокупности лучей  $l_{i_1}, \dots, l_{i_k}$ . Для того чтобы среди замкнутых выпуклых многогранников с

точкой  $O$  внутри и с гранями, перпендикулярными к лучам  $l_i$ , существовал многогранник с данными площадями  $\omega_1, \dots, \omega_m$  центральных проекций его граней на единичную сферу с центром  $O$ , необходимы и достаточны следующие условия: 1) все  $\omega_i > 0$ ; 2)  $\sum_{i=1}^m \omega_i = 4\pi$ ; 3) для каждой совокупности лучей  $l_{i_1}, \dots, l_{i_k}$ , идущих в одно полупространство,  $\sum_j \omega_j > \Omega_{i_1, \dots, i_k}$ , где сумма берется по всем  $j$ , соответствующим лучам  $l_j$ , не попавшим в выпуклую оболочку совокупности лучей  $l_{i_1}, \dots, l_{i_k}$ .

Теорема 19 превращается в следующее утверждение:

24. Если у двух замкнутых выпуклых многогранников, имеющих общие внутренние точки, грани соответственно параллельны, то либо многогранные углы, проектирующие их параллельные грани из некоторой общей внутренней точки  $O$ , совпадают, так что многогранники подобны с центром подобия в  $O$ , либо среди этих углов, проектирующих грани любого из двух многогранников, есть хотя бы один, содержащий в себе угол, проектирующий параллельную грань другого (но не совпадающий с ним).

Поэтому, в частности, многогранник определяется данными теоремы 23 однозначно с точностью до подобия.

Теоремы 23 и 24 могут быть, конечно, доказаны и непосредственно, совершенно аналогично теоремам 18 и 19.

Теоремы о бесконечных многогранниках с вершинами на данных параллельных лучах не допускают такого полярного преобразования, потому что в них центр  $O$  лежит на бесконечности. Если же точку  $O$  взять не на бесконечности, то и для бесконечных многогранников получатся теоремы, допускающие полярное преобразование<sup>28)</sup>.

## § 6. ТЕОРЕМЫ ЖЕСТКОСТИ (Обзор результатов глав X и XI)

1. Пусть многогранник  $P_0$  подвергается некоторой деформации, т. е. дано непрерывное семейство многогранников  $P_t$ , зависящее от параметра  $t$ , причем значению  $t = 0$  соответствует исходный многогранник  $P_0$ . Параметр  $t$  удобно мыслить как время, в связи с чем мы будем говорить о движении

<sup>28)</sup> Бесконечный многогранник с вершинами на данных параллельных лучах можно задать уравнением  $z = f(x, y)$  над плоскостью  $(x, y)$ , перпендикулярной этим лучам. Вместо полярного преобразования относительно сферы к такому многограннику можно применить преобразование Лежандра (т. е. поляритет относительно эллиптического параболоида). Преобразование Лежандра ставит в соответствие плоскости  $z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0)$  и ее точке  $u_0 = p, v_0 = q, w_0 = px_0 + qy_0 - z_0$ , точку  $(x_0, y_0, z_0)$  и плоскость  $w - w_0 = x_0(u - u_0) + y_0(v - v_0)$ . Преобразование Лежандра, как и все поляритеты, переводит выпуклые многогранники в выпуклые многогранники, и каждой теореме о выпуклых многогранниках, заданных уравнением  $z = f(x, y)$ , соответствует некоторая «двойственная» ей теорема для полярного многогранника. — Прим. В. А. Залгаллера.

элементов многогранника, вызывающем его деформацию: о движении вершин, вращении граней и т. п.

Если  $x$  есть какая-либо величина, относящаяся к многограннику, как, например, площадь грани, длина ребра и т. п., то при деформации она будет функцией параметра  $t$ . Производную  $\frac{dx}{dt}$  мы будем часто называть *скоростью изменения* величины  $x$ . Величину  $x$  мы называем *стационарной*, если начальная скорость ее изменения равна нулю:  $(\frac{dx}{dt})_{t=0} = 0$ .

Предметом исследования будут не конечные деформации многогранников, а «начальные деформации», т. е. бесконечно малые деформации первого порядка в начальный момент. Иными словами, нас будут интересовать не самые изменения тех или иных элементов многогранника или связанных с ним величин, а только главные части первого порядка относительно  $t$ ; не приращения  $\Delta x$ , а дифференциалы  $dx$  или, что равносильно, начальные скорости  $(\frac{dx}{dt})_{t=0}$ .

Многогранник  $P_0$  называется *жестким* при тех или иных условиях, если всякая его начальная деформация, подчиненная этим условиям, сводится по своим скоростям к его движению как твердого тела (или в более общем случае — к некоторому другому заведомо тривиальному преобразованию). Это означает, что при этих условиях все элементы многогранника оказываются стационарными, если только исключить его движение, закрепив, например, одну вершину, направление исходящего из нее ребра и направление плоскости грани, прилегающей к этому ребру.

Теоремы жесткости сводятся к утверждениям такого типа: многогранник — жесткий, если при его деформациях какого-нибудь вида некоторые данные относящиеся к нему величины стационарны. Например, еще О. Коши по существу доказал, хотя и не формулировал явно, такую теорему<sup>29)</sup>: *если все грани замкнутого выпуклого многогранника жесткие, то и сам он жесткий*. То есть допустим, что замкнутый выпуклый многогранник деформируется так, что строение его не меняется, а плоскости граней движутся (переносятся и поворачиваются) с определенными скоростями. Тогда, если грани жесткие, т. е. длины ребер и углы на гранях стационарны, то начальная деформация многогранника сводится по своим скоростям к скоростям некоторого его движения как твердого целого.

Эта теорема аналогична теореме Коши о равенстве многогранников, одинаково составленных из равных граней. Аналогия становится особенно ясной, если заметить, что определению жесткости можно придать следующую

---

<sup>29)</sup>Эта теорема впервые явно высказана и доказана М. Деном [270]. Он не заметил, что буквальное повторение рассуждений Коши, приведших его к теореме о равенстве многогранников с равными гранями, дает также и эту теорему о жесткости. Метод Дена совершенно отличен от метода Коши. Другое доказательство дал Г. Вейль [363]. (Еще одно доказательство теоремы Дена см. в статье И. М. Пака [159]. — Прим. В. А. Залгаллера.)

форму: многогранник  $P_0$  — жесткий, если при данных условиях всякий деформированный многогранник  $P_t$  равен  $P_0$  с точностью первого порядка<sup>30)</sup> относительно  $t$ . Это определение, очевидно, эквивалентно предыдущему. Вместе с тем оно показывает, что теоремы жесткости являются теоремами о равенстве с точностью первого порядка. Это замечание наводит на мысль искать для каждой теоремы о равенстве соответствующую теорему жесткости. Конечно, такой переход от одних теорем к другим не будет, вообще говоря, тривиальным, потому что, во-первых, теоремы жесткости суть теоремы не о точном равенстве, но только о равенстве с точностью первого порядка, а во-вторых, их условия состоят не в точном равенстве тех или иных элементов многогранников, а только в их стационарности, т. е. в равенстве элементов многогранников  $P_0$  и  $P_t$  с точностью первого порядка относительно  $t$ . Тем не менее каждой теореме о равенстве (или, что то же, теореме единственности), высказанной в § 3–5, соответствует аналогичная теорема жесткости с небольшими изменениями условий или результата.

Дальше мы формулируем в качестве примеров несколько теорем жесткости из доказываемых в главах X и XI.

**2.** Соответственно теореме 2 § 4 о равенстве изометричных многогранников имеет место следующая теорема:

**25.** *Если замкнутый выпуклый многогранник деформируется так, что внутренние расстояния между его вершинами стационарны, то его начальная деформация сводится к движению. Короче, замкнутый выпуклый многогранник со стационарной внутренней метрикой — жесткий.* Этот результат можно сформулировать в несколько иной форме.

**25\*.** *Пусть на замкнутом выпуклом многограннике  $P_0$  задана некоторая его развертка  $R_0$ , все вершины которой лежат в вершинах или на ребрах многогранника  $P_0$ . Если многогранник  $P_0$  деформируется так, что на нем не появляется новых вершин, кроме, может быть, вершин развертки  $R_0$ , лежащих на его «старых» ребрах, то развертка  $R_0$  также деформируется<sup>31)</sup>, и если при этом длины ее ребер и углы ее многоугольников стационарны, то многогранник — жесткий, т. е. его начальная деформация неизбежно сводится к движению. Коротко: замкнутый выпуклый многогранник со стационарной разверткой — жесткий.*

<sup>30)</sup> То есть существуют равные  $P_0$  многогранники  $P_0^t$  такие, что максимум расстояний их вершин от соответствующих вершин  $P_t$  при малых  $t$  есть бесконечно малая более высокого порядка, чем  $t$ .

<sup>31)</sup> Мы докажем, что на многограннике  $P_t$ , близком к  $P_0$ , всегда есть развертка, близкая к  $R_0$ , вследствие чего и можно говорить о деформации развертки. Деформация многогранника  $P_0$  подчиняется некоторым общим условиям, которые мы здесь не формулируем. Коротко, они сводятся к тому, что новых вершин, кроме вершин развертки, на нем не появляется.

В теоремах 25 и 25\* заранее не исключается ни переламывание граней и ребер, ни даже нарушение выпуклости многогранника. Однако появление новых вершин допускается только внутри «старых» ребер. Если такие «новые» вершины имеются, то в теореме 25 и они учитываются среди всех вершин. Нарушение выпуклости многогранника может быть вызвано «проламыванием его внутрь» в новой вершине.

Теорема 25\* или 25 содержит как следствие приведенную выше теорему о жесткости многогранника с жесткими гранями. И она, конечно, более общая, потому что в ней допускается переламывание граней. А например, куб с одной вынутой гранью — жесткий, если грани жесткие, но он нежесткий, если допустить переламывание граней по диагоналям. (Первое утверждение следует из очевидной жесткости трехгранных углов со стационарными плоскими углами; второе утверждение проверяется непосредственно.)

Отличия теоремы 25\* от теоремы о равенстве многогранников с одинаковыми развертками, не считая общего отличия всякой теоремы жесткости от теорем о равенстве, состоят в следующем:

1) В теореме о равенстве нет условия, что вершины развертки лежат в вершинах или на ребрах многогранника: они могут при склеивании попадать внутрь граней. Но в теореме 25\* это ограничение оказывается необходимым: без него она неверна, как будет показано в § 1 главы X.

2) Теорема о равенстве верна для многогранников, вырождающихся в многоугольники, но теорема 25\* для них неверна. [Если допустить нарушение выпуклости, то это тривиально: стоит лишь сломать многоугольник по диагонали. Но и без нарушения выпуклости дважды покрытый многоугольник (кроме треугольника) — нежесткий. Возьмем, например, дважды покрытый квадрат  $ABCD$  со стороной, равной  $a$ , и выдвинем вершину  $D$  из его плоскости на высоту  $h = vt$ , где  $v$  — скорость движения вершины  $D$ . Получим тетраэдр с ребром  $CD = \sqrt{a^2 + h^2} \approx a + \frac{1}{2} \frac{v^2}{a} t^2$ . Отсюда видно, что изменение расстояний между вершинами будет второго порядка относительно  $t$ , т. е. эти расстояния стационарны, хотя вершина  $D$  движется с положительной скоростью. Аналогичные соображения применимы, конечно, к многоугольнику с любым числом сторон  $> 3$ .]

3) В теореме о равенстве многогранники предполагаются выпуклыми, в теореме же 25 или 25\* нарушение выпуклости при деформации заранее не исключается: оно может быть вызвано переламыванием граней с возникновением новых вершин на ребрах. (Теорема, однако, утверждает, что при стационарной развертке это движение точки внутрь многогранника имеет нулевую начальную скорость.) В этом отношении теорема 25 оказывается более общей, чем теорема 2.

Аналогично теореме 3 § 3 о равенстве двугранных углов при равенстве плоских углов имеет место следующая теорема:

26. Если замкнутый выпуклый многогранник деформируется так, что углы на его гранях стационарны, то и двугранные его углы стационарны. При этом под гранями можно понимать не истинные грани, а любые их части, на которые они разбиваются отрезками, не пересекающимися, однако, внутри истинных граней. Деформация многогранника состоит в движении плоскостей этих кусков граней.

Для бесконечных многогранников также имеют место теоремы жесткости, аналогичные теоремам о равенстве, изложенным в § 3. Их формулировки получаются, грубо говоря, простой подстановкой понятия стационарности на место равенства. Они будут точно сформулированы и доказаны в главе X.

3. Теорема 26 допускает интересную механическую интерпретацию.

27. Пусть дана система стержней, скрепленных на шарнирах в концах так, что они образуют систему ребер замкнутого выпуклого многогранника. В стержнях такой системы невозможны напряжения, если на них не действуют внешние силы и если стержни не изогнуты и находятся в равновесии.

Пример системы с напряжениями без воздействия внешних сил можно получить из трех спичек и трех резиновых нитей (рис. 71). Спички располагаются по сторонам правильного треугольника, а резиновые нити идут из вершин к центру треугольника. В центре они соединены и натянуты. Поэтому в этой системе имеются напряжения, хотя она находится в равновесии без воздействия внешних сил. Теорема 27 утверждает, что для системы ребер замкнутого выпуклого многогранника подобное состояние равновесия с напряжениями невозможно.

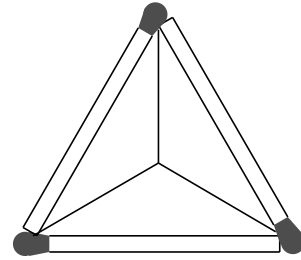


Рис. 71

Связь теорем 26 и 27 будет полностью выяснена в § 4 главы X; там же будут установлены аналогичные результаты для некоторых других стержневых систем.

4. В § 4 были указаны общие теоремы о равенстве выпуклых многогранников с параллельными гранями. Этим теоремам также соответствуют теоремы о жесткости. Для их формулировки введем понятие существенно монотонной функции многоугольника. Будем говорить, что функция  $f(Q)$  выпуклого многоугольника  $Q$  существенно монотонна, если при параллельном движении любой его стороны наружу функция  $f$  меняется со скоростью, большей нуля, т. е. если  $h_i$  — расстояние от данной точки внутри  $Q$  до прямой, содержащей  $i$ -ю сторону, то  $\frac{\partial f}{\partial h_i} > 0$ .

Примером могут служить площадь и периметр многоугольника.

Сформулируем теорему жесткости, аналогичную теореме 8 § 4 о равенстве замкнутых выпуклых многогранников:

28. Если замкнутый выпуклый многогранник деформируется вследствие параллельных смещений плоскостей его граней так, что для каждой грани некоторая (вообще говоря, своя для каждой грани) существенно монотонная ее функция стационарна, то начальная деформация многогранника сводится к его параллельному переносу.

В отличие от следствия теоремы 8, указанного в § 4, здесь на функции граней наложено условие существенной, а не простой монотонности. Без этого условия теорема 28 неверна. Например, положим  $f(Q) = [F(Q) - 1]^3$ , где  $F(Q)$  — площадь многоугольника  $Q$ . Эта функция, как легко видеть, монотонная: если  $Q_1$  содержит  $Q_2$ , то  $F(Q_1) > F(Q_2)$  и потому  $f(Q_1) > f(Q_2)$ . Однако при  $F(Q) = 1$  она не существенно монотонная, так как  $\frac{\partial f}{\partial h_i} = 3[F(Q) - 1]^2 \frac{\partial F}{\partial h_i}$ , так что  $\frac{\partial f}{\partial h_i} = 0$  при  $F = 1$ . Поэтому, если взять куб с ребром единица и выдвигать одну из его граней с произвольной скоростью, то функция  $f$  для всех его граней будет стационарной, хотя деформация явно не сводится к переносу даже с точностью только первого порядка.

Для бесконечных многогранников также имеются теоремы о жесткости, аналогичные теореме 28; дополнительное условие в них состоит в том, что плоскости бесконечных граней вообще должны быть неподвижны (или по крайней мере стационарны), зато условие о стационарности каких-нибудь существенно монотонных функций налагается только на конечные грани. Эти теоремы будут точно сформулированы и доказаны в главе XI.

5. Теоремы о равенстве, изложенные в § 3 и 4, доказываются, как было отмечено, с помощью леммы Коши. Оказывается, что в случае теорем жесткости в их общих формулировках, в которых мы их доказываем, эта лемма неприменима, потому что основное ее условие о невозможности только двух перемен знака при обходе вокруг вершины нельзя обеспечить заранее. Например, при стационарности плоских углов выпуклого многогранного угла число перемен знака скорости изменения его двугранных углов может равняться двум, если только имеются двугранные углы, равные  $\pi$ . Это как раз соответствует тому, что мы допускаем разбиение истинной грани многогранника на отдельные части. Возможность наличия только двух перемен знака в этом случае легко может быть установлена на примерах (см. § 1 главы X). Однако мы докажем, что в этом случае распределение знаков подчинено некоторому дополнительному условию, которое все же обеспечивает результат леммы Коши: невозможно, чтобы вокруг каждой вершины, к которой подходят отмеченные ребра, было не менее четырех перемен знака, либо две переменны с упомянутым дополнительным условием. Эта «усиленная лемма Коши» будет доказана в § 2 главы IX, и с ее помощью будут доказаны все теоремы о жесткости глав X и XI.

**6.** Общей теореме 19 о подобии многогранников с вершинами на данных лучах и с непоμεσαемыми друг внутри друга сферическими изображениями также отвечает теорема о жесткости. Для ее формулировки введем понятие о существенно монотонной функции сферического многоугольника, аналогично такому же понятию для плоского многоугольника.

Именно выпуклый сферический многоугольник ограничен большими кругами, несущими его стороны. При вращении такого большого круга вокруг двух его диаметрально противоположных точек, не принадлежащих стороне, многоугольник деформируется. Функцию  $f$  сферического многоугольника мы называем *существенно монотонной*, если при таком вращении любой данной его стороны с положительной скоростью наружу от многоугольника функция  $f$  возрастает с положительной скоростью. Этим свойством, как легко видеть, обладает, в частности, площадь.

Теорема о жесткости, соответствующая теореме 19, утверждает:

29. *Если замкнутый выпуклый многогранник деформируется вследствие движения его вершин по данным лучам, исходящим из его внутренней точки  $O$ , так, что для сферического изображения каждой вершины стационарна какая-либо его существенно монотонная функция, то начальная деформация многогранника сводится к подобному преобразованию относительно центра  $O$ .*

Эта теорема доказывается почти так же просто, как теорема 19 (см. § 1 главы IX). Сходные теоремы имеют место и для бесконечных многогранников при дополнительном условии стационарности предельного угла (см. § 2 главы IX).

**7.** Теперь мы выясним глубокую связь между теоремами жесткости, с одной стороны, и теоремами существования и единственности — с другой. Окажется, что при очень общих условиях из теорем жесткости можно вывести теоремы существования и единственности<sup>32)</sup>.

<sup>32)</sup> Отметим еще одну связь между теоремами жесткости и жесткости в бесконечно малом. Даже для случая невыпуклых поверхностей Н. В. Ефимовым было показано в [105], что если поверхность не допускает нетривиальных бесконечно малых изгибаний первого или второго порядка, то она не допускает непрерывных изгибаний, аналитических по параметру. Известно следующее обобщение этого факта: Для поверхностей, допускающих только одно линейно независимое поле нетривиальных бесконечно малых изгибаний первого порядка, жесткость третьего порядка влечет отсутствие непрерывных изгибаний, аналитических по параметру [105]; см. [162, 163, 193, 235, 236] для случая изгибаний более высоких порядков. В случае многогранников существование изгибания, непрерывного по параметру, автоматически влечет существование изгибания, аналитического по параметру. Этот алгебраически естественный результат, кажется, впервые был сформулирован Г. Глюком [283]. Отсюда, в частности, вытекает, что многогранник, не допускающий нетривиальных бесконечно малых изгибаний первого или второго порядка, не допускает также изгибаний, непрерывных по параметру. Используя этот результат, Р. Коннелли



Пусть  $a_1, \dots, a_n$  — какие-либо параметры, определяющие многогранник с точностью до некоторого тривиального преобразования, а  $b_1, \dots, b_n$  — другие параметры, относящиеся к многограннику, для которых мы хотим доказать, что они также определяют многогранник с точностью до такого же преобразования, т. е. речь идет о теоремах существования и единственности многогранника с данными  $b_1, \dots, b_n$ . Например, если рассматривать замкнутые многогранники с  $n + 1$  вершинами, лежащими на данных лучах, исходящих из общей точки  $O$ , то параметры  $a_1, \dots, a_n$  могут быть отношениями расстояний  $n$  вершин от точки  $O$  к расстоянию от  $O$  до  $(n + 1)$ -й вершины. Эти отношения определяют многогранник с точностью до подобия с центром  $O$ . За параметры  $b_1, \dots, b_n$  можно взять кривизны (площади сферических изображений)  $n$  вершин; кривизна  $(n + 1)$ -й вершины определяется из условия, что полная кривизна замкнутого многогранника равна  $4\pi$ .

Так как параметры  $a_i$  определяют многогранник, то величины  $b_i$  будут их функциями:

$$b_i = f_i(a_1, \dots, a_n) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (1)$$

Эти функции мы предполагаем дифференцируемыми, так что

$$db_i = \frac{\partial b_i}{\partial a_1} da_1 + \dots + \frac{\partial b_i}{\partial a_n} da_n \quad (i = 1, \dots, n). \quad (2)$$

(Это условие дифференцируемости имеет место для всяких параметров  $b_i = f(a_1, \dots, a_n)$ , представляющих естественный интерес. В частности, и в приведенном примере кривизны вершин являются дифференцируемыми функциями расстояний вершин от точки  $O$ ; в этом нетрудно убедиться.)

*Теорема о жесткости многогранника  $P_0$  при стационарных  $b_i$  состоит, очевидно, в том, что если все  $db_i = 0$ , то при значениях  $a_i = a_i^0$ , относящихся к  $P_0$ , все  $da_i = 0$ . Иными словами, однородная система (2) не имеет иных решений, помимо тривиального. Это эквивалентно тому, что определитель системы (2), т. е. якобиан системы функций (1), отличен от нуля. А в таком случае, как известно, функции (1) обратимы в окрестности значений  $a_i = a_i^0$  и  $b_i = b_i^0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), соответствующих данному многограннику  $P_0$ . Следовательно, задав  $b_i$ , близкие к  $b_i^0$ , мы можем и притом единственным образом найти по ним  $a_i$ , близкие к  $a_i^0$ ; тем самым существует многогранник  $P$ , близкий к  $P_0$  (с точностью до тривиального преобразования) и имеющий данные  $b_i$ , причем такой многогранник — единственный с точностью до тривиального преобразования.*

---

[262] доказал, что произвольным образом триангулированный выпуклый многогранник, у которого все новые грани жесткие, не допускает непрерывного по параметру изгибаения в классе всех (не обязательно выпуклых) многогранников. И. Х. Сабитовым отмечено в [115, с. 153–154], что этот результат может быть выведен из теоремы Погорелова о жесткости общей выпуклой поверхности. — Прим. В. А. Залгаллера.

Таким образом, из теоремы жесткости следуют теоремы существования и единственности в малой окрестности данного многогранника  $P_0$ .

**8.** Две следующие леммы дают условия, при которых этот результат может быть расширен до полных теорем существования и единственности.

**Лемма А.** Пусть  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  — два многообразия и пусть дано однозначное непрерывное отображение  $\varphi$  многообразия  $\mathbf{A}$  в  $\mathbf{B}$ , удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) если точка  $B$  из  $\mathbf{B}$  есть образ точки  $A$  из  $\mathbf{A}$ :  $B = \varphi(A)$ , то существует окрестность точки  $B$ , допускающая обратное отображение  $\varphi^{-1}$  в  $\mathbf{A}$ ;
- 2) во всякой связной компоненте многообразия  $\mathbf{B}$  содержатся образы точек из  $\mathbf{A}$ ;
- 3)  $\varphi(\mathbf{A})$  замкнуто, т. е. если точки  $B_n = \varphi(A_n)$  сходятся к  $B$ , то  $B$  есть образ некоторой точки из  $\mathbf{A}$ .

Тогда  $\varphi$  есть отображение  $\mathbf{A}$  на  $\mathbf{B}$ .

В силу условия 1, если  $B \in \varphi(\mathbf{A})$ , то  $B$  имеет окрестность, содержащуюся в  $\varphi(\mathbf{A})$ , следовательно,  $\varphi(\mathbf{A})$  — открытое множество.

Соединяя этот результат с требованиями 2 и 3 совершенно так же, как в лемме об отображении, получим, что  $\varphi(\mathbf{A}) = \mathbf{B}$ <sup>33)</sup>. Если  $\mathbf{A}$  есть многообразие многогранников, рассматриваемых с точностью до тривиального преобразования, а  $\mathbf{B}$  есть многообразие данных  $B(b_1, \dots, b_1)$ , для которых имеет место теорема о жесткости, то, как только что показано, из этой теоремы вытекает условие 1 леммы А. Поэтому, как только два других условия выполнены, имеет место полная теорема существования. Такое доказательство теоремы 1 существования замкнутого выпуклого многогранника с данной разверткой дается в главе VI моей книги [18].

**Лемма В.** Пусть  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\varphi$  имеют то же значение, что в лемме А, причем  $\varphi$  есть отображение  $\mathbf{A}$  на  $\mathbf{B}$  (что имеет место, например, при условиях леммы А). Пусть, кроме того, выполнены следующие условия:

- 1) если точка  $B$  из  $\mathbf{B}$  есть образ точки  $A$  из  $\mathbf{A}$ , то имеется окрестность точки  $A$ , отображение которой в окрестность  $B$  взаимно однозначно и взаимно непрерывно;

<sup>33)</sup>Этот метод чаще представляют как метод непрерывного продолжения. Пусть  $B_0 \in \varphi(\mathbf{A})$  и  $B_1$  — любое такое, что существует непрерывная кривая  $B_t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ), соединяющая  $B_0$  с  $B_1$ . Тогда из условия 1 леммы А следует, что при малых  $t$   $B_t \in \varphi(\mathbf{A})$ . Пусть  $T$  — точная верхняя граница тех  $t$ , при которых  $B_t \in \varphi(\mathbf{A})$ . Тогда по условию 3  $B_T \in \varphi(\mathbf{A})$  и при  $T < 1$  по условию 1 можно было бы взять  $t > T$  такое, что  $B_t \in \varphi(\mathbf{A})$ . Следовательно,  $T = 1$  и  $B_1 \in \varphi(\mathbf{A})$ . Условие 2 обеспечивает соединимость любой точки  $B$  из  $\mathbf{B}$  с какой-нибудь точкой из  $\varphi(\mathbf{A})$ .

2) многообразие  $\mathbf{A}$  связно, а многообразие  $\mathbf{B}$  односвязно<sup>34)</sup>, т. е. всякую замкнутую кривую в нем можно стянуть в точку.

Тогда отображение  $\varphi$  взаимно однозначно.

Эта лемма хорошо известна в топологии. Отображение  $\varphi$ , удовлетворяющее условиям леммы  $B$ , есть не что иное, как отображение накрытия многообразия  $\mathbf{A}$  на  $\mathbf{B}$ , и если  $\mathbf{B}$  односвязно, то, как известно, такое отображение есть гомеоморфизм, т. е., в частности, оно взаимно однозначно. Легко, впрочем, доказать лемму  $B$ , не ссылаясь на теорию накрывающих многообразий, что мы и сделаем.

Допустим, что  $\varphi$  не взаимно однозначно. Тогда в  $\mathbf{B}$  найдется точка  $B$ , являющаяся образом двух разных точек  $A_0$  и  $A_1$  из  $\mathbf{A}$ . По связности многообразия  $\mathbf{A}$  существует непрерывная кривая  $L$ , соединяющая  $A_0$  с  $A_1$ , т. е. каждому  $t$  из отрезка  $(0, 1)$  можно сопоставить точку  $A(t)$  так, что  $A(t)$  зависит от  $t$  непрерывно и  $A(0) = A_0$ ,  $A(1) = A_1$ .

Образ этой кривой есть некоторая кривая  $M = \varphi(L)$  с точками  $B(t) = \varphi(A(t))$ ; кривая эта — замкнутая, потому что  $\varphi(A_0) = \varphi(A_1) = B$ . По условию 2 кривую  $M$  можно стянуть в некоторую точку  $B_0$ , т. е. существует такое непрерывное семейство кривых  $M(s)$  ( $0 \leq s \leq 1$ ), что  $M(0) = M$ ,  $M(1) = B_0$ ; при этом имеется в виду, что точки  $B(t, s)$  кривых  $M(s)$  таковы, что 1)  $B(t, s)$  непрерывно зависит от обоих аргументов,  $0 \leq t \leq 1$ , и 2) при данном  $s$   $B(t, s)$  есть параметрическое представление кривой  $M(s)$ .

По первому условию леммы отображение  $\varphi$  взаимно однозначно и взаимно непрерывно в окрестности всякой точки  $A \in \mathbf{A}$ .

По лемме Бореля кривую  $L$  можно покрыть конечным числом таких окрестностей  $U_1, \dots, U_m$  и разбить эту же кривую  $L$  на отрезки  $L_1, \dots, L_m$ , содержащиеся соответственно в  $U_1, \dots, U_m$ : каждому отрезку  $L_i$  отвечает сегмент  $\tau_i = [t_{i-1}, t_i]$  на отрезке  $[0, 1]$  такой, что если  $t \in \tau_i$ , то  $A(t) \in U_i$ .

Соответственно кривая  $M$  будет покрыта окрестностями  $\nu_i = \varphi(U_i)$  и разобьется на отрезки  $M_i = \varphi(L_i)$ . Пусть  $s_0$  столь малó, что кривая  $M(s_0 t_0)$  лежит в окрестности  $\nu = \sum_i \nu_i$  кривой  $M = M(0)$ . Возьмем любое значение параметра  $t$ . Пусть оно принадлежит сегменту  $\tau_i$ . Тогда точка  $B(t, s_0) \in \nu_i = \varphi(U_i)$ , и мы можем однозначно отнести ей ее прообраз, который обозначим  $A(t, s_0)$ . В результате отрезкам кривой  $M(s_0)$ , соответствующим сегментам  $\tau_i$ , будут сопоставлены некоторые кривые  $L_i(s_0)$  в  $\mathbf{A}$ . Эти кривые имеют последовательно общие концы, потому что отрезки  $M_i$  имеют общие концы, принадлежащие одним и тем же окрестностям, в которых отображение  $\varphi$  взаимно однозначно. Следовательно, кривые  $L_i(s_0)$  образу-

<sup>34)</sup> Достаточно, например, открытую прямоугольную полосу  $\mathbf{A}$  «намотать» на боковую поверхность цилиндра  $\mathbf{B}$  так, чтобы концы полосы налегали друг на друга, как мы получим уже неоднозначное отображение, для которого выполнены все условия леммы, кроме односвязности  $B$ .

ют в сумме одну кривую  $L(s_0)$ , концы которой лежат, очевидно, в точках  $A_0$  и  $A_1$ . Образ кривой  $L(s_0)$  есть кривая  $B(t, s_0)$ .

То же рассуждение можно повторить, отправляясь теперь не от кривой  $A_t$ , а от кривой  $L(s_0)$  и т. д. В результате мы придем к тому, что каждой кривой  $M(s)$  можно сопоставить кривую  $L(s)$ , соединяющую точки  $A_0$  и  $A_1$  и отображающуюся на  $M(s)$ <sup>35</sup>). Но  $M(1)$  есть одна точка  $B_0$ , а  $L(1)$  — кривая, соединяющая две точки  $A_0$  и  $A_1$ . Поэтому отображение  $\varphi$  кривой  $L(1)$  на  $M(1) = B_0$  не взаимно однозначно в любой окрестности каждой точки, например  $A_0$ . Это противоречит условиям леммы. Следовательно, предположение о том, что в одну точку  $B_0$  отображаются две точки  $A_0$  и  $A_1$ , неверно; отображение  $\varphi$  должно быть взаимно однозначным, что и требовалось доказать.

**9.** Пусть  $\mathbf{A}$  — многообразие многогранников, рассматриваемых с точностью до некоторого тривиального преобразования, а  $\mathbf{B}$  — многообразие данных  $B(b_1, \dots, b_n)$ , для которых выполняется теорема жесткости. Тогда, как было показано, из этой теоремы вытекает первое условие леммы  $B$ . Поэтому, если  $\mathbf{A}$  связно, а  $\mathbf{B}$  односвязно, то отображение  $\varphi$  многообразия  $\mathbf{A}$  на  $\mathbf{B}$  взаимно однозначно, что означает, что имеет место теорема единственности с точностью до соответствующего тривиального преобразования. Если, например,  $\mathbf{A}$  есть многообразие многогранников с вершинами на данных лучах и рассматриваемых с точностью до подобия, а  $\mathbf{B}$  — многообразие допустимых значений площадей сферических изображений  $\omega_i$ , то  $\mathbf{A}$ , очевидно, связно, а  $\mathbf{B}$  заведомо односвязно, потому что оно выпукло, как ясно из определяющих его условий, указанных в теореме 18. Аналогичное положение имеется и в других случаях; например, в теореме Минковского 11, где  $\mathbf{A}$  — многообразие многогранников с данными направлениями граней, а  $\mathbf{B}$  — многообразие допустимых значений площадей граней; многообразие  $\mathbf{B}$  в этом случае тоже выпукло и потому односвязно. (Однако в случае теорем о существовании многогранника с данной разверткой я не могу установить односвязность многообразия допустимых разверток.)

Итак, мы получаем следующий общий метод доказательства теорем существования и единственности:

1. Доказываем соответствующую теорему жесткости и из нее выводим существование и единственность «в малых окрестностях».
2. Доказываем, что выполняются условия леммы  $A$ , и тогда получаем полную теорему существования.

<sup>35</sup>) Строгое обоснование этого заключения проводится так: для малых  $s$  утверждение верно. Пусть  $S$  — точная верхняя граница таких  $s$ . Тогда, беря  $s \rightarrow S_0$ , получим кривую  $L(S)$ , а к ней применимы те же рассуждения и, следовательно, должно быть  $S = 1$ .

3. Доказываем, что выполняются еще условия леммы  $B$ , и тогда получаем теорему единственности.

Такой метод имеет свои преимущества:

Во-первых, теорема жесткости сводится, как было показано, к линейной задаче: к исследованию уравнений (2), а потому может легче поддаваться решению, особенно при аналитической трактовке вопроса. По той же причине этот метод легче обобщается на задачи, касающиеся кривых поверхностей, где многообразия  $A$  и  $B$  суть бесконечномерные функциональные пространства<sup>36)</sup>.

Во-вторых, для доказательства существования оказывается ненужной полная теорема единственности в отличие от того, что требует метод, основанный на лемме об отображении.

Однако, если теорема единственности может быть доказана прямым путем, то лемма об отображении дает более короткий путь доказательства существования. Кроме того, теоремы о жесткости с чисто геометрической точки зрения представляются несколько искусственными ввиду привлечения понятий и теорем дифференциального исчисления.

10. Вернемся к вопросу о нарушениях теоремы жесткости многогранников со стационарной разверткой. Мы показали, что эта теорема не имеет места для многогранников, вырождающихся в многоугольники, даже при условии сохранения выпуклости многогранника. Сейчас мы убедимся в этом на основании совсем других соображений.

Пусть  $B$  — многообразии разверток с данным числом вершин, а  $A$  — многообразии замкнутых выпуклых многогранников, рассматриваемых с точностью до движения, но не отражения. Так как из одной развертки можно склеить два взаимно симметричных многогранника, то отображение  $A$  на  $B$  не взаимно однозначно, а двулистно. Неоднозначность, связанная с наличием у какого-нибудь невырожденного многогранника элементов симметрии, устраняется наименованием его вершин соответственно вершинам развертки<sup>37)</sup>. Это, однако, невозможно для вырожденного многогранника: при отражении его в его плоскости все вершины переходят сами в себя. Сколь угодно малые смещения его вершин, произведенные по разные стороны от его плоскости, приводят к симметричным многогранникам, т. е. дают пере-

<sup>36)</sup> Именно этим методом воспользовался Г. Вейль [362] для решения задачи о существовании замкнутой выпуклой поверхности с данной метрикой.

<sup>37)</sup> Если многогранник  $P_0$  имеет плоскость симметрии и  $X, Y$  — две симметричные его вершины, то симметричные их смещения приводят к парам взаимно симметричных многогранников, близких к  $P_0$ . Однако при совмещении их путем отражения вершина  $X$  попадает в  $Y$ , и обратно; поэтому, если допускать совмещение лишь одинаково поименованных вершин, то такие совмещения исключаются. Аналогичное замечание применимо в случае наличия других элементов симметрии. Двулистность отображения  $A$  на  $B$  можно устранить, вводя ориентацию разверток и тем самым удваивая  $B$ .

ход с одного листа многообразия  $\mathbf{A}$  на другой. Множество вырожденных многогранников отображается в  $\mathbf{B}$  однозначно и представляет собой множество разветвления многообразия  $\mathbf{A}$  при его отображении на  $\mathbf{B}$ , подобно точке разветвления функции  $\sqrt{x + iy}$ . Поэтому отображение  $\mathbf{A}$  на  $\mathbf{B}$  не может быть взаимно однозначным в окрестности вырожденных многогранников, а потому и теорема о жесткости для них не может иметь места. При доказательстве существования многогранника с данной разверткой, основанном на теореме жесткости, приходится исключать вырожденные многогранники и их развертки.

**11.** В заключение еще одно общее замечание. Пусть  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ , как и выше, — многообразия многогранников  $A$ , определенных параметрами  $a_1, \dots, a_n$ , и некоторых данных  $B(b_1, \dots, b_n)$ . Пусть отображение  $\varphi$  многообразия  $\mathbf{A}$  на  $\mathbf{B}$  задается непрерывно дифференцируемыми функциями (1). Множество тех  $A$ , где нарушается теорема жесткости, есть множество нулей якобиана этой системы функций. Это множество, следовательно, замкнуто. Если оно содержит внутреннюю точку  $A$ , то в окрестности этой точки функции (1) зависимы, и потому отображение  $\varphi$  не взаимно однозначно. Следовательно, если  $\varphi$  взаимно однозначно, т. е. имеет место теорема единственности, то множество, где нарушается теорема жесткости, есть замкнутое нигде не плотное множество.

## § 7. ПЕРЕХОД ОТ МНОГОГРАННИКОВ К КРИВЫМ ПОВЕРХНОСТЯМ

**1.** Общие теоремы о выпуклых многогранниках, о которых шла речь в §3–6, имеют значение не только сами по себе, но еще с той точки зрения, что они допускают обобщения на более или менее произвольные выпуклые поверхности. При исследовании задач теории выпуклых поверхностей оказывается сначала полезным поставить и решить эти задачи для многогранников. В одних случаях это позволяет путем предельного перехода от многогранников к общим выпуклым поверхностям решить поставленную задачу теории поверхностей. В других случаях, когда такой предельный переход не удается, мы получаем по крайней мере ориентировку в вопросе.

Благодаря наглядности и простоте свойств многогранников такой подход оказывается часто очень полезным, особенно в вопросах геометрии «в целом» или в применении к нерегулярным поверхностям, когда обычные для теории поверхностей аналитические методы теряют свой автоматизм<sup>38)</sup>.

Так как нашей темой являются выпуклые многогранники, то мы ограничиваемся тем, что в конце почти каждой главы в параграфе «Обобщения» приводим без доказательства соответствующие теоремы для других выпуклых поверхностей с указанием на источники, где эти теоремы доказываются. Здесь же мы сделаем несколько общих замечаний — прежде всего о том, какие задания для общей выпуклой поверхности соответствуют рассматриваемым заданиям для многогранников.

**2.** В §3 уже было выяснено, что задание развертки многогранника эквивалентно заданию его внутренней метрики. Для общей выпуклой поверхности речь должна идти

<sup>38)</sup> Последовательное проведение метода приближения многогранниками в применении к внутренней геометрии произвольных выпуклых поверхностей дано в моей книге [18].

также о ее внутренней метрике, т. е. о функции пары ее точек, дающей расстояние между этими точками, измеренное на поверхности; оно равно по определению точной нижней границе длин кривых, лежащих на поверхности и соединяющих данные ее точки.

Пусть на сфере  $S$  (или на другом многообразии) задана непрерывная функция  $\rho(X, Y)$  пары ее точек; мы говорим, что  $\rho(X, Y)$  есть метрика поверхности  $F$  или что поверхность  $F$  реализует метрику  $\rho(X, Y)$ , если существует такое топологическое отображение  $h$  сферы  $S$  на поверхность  $F$ , что для каждой пары точек  $X, Y$   $\rho(X, Y) = \rho_F(h(X), h(Y))$ , где  $\rho_F$  — внутренняя метрика поверхности  $F$ .

Пусть  $F_i$  и  $\mathbf{n}_i$  — площади и внешние нормали граней многогранника  $P$ . Рассмотрим единичную сферу  $E$ , на которую производится сферическое отображение. Тогда, если  $M$  есть какое-либо множество на  $E$ , то

$$F_P(M) = \sum_{\mathbf{n}_i \in M} F_i$$

есть площадь того множества на  $P$ , которое является полным прообразом множества  $M$  при сферическом отображении. (Сумма берется по всем граням, нормали к которым направлены в  $M$ .)  $F_P(M)$  есть функция множества на сфере  $E$ , называемая *поверхностной функцией* многогранника  $P$ . Задание площадей и нормалей граней, очевидно, эквивалентно заданию поверхностной функции. Для произвольной выпуклой поверхности  $\Phi$  поверхностная функция определяется точно так же:  $F_\Phi(M)$  есть площадь того множества  $N$  на  $\Phi$ , которое является полным прообразом множества  $M$  при сферическом отображении, т. е. через каждую точку из  $N$  проходит хотя бы одна опорная плоскость, внешняя нормаль к которой направлена в  $M$ . (Можно доказать, что  $F_\Phi(M)$  есть вполне аддитивная функция, определенная во всяком случае для всех борелевских множеств  $M$ <sup>39)</sup>.)

Пусть  $\bar{e}_i$  — данные лучи, исходящие из точки  $O$ , или соответственно точки на единичной сфере  $E$  с центром в  $O$ . Пусть  $\omega_i$  — площади сферических изображений вершин многогранника  $P$ , лежащих на лучах  $\bar{e}_i$ . Если  $M$  есть множество на  $E$ , то

$$\omega_{P,O}(M) = \sum_{\bar{e}_i \in M} \omega_i$$

есть площадь сферического изображения того множества на  $P$ , центральной проекцией которого является множество  $M$ . Функция множества  $\omega_{P,O}(M)$  зависит не только от многогранника, но и от выбора точки  $O$  или сферы  $E$ , поэтому мы называем ее площадью сферического изображения, отнесенной к сфере  $E$ . Задание лучей  $\bar{e}_i$  и сферических изображений вершин  $\omega_i$ , очевидно, эквивалентно заданию этой функции.

Для произвольной выпуклой поверхности  $\Phi$  поверхностная функция определяется аналогично:  $\omega_{\Phi,O}(M)$  есть площадь сферического изображения того множества на  $\Phi$ , центральной проекцией которого из точки  $O$  на сферу  $E$  является множество  $M$ . (Можно доказать, что  $\omega_{\Phi,O}(M)$  есть вполне аддитивная функция, определенная во всяком случае для всех борелевских множеств [18, § 2, 4 гл. V].)

Аналогично для бесконечной выпуклой поверхности  $\Phi$  определяется функция  $\omega_{\Phi,T}(M)$  — площадь сферического изображения, отнесенная к плоскости  $T$ : для данного множества  $M$  на плоскости  $T$  и  $\omega_{\Phi,T}(M)$  есть площадь сферического изображения того множества на поверхности  $\Phi$ , проекцией которого служит  $M$ .

<sup>39)</sup>См. А. Д. Александров [4]. В этой работе впервые введено и само понятие поверхностной функции.

Наконец, вместо опорных чисел для многогранника в случае произвольной выпуклой поверхности нужно рассматривать ее опорную функцию  $H(\mathbf{u})$ . Для единичного вектора  $\mathbf{n}$  значение  $H(\mathbf{n})$  есть расстояние от начала  $O$  до опорной плоскости  $Q$  с внешней нормалью  $\mathbf{n}$ , считающееся положительным, если направление от  $O$  к  $Q$  совпадает с направлением вектора  $\mathbf{n}$ , и отрицательным, если это направление противоположно  $\mathbf{n}$ . Если вектор  $\mathbf{u}$  — не единичный, то  $H(\mathbf{u}) = |\mathbf{u}|H(\mathbf{u}/|\mathbf{u}|)$ .

Следует еще отметить, что вместо предельного многогранного угла для общей бесконечной выпуклой поверхности следует рассматривать «предельный конус», определяемый совершенно аналогично.

Пользуясь введенными общими понятиями, легко сформулировать теоремы единственности и жесткости для общих выпуклых поверхностей соответственно приведенным выше теоремам для многогранников. Для формулировки теорем существования нужны еще условия, которые следует наложить на соответствующие данные. Для функций  $H(\mathbf{u})$ ,  $F_{\Phi}(M)$ ,  $\omega_{\Phi,E}(M)$ ,  $\omega_{\Phi,T}(M)$  эти условия легко получаются из условий теорем о многогранниках. Они формулируются в последних параграфах глав VII и IX. Исключение составляет метрика  $\rho(X, Y)$ : необходимые условия, налагаемые на нее, не могут быть получены простым пересказом условий теорем о многогранниках<sup>40)</sup>.

**3.** Теоремы единственности и жесткости не могут быть сами по себе перенесены с многогранников на другие выпуклые поверхности путем предельного перехода. Для того чтобы это стало возможным, эти теоремы нужно дополнить оценками деформации многогранника в зависимости от изменения тех данных, которые фигурируют в этих теоремах, причем эти оценки не должны зависеть от числа вершин или во всяком случае не должны вырождаться при бесконечном возрастании числа вершин.

Рассмотрим, например, теорему 3 о равенстве изометричных замкнутых выпуклых многогранников. Ей должна соответствовать до сих пор не доказанная в общем случае теорема о равенстве изометричных замкнутых выпуклых поверхностей<sup>41)</sup>. Подход к доказательству этой предполагаемой теоремы через оценки деформации многогранника в зависимости от изменения его внутренней метрики был, между прочим, указан С. Э. Кон-Фоссеном [126] и состоит в следующем. Пусть  $r_{ij}$  и  $\rho_{ij}$  — расстояния между  $i$ -й и  $j$ -й вершинами многогранника, измеренные соответственно в пространстве и на самом многограннике. Пусть, далее,  $P_1$  и  $P_2$  — два замкнутых выпуклых многогранника, вершины которых поставлены во взаимно однозначное соответствие, и  $r_{ij}^{(1)}$ ,  $r_{ij}^{(2)}$ ,  $\rho_{ij}^{(1)}$ ,  $\rho_{ij}^{(2)}$  — введенные выше расстояния между их вершинами. Величина  $\Delta r = \max |r_{ij}^{(1)} - r_{ij}^{(2)}|$  характеризует, очевидно, величину пространственной деформации при переходе от  $P_1$  к  $P_2$ , а  $\Delta \rho = |\rho_{ij}^{(1)} - \rho_{ij}^{(2)}|$  — величину внутренней деформации. Требуется дать оценку

$$\Delta r \leq f(\Delta \rho), \quad (1)$$

где непрерывная функция  $f$  должна обращаться в нуль при  $\Delta \rho = 0$  и не зависеть от многогранников  $P_1$  и  $P_2$  или зависеть от самых общих характеристик их формы, как, например, от радиусов шаров, содержащих  $P_1$  и  $P_2$  и содержащихся в них. Допустим, что такая оценка найдена. Пусть  $F_1$  и  $F_2$  — две изометричные замкнутые выпуклые поверхности. Возьмем на них достаточно густые сети точек  $A_i^1$ ,  $A_i^2$ , соответствующих друг другу в силу изометрического отображения  $F_1$  на  $F_2$ . Впишем в  $F_1$  и  $F_2$  замкнутые выпуклые многогранники  $P_1$  и  $P_2$  с вершинами в этих точках. Тогда, как оказывается, чем

<sup>40)</sup> Эти условия можно найти в [18] или в другой форме в [15].

<sup>41)</sup> Теперь эта общая теорема доказана А. В. Погореловым [168] и, иным путем, Ю. А. Волковым [88]. — Прим. В. А. Залгаллера.



гуще сеть точек  $A_i$ , тем ближе расстояние между ними, измеренное на многограннике, подходит к расстоянию, измеренному на поверхности. А так как поверхности изометричны, то тем самым величина  $\Delta\rho$  для многогранников  $P_1$  и  $P_2$  стремится к нулю по мере сгущения сети точек  $A_i$ .

Если мы имеем оценку (1) с требуемыми свойствами, то при  $\Delta \rightarrow 0$  будем иметь  $\Delta r \rightarrow 0$ . Но  $\Delta r = \max |r_{ij}^{(1)} - r_{ij}^{(2)}|$  есть не что иное, как максимум разности пространственных расстояний между соответственными точками  $A_i, A_j$  поверхностей  $F_1$  и  $F_2$ . Поэтому должно быть  $\Delta r = 0$ , т. е. поверхности  $F_1$  и  $F_2$  равны<sup>42)</sup>.

Аналогичный подход возможен априори к любой другой теореме единственности. Однако, насколько я знаю, ни для одной из них не известна ни одна оценка желаемого типа, и потому такой подход к переносу теорем единственности с многогранников на общие выпуклые поверхности остается пока в области чистых гипотез<sup>43)</sup>.

Так же обстоит дело и с теоремами жесткости. Поэтому эти теоремы для выпуклых поверхностей доказываются иными методами. Более того, например, теоремы единственности и жесткости замкнутой выпуклой поверхности с данной (стационарной) внутренней метрикой до сих пор вообще не доказаны без дополнительных предположений о некоторой регулярности поверхности<sup>44)</sup>. Таким образом, в вопросах единственности и жесткости теоремы о многогранниках могут служить лишь указанием на результат, к которому можно стремиться при переходе к любым выпуклым поверхностям.

4. С теоремами существования дело обстоит гораздо проще: все приведенные выше теоремы существования для выпуклых многогранников переносятся путем предельного перехода на общие выпуклые поверхности. Этот переход осуществляется в общих чертах следующим образом.

Пусть мы хотим доказать существование выпуклой поверхности с данными  $B_0$ . Пусть соответствующая теорема существования для выпуклых многогранников уже известна. Тогда доказываем теорему сходимости: если выпуклые многогранники  $P_n$  сходятся к поверхности  $F$ , то их данные  $P_{P_n}$  сходятся в том или ином смысле к данным  $B_F$ , относящимся к  $F$ . От сходимости данных  $B$  требуется лишь, чтобы она была однозначной, т. е.  $B_n$  не могут иметь двух пределов в смысле этой сходимости. Затем строим последовательность данных  $B_n$ , сходящихся к  $B_0$  и относящихся к многогранникам. По теореме существования для многогранников существуют выпуклые многогранники  $P_n$  с данными  $B_n$ . Из этих многогранников выбираем сходящуюся последовательность  $P_{n_i}$ , что, оказывается, всегда можно сделать. Предел этой последовательности будет некоторой выпуклой поверхностью. По теореме сходимости  $B_{n_i}$  сходятся к  $B_F$  и вместе с тем по заданию  $B_{n_i}$  сходятся к  $B_0$ , а так как предел данных  $B_{n_i}$  может быть только один, то  $B_F = B_0$ , т. е. поверхность  $F$  имеет данные  $B_0$ .

Если данные  $B_0$  представляют собой опорную функцию  $H(\mathbf{n})$ , то сходимость данных  $B_m$  к  $B_0$  есть просто сходимость опорных функций, или сходимость опорных чисел  $h_i$  к значениям опорной функции  $H(\mathbf{n})$  для векторов  $\mathbf{n}_i$  при условии, что множество точек  $\mathbf{n}_i$  на сфере беспредельно сгущается.

Если  $B_0$  есть метрика  $\rho(X, Y)$ , заданная на сфере  $S$ , то ее нужно приближать многогранными метриками положительной кривизны. Теорема же о сходимости метрик выглядит так: если замкнутые или бесконечные полные выпуклые поверхности  $\Phi_n$  сходятся

<sup>42)</sup> Именно этот путь реализован в работе Ю. А. Волкова [88]. — Прим. В. А. Залгаллера.

<sup>43)</sup> Теперь кроме [88] следует указать также на работы [87, 98, 119] и [173, гл. 7]. — Прим. В. А. Залгаллера.

<sup>44)</sup> Теперь они доказаны А. В. Погореловым, см. [173, гл. 4]. — Прим. В. А. Залгаллера.

к  $\Phi$  и точки  $X_n, Y_n$  на  $\Phi_n$  сходятся соответственно к  $X, Y$ , то  $\rho_{\Phi_n}(X_n, Y_n)$  сходятся к  $\rho_{\Phi}(X, Y)$ . Если  $B_0$  есть одна из функций множества  $F(M)$  или  $\omega(M)$  на единичной сфере  $E$ , то сходимость следует понимать в смысле слабой сходимости. Если  $\varphi_n(M)$  и  $\varphi(M)$  — вполне аддитивные функции множества на сфере  $E$ , то говорят, что  $\varphi_n$  слабо сходятся к  $\varphi$ , если для всякой непрерывной функции  $f(X)$  точки  $X$  на сфере  $E$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f(X) \varphi_n(dM) = \int_E f(X) \varphi(dM),$$

где интеграл понимается в смысле Радона<sup>45)</sup>. Заданные функции  $F(M)$  и  $\omega(M)$  нужно приближать в смысле слабой сходимости «дискретными» функциями  $F_n(M)$  и  $\omega_n(M)$ , имеющими конечные нагрузки в данных точках и обращающимися в нуль для всех  $M$ , не содержащих этих точек.

Метод предельного перехода от многогранников к другим поверхностям был впервые применен Минковским для доказательства существования замкнутой выпуклой поверхности  $\Phi$  с данной гауссовой кривизной  $K(\mathbf{n})$ , заданной как функция внешней нормали. Если  $M$  — множество на сфере  $E$ , то  $F(M) = \int_M \frac{d\omega}{K(\mathbf{n})}$  (где  $d\omega$  — элемент площади на  $E$ ) есть не что иное, как площадь того множества на поверхности  $\Phi$ , сферическим изображением которого является  $M$ . Следовательно, указанная теорема Минковского — частный случай общей теоремы существования замкнутой выпуклой поверхности с заданной поверхностной функцией  $F(M)$ .

## § 8. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТОПОЛОГИИ

**1. Наглядные основания.** Топологию можно наглядно определить как ту часть общей геометрии, где при изучении фигуры принимается во внимание только взаимное прилегание ее частей. В основе общего понятия «прилегания» лежит то наглядное представление, которое вызывает следующие утверждения: окружность прилегает к внутренности круга; одно полушарие прилегает к другому, так что сфера представляется как составленная из двух прилегающих полушарий; но если исключить экватор, то полушария уже не будут прилегать друг к другу: они оказываются как бы отрезанными одно от другого разрезом по экватору.

Автор отдал предпочтение введению топологической структуры через точки прикосновения ввиду наглядной ясности получающихся при этом определений основных понятий: непрерывного отображения, границы, связности и др.<sup>46)</sup>

<sup>45)</sup> Это понятие сходимости, соответствующее понятию слабой сходимости функционалов, можно характеризовать простыми геометрическими свойствами. Например, если  $\varphi_n(M) \geq 0$  для всех  $M$  (как это верно для наших функций  $F$  и  $\omega$ ), то  $\varphi_n$  слабо сходятся к  $\varphi$  тогда и только тогда, когда  $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(E) = \varphi(E)$  и для всякого замкнутого  $M$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(M) \leq \varphi(M)$ . Доказательство этой и других характеристик слабой сходимости функций множества дано в моей работе [232], резюме и § 15–17 этой работы. Доказательства теорем о слабой сходимости функций  $F$  и  $\omega$  для сходящихся выпуклых поверхностей даны в работах [9, 10]; см. также книгу [18].

<sup>46)</sup> Использованная автором в этом параграфе терминология сильно устарела. Читатель может ознакомиться с более современным изложением начал топологии по части 5 книги А. Д. Александрова и Н. Ю. Нецветаева [43]. — Прим. В. А. Залгаллера.

Попытаемся еще немного проанализировать наше наглядное представление о прилегании. Всякая геометрическая фигура есть множество, или, как говорят в элементарной геометрии, «геометрическое место» точек, и в этом множестве имеется наглядно понимаемое прилегание его частей друг к другу. Основным является понятие о прилегании одной точки к множеству точек.

В нашем представлении точка прилегает к множеству, если она бесконечно близка к нему, как, например, вершина квадрата к его внутренности; тот факт, что точка принадлежит множеству, мы тоже будем рассматривать как прилегание.

Вдумываясь, далее, в понятие прилегания, мы замечаем, что два множества — две фигуры (или две части одной фигуры) — прилегают друг к другу в том и только в том случае, если хотя бы в одной из них есть точка, прилегающая к другой.

Рассматривая приведенные только что примеры, мы наглядно убеждаемся, что именно в этом смысле окружность прилегает к внутренности круга, а два полушария при исключенном экваторе не прилегают друг к другу (потому что всякая точка одного полушария удалена от точек другого не меньше, чем на расстояние ее до экватора).

**2. Общее топологическое пространство.** Абстрактное обобщение этих наглядных представлений приводит к понятию общего топологического пространства. Именно, пусть имеется некоторое множество каких-либо элементов, которые мы назовем точками.

*Множество называется общим топологическим пространством, если каждой его части, т. е. каждому содержащемуся в нем множеству  $M$ , относятся по какому-либо правилу точки, прилегающие к  $M$ , или, как говорят, точки прикосновения множества  $M$ . При этом и сами точки множества  $M$  считаются его точками прикосновения.* Но мы присоединяем еще естественное условие, что «с увеличением множества число точек прикосновения не убывает», т. е., говоря строго, что если  $M_1$  содержится в  $M_2$ , то всякая точка прикосновения для  $M_1$  будет таковой и для  $M_2$ .

Два множества в общем топологическом пространстве мы называем прилегающими друг к другу, если хотя бы одно из них содержит точки прикосновения другого.

Ясно, что эти определения повторяют в несколько иных словах то, что говорилось выше о прилегании фигур и точек.

Самым основным примером общего топологического пространства является  $n$ -мерное «числовое» или евклидово пространство<sup>47)</sup>. Его точками являются всевозможные последовательности по  $n$  чисел  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Точка  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  считается точкой прикосновения множества  $A$ , если в  $A$  имеются точки  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , сколь угодно близкие к  $a$ , т. е. при всяком  $\varepsilon > 0$  в  $A$  найдется точка  $x$  такая, что  $|x_1 - a_1| < \varepsilon, \dots, |x_n - a_n| < \varepsilon$ . В этом случае либо точка  $a$  принадлежит множеству  $A$ , либо в  $A$  есть последовательность точек  $x^i$ , сходящаяся к  $a$ , т. е. такая, что разности координат точек  $x^i$  и точки  $a$  стремятся к нулю.

Числовая прямая есть не что иное, как одномерное числовое пространство. Аналогично числовая плоскость  $(x, y)$  есть двумерное числовое пространство.

Если на числа  $x_i$  наложить условие, что все они заключены в данных пределах, например  $0 < x_i < 1$  ( $i = 1, \dots, n$ ), то такое пространство называется  $n$ -мерным (числовым) кубом, точнее, внутренностью куба, в отличие от полного куба, который включает также грани и определяется неравенствами  $0 \leq x_i \leq 1$ .

Трехмерное евклидово пространство также является топологическим пространством в силу следующего определения точек прикосновения: точка  $a$  есть точка прикосновения множества  $A$ , если в  $A$  имеются точки  $x$ , сколь угодно близкие к  $a$ .

<sup>47)</sup>Его называют евклидовым, отвлекаясь, однако, от всех его свойств, кроме топологических.

Примером общего топологического пространства может служить также любая развертка. При этом точки, подлежащие склеиванию друг с другом, считаются за одну. Если  $M$  — множество точек развертки, то точка  $a$  развертки считается точкой прикосновения для  $M$ , когда сколь угодно близко к  $a$  или к склеиваемой с ней точкой имеются точки множества  $M$ .

Всякое множество точек  $A$  в общем топологическом пространстве  $R$  может само рассматриваться как общее топологическое пространство в силу следующего определения: если множество  $M$  содержится в  $A$ , то точка  $a$ , принадлежащая  $A$ , считается точкой прикосновения множества  $M$  в  $A$ , если она является его точкой прикосновения во всем  $R$ . Говорят, что  $A$  есть *подпространство* пространства  $R$ .

В этом смысле всякая фигура  $A$  в евклидовом пространстве является общим топологическим пространством. Точка  $a$ , принадлежащая  $A$ , считается точкой прикосновения множества  $M$ , содержащегося в  $A$ , если сколь угодно близко от нее имеются точки множества  $M$ .

Точно так же всякая часть  $n$ -мерного числового пространства оказывается общим топологическим пространством.

**3. Замкнутые и открытые множества; граница.** Речь будет идти о множествах в любом общем топологическом пространстве.

Множество называется *замкнутым*, если оно содержит все свои точки прикосновения.

Множество называется *открытым*, если его дополнение (т. е. множество всех не принадлежащих ему точек) замкнуто. Это равносильно следующему определению: множество открыто, если ни одна его точка не является точкой прикосновения его дополнения; потому что тогда само дополнение содержит все свои точки прикосновения, т. е. замкнуто.

Точка называется *граничной* точкой множества  $M$ , если она является точкой прикосновения как для  $M$ , так и для его дополнения. *Граница* множества есть множество всех его граничных точек.

Точка множества называется *внутренней*, если она не лежит на его границе, т. е. не является точкой прикосновения дополнения. Из этого определения ясно, что открытое множество характеризуется тем, что все его точки — внутренние.

**Примеры.** Полупространство вместе с ограничивающей плоскостью есть замкнутое множество; без нее оно — открытое; указанная плоскость есть его граница.

Куб в  $n$ -мерном пространстве определяется неравенствами  $0 \leq x_i \leq 1$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Его внутренность образуют точки, для которых  $0 < x_i < 1$ . Граница его состоит из точек, для которых  $0 \leq x_i \leq 1$  ( $i = 1, \dots, n$ ) и хотя бы в одном случае имеет место знак равенства.

*Окрестностью* точки называют, как правило, любое содержащее эту точку открытое множество. Окрестность тем самым так окружает точку, что последняя не будет точкой прикосновения для дополнительного множества. Это выясняет наглядный смысл слова «окрестность».

**4. Связность.** Множество называется *связным*, если оно не может быть разложено на две не прилегающие друг к другу части. В силу определения прилегания это означает, что множество не может быть разложено на такие две части, что ни одна из них не содержит точек прикосновения другой.

Если самое множество  $M$  рассматривать как пространство (подпространство всего данного пространства), то в нем естественно определяются *замкнутые и открытые множества относительно самого  $M$* ; коротко: замкнутые и открытые в  $M$ .

Имеет место теорема:

*Множество  $M$  связно тогда и только тогда, когда оно не может быть разложено на две непустые части, являющиеся замкнутыми (или открытыми)  $M$ .*

Действительно, пусть  $M$  несвязно, т. е. допускает разложение на две непустые части  $M_1$  и  $M_2$  так, что ни в одной из них нет точек прикосновения другой. Тогда  $M_1$  и  $M_2$  сами содержат все свои точки прикосновения в  $M$  и, значит, замкнуты в  $M$ . А так как они дополняют друг друга, то они одновременно оказываются открытыми в  $M$ .

Пусть теперь  $M$  разложено на части  $M'$  и  $M''$ , замкнутые в  $M$ . Это означает, что  $M'$  и  $M''$  сами содержат свои точки прикосновения в  $M$ , т. е. не прилегают, и  $M$  тем самым несвязно. Так как  $M'$  и  $M''$  дополняют друг друга до  $M$ , то, поскольку  $M'$  замкнуто,  $M''$  открыто и по аналогичной причине  $M'$  также открыто. Следовательно, разложение на два замкнутых множества является всегда разложением на открытые множества. Совершенно так же доказывается обратное: что разложение на открытые множества оказывается всегда разложением на замкнутые.

Таким образом, теорема полностью доказана.

Часть  $M_1$  множества  $M$  называется его *связной компонентой*, если  $M_1$  связно и не содержится ни в какой связной части множества  $M$ , кроме самого себя.

*Всякое множество либо связно, либо распадается на связные компоненты, не имеющие общих точек.*

Доказательство основано на следующей теореме:

*Если связные множества  $M_\xi$  имеют хотя бы одну общую точку  $a$ , то эти множества в сумме образуют связное множество.*

Докажем сначала эту последнюю теорему. Пусть связные множества  $M_\xi$  образуют в сумме множество  $M$ . Если бы  $M$  было несвязно, то оно распадалось бы на непрлегающие части  $M'$  и  $M''$ .

Так как  $M'$  и  $M''$  образуют в сумме все  $M$ , то для каждого множества  $M_\xi$  имеются только две возможности: либо оно целиком содержится в одном из множеств  $M'$ ,  $M''$ , либо оно имеет общие точки с обоими этими множествами.

Вторая возможность исключается. Действительно, если  $M_\xi$  состоит из двух частей  $M'_\xi$  и  $M''_\xi$ , входящих в  $M'$  и  $M''$ , то, поскольку  $M'$  и  $M''$  не прилегают,  $M'_\xi$  и  $M''_\xi$  также не прилегают. В результате  $M_\xi$  оказывается несвязным, вопреки условию.

Но если вторая возможность исключена, то каждое  $M_\xi$  содержится целиком в  $M'$  или в  $M''$ . Тогда, поскольку все  $M_\xi$  имеют общую точку,  $M'$  и  $M''$  также должны были бы иметь общую точку, т. е. прилегали бы друг к другу. Полученное противоречие доказывает, что разложение всего множества  $M$  на непрлегающие части  $M'$  и  $M''$  невозможно и  $M$  связно.

Докажем теперь сформулированное выше утверждение о распадении на связные компоненты. Каждая точка представляет собой связное множество, поскольку она вовсе неразложима.

Возьмем какую-нибудь точку  $x$  данного множества  $M$  и образуем сумму всех связных множеств, содержащих  $x$  и содержащихся в  $M$ . Такие множества имеются, поскольку сама точка  $x$  представляет собой одно из них. Полученное множество — обозначим его  $M(x)$  — будет связным в силу только что доказанной теоремы. По самому его построению оно не содержится уже ни в каком связном множестве и, следовательно, является связной компонентой.

Если  $M(y)$  — множество, определенное таким же образом для другой точки  $y$ , то оно также связно. Если оно имеет с  $M(x)$  общие точки, то в силу той же теоремы объединение  $M(x) \cup M(y)$  будет связным множеством. Оно содержит точку  $x$ , а потому должно содержаться в  $M(x)$ , так как по построению множество  $M(x)$  содержит все связные множества,

включающие точку  $x$ . То же верно в отношении  $M(y)$ . Поэтому, если множества  $M(x)$  и  $M(y)$  имеют общие точки, то они совпадают.

Определяя для каждой точки  $x$  множество  $M(x)$ , мы видим, что эти множества либо совпадают, либо не имеют общих точек. Таким образом, все множество  $M$  распадается на не имеющие общих точек связные компоненты  $M(x)$ , что и требовалось доказать.

Отметим еще два предложения.

1. Если в множестве  $M$  для каждых двух точек существует содержащее их связное множество, то само  $M$  связно.
2. В связном открытом множестве евклидова пространства (или  $n$ -мерного числового пространства) каждые две точки соединимы ломаной.

Мы не используем эти предложения и оставляем их доказательства читателю.

**5. Отображения.** Пусть  $X$  и  $Y$  — два множества в одном или разных топологических пространствах. Сопоставление каждой точке  $x$  из  $X$  некоторой точки  $y$  из  $Y$  называется *отображением* множества  $X$  в  $Y$ . Обозначая самое отображение через  $\varphi$ , пишут:  $y = \varphi(x)$ . Каждой части  $X'$  множества  $X$  сопоставляется при этом часть  $Y'$  множества  $Y$ :  $Y' = \varphi(X')$ . Здесь  $Y'$  называется *образом*  $X'$ , а  $X'$  — *прообразом*  $Y'$ .

Функция  $y = f(x)$  вещественной переменной  $x$ , определенная на отрезке  $X$ , есть не что иное, как отображение этого отрезка в числовую прямую. Аналогично функция  $n$  переменных есть отображение части  $n$ -мерного пространства, где она определена, в числовую прямую.

Отображение называется *непрерывным*, если оно не нарушает прилеганий (такое нарушение и есть разрыв в наглядном смысле). Иными словами, отображение  $\varphi$  непрерывно, если оно сохраняет точки прикосновения; т. е. если  $x$  есть точка прикосновения для  $X'$ , то  $\varphi(x)$  есть точка прикосновения для  $\varphi(X')$ .

В числовом пространстве точка  $x$  прилегает к  $X'$ , если в  $X'$  имеются  $x'$  с координатами  $x'_1, \dots, x'_n$ , сколь угодно близкими к координатам точки  $x$ . Это равносильно тому, что в  $X'$  есть последовательность точек  $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots$ , сходящаяся к  $x$  в том смысле, что разности координат  $x_i^{(k)} - x_i$  точек  $x^{(k)}$  и точки  $x$  стремятся к нулю. Поэтому для отображения  $\varphi$  из одного числового пространства в другое непрерывность означает, что если  $x^{(k)} \rightarrow x$ , то  $\varphi(x^{(k)}) \rightarrow \varphi(x)$  в аналогии с обычным определением непрерывности функций.

Отображение  $\varphi$  называется *взаимно однозначным*, если не только каждой точке  $x$  сопоставляется единственная точка  $y = \varphi(x)$ , но разным  $x$  сопоставляются разные  $y$ . Иными словами, каждая  $y$  соответствует только одной  $x$ . В таком случае обратное отображение  $\varphi^{-1}$ , сопоставляющее « $y$ -м  $x$ -ы», будет однозначным.

Если как прямое отображение  $\varphi$ , так и обратное  $\varphi^{-1}$  непрерывны, то самое отображение  $\varphi$  называется *взаимно непрерывным*.

Взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение называется *гомеоморфизмом*. Если множество  $X$  допускает такое отображение на множество  $Y$ , то  $X$  называется *гомеоморфным*  $Y$ . А так как в силу взаимной однозначности и взаимной непрерывности оба множества играют здесь одинаковую роль, то можно говорить, что они гомеоморфны друг другу.

Взаимная однозначность отображения означает, что при таком отображения точки не расщепляются и не сливаются. Взаимная непрерывность означает, что никакие прилегания не исчезают и не появляются. Поэтому с точки зрения одних прилеганий (отвлекаясь от иных свойств элементов и множеств) два гомеоморфных множества имеют одинаковое строение. Топологически они совершенно эквивалентны. Все топологические выводы, т. е. выводы, основанные на прилеганиях, верные для одного из них, верны также для другого. Это совершенно аналогично тому, что две равные фигуры (т. е. допускающие

отображение, не меняющее расстояний между их точками) геометрически одинаковы. Как геометрические свойства, основанные на понятии расстояния, одинаковы у таких фигур, так и топологические свойства, основанные на понятии прилегания, одинаковы у двух гомеоморфных множеств.

**6. Многообразие.** Под  $n$ -мерным многообразием мы понимаем в этой книге такое топологическое пространство, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную внутренности  $n$ -мерного куба. Иными словами, это есть такое пространство, где вокруг каждой точки имеется окрестность, в которой можно ввести координаты  $x_1, \dots, x_n$ , изменяющиеся в некоторых пределах, скажем  $a - \varepsilon < x_i < a + \varepsilon$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ); при этом связь точек и совокупностей  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  относимых им координат взаимно однозначна и взаимно непрерывна. Кроме того, предполагается, что каждые две точки можно заключить в две непересекающиеся окрестности<sup>48)</sup>.

Всякое открытое множество  $n$ -мерного числового пространства является  $n$ -мерным многообразием. Действительно, в таком пространстве уже введены координаты. Открытое множество характеризуется тем, что никакая его точка  $a$  не прилегает к его дополнению. Это означает, что все точки с координатами, близкими к координатам точки  $a$ , также содержатся в данном множестве. То есть вместе с точкой  $a(a_1, \dots, a_n)$  оно содержит все точки  $x$  с такими координатами  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , что  $|a_i - x_i| < \varepsilon$ , т. е.  $a - \varepsilon < x_i < a + \varepsilon$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Это, согласно определению, и означает, что такое множество есть  $n$ -мерное многообразие.

Примером двумерного многообразия может служить любая развертка без границы. Каждая ее точка имеет окрестность, гомеоморфную квадрату, или, что равносильно, кругу. Для точек внутри многоугольников развертки это ясно; далее, окрестность точки внутри ребра складывается из двух «полукрестностей», лежащих на многоугольниках, склеиваемых друг с другом по данному ребру; наконец, окрестность вершины складывается из угловых секторов, сходящихся в ней согласно «закону склеивания» многоугольников.

Путем склеивания, т. е. отождествления, можно строить трехмерные многообразия. Возьмем, например, куб и отождествим симметричные точки его противоположных граней; в результате получим некоторое трехмерное многообразие. Такой прием применяется при построении  $n$ -мерных многообразий: они склеиваются из «разверток», образованных  $n$ -мерными многогранниками. Топологическое строение многообразия определяется тогда законом склеивания развертки. Сравните это с теоремой Эйлера, выражающей характерное свойство закона склеивания сферы из развертки.

В нашей книге многообразия будут определяться не таким построением, но в согласии с общим определением путем введения координат в окрестности каждого элемента — точки многообразия. Например, все замкнутые выпуклые многогранники с  $e$  вершинами образуют  $3e$ -мерное многообразие. Каждая вершина определяется тремя координатами, а все  $e$  вершин  $3e$  координатами. Замкнутый выпуклый многогранник определяется своими вершинами, а потому теми же  $3e$  координатами.

Если дан многогранник  $P_0$ , то при достаточно малых смещениях его вершин ни одна из них не попадет в выпуклую оболочку остальных. Поэтому на смещенные вершины будет натягиваться многогранник  $P$  также с  $e$  вершинами. Координаты вершин можно, следовательно, менять в окрестности значений, относящихся к многограннику  $P_0$  и таким образом «окрестность» этого многогранника отображается на  $3e$ -мерный куб.

<sup>48)</sup> Обычно в понятие многообразия включают еще требования его связности и возможности покрыть его не более чем счетным числом окрестностей, гомеоморфных внутренности куба (а также требование, чтобы его можно было разбить на симплексы). Эти требования мы отбрасываем.

Прикосновение в таком многообразии многогранников определяется естественным образом. Многогранник  $P_0$  «прикасается» к множеству многогранников  $P$ , если среди этих последних имеются такие, вершины которых сколь угодно близки к вершинам  $P_0$ .

Аналогичным образом определенные многообразия будут фигурировать в доказательствах теорем существования в главах IV, VII, IX.

## § 9. ТЕОРЕМА ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ ОБЛАСТИ

1. Мы докажем теорему, на которой основана лемма об отображении, а именно:

*При гомеоморфном отображении  $n$ -мерного многообразия  $R_1$  на подмножество  $n$ -мерного многообразия  $R_2$  всякое открытое множество многообразия  $R_1$  переходит в открытое множество многообразия  $R_2$  <sup>49)</sup>.*

Открытое множество характеризуется тем, что всякая его точка — внутренняя, т. е. может быть окружена окрестностью, гомеоморфной  $n$ -мерному шару и лежащей в рассматриваемом множестве. В качестве такой окрестности всегда можно взять выпуклый  $n$ -мерный многогранник с наименьшим возможным числом вершин. Такой многогранник называется  $n$ -мерным симплексом. Он имеет  $n+1$  вершину. Для  $n = 0, 1, 2, 3$  симплексами являются соответственно точка, отрезок, треугольник и тетраэдр. Каждая  $(n-1)$ -мерная грань  $n$ -мерного симплекса, очевидно, есть  $(n-1)$ -мерный симплекс.

Совершенно очевидно, что достаточно доказать следующее:

*При гомеоморфном отображении  $\varphi$   $n$ -мерного симплекса  $T$  на подмножество  $n$ -мерного евклидова пространства  $E$  всякая внутренняя точка  $p$  симплекса  $T$  переходит во внутреннюю точку множества  $\Phi = \varphi(T)$  в  $E$ .*

Доказательство будет состоять в том, что мы охарактеризуем внутренние точки симплекса таким свойством, которое очевидным образом сохраняется при гомеоморфных отображениях.

Прежде всего введем понятие замкнутого покрытия замкнутого множества: *конечную совокупность замкнутых множеств  $A_1, A_2, \dots, A_s$  назовем замкнутым покрытием множества  $\Phi$ , если эти множества в своем объединении дают множество  $\Phi$ .*

*Число  $k$  назовем кратностью покрытия, если существует точка множества  $\Phi$ , принадлежащая одновременно  $k$  множествам  $A_i$ , и вместе с тем ни одна точка из  $\Phi$  не принадлежит одновременно большему числу множеств  $A_i$ . Если диаметры <sup>50)</sup> всех множеств  $A_i$  меньше числа  $\varepsilon > 0$ , то будем говорить об « $\varepsilon$ -покрытии».*

<sup>49)</sup> Сформулированная теорема может показаться тривиальной, так как при гомеоморфном отображении одного пространства на другое открытое множество переходит в открытое по определению гомеоморфного отображения. Однако из этого следует лишь то, что образ открытого множества будет открытым относительно образа пространства  $R_1$  в  $R_2$ ; например, при тождественном отображении прямой в плоскость образ прямой, очевидно, не будет открытым множеством относительно плоскости, хотя относительно самого себя он, конечно, будет открытым. Утверждение, которое мы будем доказывать, состоит в том, что в условиях теоремы образ всякого открытого множества есть множество, открытое относительно всего пространства  $R_2$ . Нетрудно убедиться в том, что это равносильно следующему утверждению, более наглядному по форме: гомеоморфный образ многообразия  $R_1$  в многообразии  $R_2$  не имеет границы.

<sup>50)</sup> Диаметром множества называется точная верхняя граница расстояний между его точками. Под расстоянием между двумя точками понимается, как обычно, корень квадратный из суммы квадратов разностей их координат.



Пользуясь этими понятиями, мы дадим топологически инвариантную характеристику внутренних точек замкнутого множества, лежащего в  $n$ -мерном евклидовом пространстве:

Для того чтобы точка  $p$  замкнутого множества  $\Phi$  в  $n$ -мерном евклидовом пространстве была внутренней, необходимо и достаточно, чтобы в этом пространстве существовало замкнутое покрытие  $\alpha = \{A_1, \dots, A_s\}$  множества  $\Phi$  кратности  $n + 1$  такое, что 1)  $p$  — единственная точка из  $\Phi$ , принадлежащая  $n + 1$  множеству  $A_i$ ; 2) всякое покрытие  $\alpha'$  множества  $\Phi$ , отличающееся от  $\alpha$  лишь в достаточно малой окрестности  $U(p)$  точки  $p$ <sup>51)</sup>, имеет кратность  $\geq n + 1$  (здесь под  $U(p)$  понимается окрестность точки  $p$  относительно множества  $\Phi$ , т. е. пересечение окрестности точки  $p$  в  $n$ -мерном евклидовом пространстве с множеством  $\Phi$ ).

Это утверждение равносильно доказываемой теореме. Чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что все условия, характеризующие здесь внутреннюю точку  $n$ -мерного симплекса, сохраняются при гомеоморфном отображении. Непосредственно очевидно, что понятия кратности покрытия и «достаточно малой» окрестности  $U(p)$  топологически инвариантны. Остается проверить, что замкнутое покрытие симплекса  $T$  при гомеоморфном отображении переходит в замкнутое покрытие его образа  $\Phi = \varphi(T)$ , и обратно. Так как элементы замкнутого покрытия симплекса, как и сам симплекс, суть замкнутые и ограниченные множества евклидова пространства, то все сводится к доказательству утверждения: гомеоморфный образ замкнутого ограниченного множества  $n$ -мерного евклидова пространства в  $n$ -мерном евклидовом пространстве является замкнутым и ограниченным множеством. Доказательство совсем просто: ограниченность образа непосредственно следует из теоремы Вейерштрасса о том, что непрерывная функция, заданная на замкнутом ограниченном множестве, ограничена сверху и снизу: замкнутость вытекает из теоремы Больцано — Вейерштрасса. (Пусть  $M$  — точка сгущения<sup>52)</sup> образа; сходящейся к ней последовательности точек соответствует бесконечная последовательность точек в прообразе, имеющая по теореме Больцано — Вейерштрасса точку сгущения; в силу непрерывности гомеоморфного отображения эта точка сгущения отображается в рассматриваемую точку  $M$  и потому последняя принадлежит образу; тем самым образ содержит все свои точки сгущения, т. е. замкнут.)

2. Возвращаясь к сформулированному свойству внутренних точек, докажем сначала, что всякая точка множества  $\Phi$ , не являющаяся внутренней, этим свойством не обладает. Для этого понадобится следующая

**Лемма 1.** При сколь угодно малом  $\varepsilon > 0$  существует замкнутое  $\varepsilon$ -покрытие границы  $T$   $n$ -мерного симплекса  $T$ , имеющее кратность  $\leq n$ .

Сначала укажем  $\varepsilon$ -покрытие ( $\varepsilon$  произвольно мало)  $n$ -мерного пространства  $E$ , имеющее кратность  $n + 1$ . Для  $n = 1$  нужное покрытие строится путем разбиения прямой на равные отрезки. Для  $n > 1$  искомое покрытие строится по индукции:  $n$ -мерное пространство разбивается  $(n - 1)$ -мерными плоскостями на достаточно тонкие параллельные слои. Одну из этих плоскостей разобьем на равные  $(n - 1)$ -мерные кубы уже установленным способом и это разбиение спроектируем ортогонально на все остальные  $(n - 1)$ -мерные

<sup>51)</sup> Пусть покрытие  $\alpha$  состоит из множеств  $A_1, \dots, A_s$ , а покрытие  $\alpha'$  — из множеств  $A'_1, \dots, A'_t$ , при этом в общем случае  $s \neq t$ . Обозначим через  $\bar{A}_i$  (соответственно  $\bar{A}'_i$ ) ту часть множества  $A_i$  (соответственно  $A'_i$ ), которая не имеет общих точек с  $U(p)$ . Мы говорим, что покрытие  $\alpha'$  отличается от  $\alpha$  лишь в  $U(p)$ , если всякое  $\bar{A}_i$  совпадает с некоторым  $\bar{A}'_j$ , и обратно.

<sup>52)</sup> Точка  $m$  называется точкой сгущения множества  $M$ , если каждая ее окрестность содержит бесконечное множество точек из  $M$ , отличных от  $m$ .

плоскости. Тогда каждый слой разобьется на  $n$ -мерные параллелепипеды. Сдвигая соседние слои параллельно, добьемся, чтобы каждая вершина параллелепипеда попала внутрь  $(n - 1)$ -мерной грани параллелепипеда из соседнего слоя (на рис. 72 изображен случай  $n = 2$ ). Тогда, очевидно, кратность покрытия пространства такими параллелепипедами на 1 больше кратности покрытия  $(n - 1)$ -мерных плоскостей и потому равна  $n + 1$ .

Теперь пусть в  $E$  имеется произвольный  $n$ -мерный симплекс  $T$ . Построим только что указанное  $\varepsilon$ -покрытие пространства  $E$ . Из построения ясно, что точки пространства  $E$ , принадлежащие одновременно  $n + 1$  кубу покрытия, расположены так, что наименьшее расстояние между двумя такими точками больше некоторого числа  $\delta < 0$ .

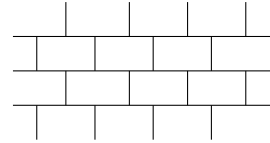


Рис. 72

Пусть на границе  $\tilde{T}$  симплекса  $T$  имеются такие точки. Выберем в пространстве  $E$  направление, не параллельное ни одной из  $(n - 1)$ -мерных граней симплекса  $T$ , и произведем в этом направлении столь малый параллельный сдвиг симплекса  $T$ , чтобы при этом ни одна точка пространства  $E$ , принадлежащая  $n + 1$  кубу покрытия и не лежавшая на  $\tilde{T}$ , не попала на  $\tilde{T}$ . (Точки, не лежащие на  $\tilde{T}$  и принадлежащие  $n + 1$  кубу покрытия, не могут быть сколь угодно близки к  $\tilde{T}$ , так как иначе они имели бы точку сгущения и тем самым среди них нашлись бы точки, сколь угодно близкие друг к другу.) Так как, сверх того, направление сдвига выбрано так, что всякая точка, лежавшая на  $\tilde{T}$ , перестает принадлежать  $\tilde{T}$ , то в результате сдвига на  $\tilde{T}$  не останется точек, принадлежащих  $n + 1$  кубу покрытия пространства  $E$ . Но тогда пересечение этих кубов с  $\tilde{T}$ , будучи замкнутыми множествами (так как пересечение любого числа замкнутых множеств само замкнуто) диаметра  $< \varepsilon$ , образуют требуемое покрытие границы  $\tilde{T}$ . Лемма доказана.

Пусть  $p$  не является внутренней точкой множества  $\Phi$ . Рассмотрим замкнутое покрытие  $\alpha = \{A_1, \dots, A_s\}$  множества  $\Phi$ , имеющее кратность  $n + 1$ . Допустим, что  $p$  — единственная точка из  $\Phi$ , принадлежащая  $n + 1$  множеству  $A_i$ , и покажем, что можно построить другое замкнутое покрытие  $\alpha'$ , имеющее кратность  $\leq n$  и совпадающее с покрытием  $\alpha$  всюду, за исключением произвольно малой окрестности  $U(p)$  точки  $p$  (окрестность  $U(p)$  берется относительно множества  $\Phi$ ).

Построим  $n$ -мерный симплекс  $T$ , содержащий точку  $p$  внутри и такой, что его общая часть с  $\Phi$  содержится в  $U(p)$ . Так как  $p$  — единственная точка множества  $\Phi$ , принадлежащая  $n + 1$  множеству  $A_i$ , то ни одна точка границы  $\tilde{T}$  симплекса  $T$  не принадлежит более чем  $n$  множествам  $A_i$ . Отсюда следует, что при достаточно малом  $\varepsilon > 0$  всякое множество  $M$  диаметра  $< \varepsilon$ , содержащееся в  $\tilde{T}$ , имеет общие точки не более чем с  $n$  множествами  $A_i$ . В самом деле, если это не так, то выберем последовательность положительных чисел  $\varepsilon_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ), стремящуюся к нулю, и для каждого  $\varepsilon_j$  найдем на  $\tilde{T}$  множество  $M_j$  диаметра  $< \varepsilon_j$ , имеющее общие точки с  $n + 1$  множеством  $A_{i_1}, \dots, A_{i_{n+1}}$ . Так как различных комбинаций по  $n + 1$  множеству из конечного числа множеств  $A_i$  — лишь конечное число, то среди этих множеств найдется  $n + 1$  множеств  $A^1, \dots, A^{n+1}$  таких, что существуют сколь угодно большие номера  $j$ , для которых все множества  $A^1, \dots, A^{n+1}$  имеют общие точки с множествами  $M_j$  и, следовательно, для каждого такого числа  $j$  существует точка  $b_j$ , принадлежащая  $\tilde{T}$  и удаленная от каждого из множеств  $A^1, \dots, A^{n+1}$  не более чем на  $\varepsilon_j$ <sup>53</sup>). Так как точки  $b_j$  расположены все в ограниченной части пространства (именно — на  $\tilde{T}$ ), то по теореме Больцано — Вейерштрасса множе-

<sup>53</sup>) Расстоянием точки до множества называется точная нижняя граница ее расстояний до точек этого множества.

ство точек  $b_j$ , имеет точку сгущения  $b$  на  $\tilde{T}$ . В сколь угодно малой окрестности точки  $b$  находятся точки  $b_j$  со сколь угодно большими номерами и потому сколь угодно близкие к каждому из множеств  $A^1, \dots, A^{n+1}$ . Значит, точка  $b$  есть точка прикосновения каждого из множеств  $A^1, \dots, A^{n+1}$  и в силу их замкнутости принадлежит им всем одновременно, что исключено по предположению.

Итак, выберем такое  $\varepsilon > 0$ , чтобы множества диаметров  $< \varepsilon$ , лежащие на  $\tilde{T}$ , не могли пересекаться одновременно более чем с  $n$  множествами  $A_i$ . По лемме 1 построим  $\varepsilon/2$ -покрытие  $\beta = \{B_1, \dots, B_m\}$  границы  $\tilde{T}$  симплекса  $T$ . Так как  $p$  не является внутренней точкой множества  $\Phi$ , то внутри симплекса  $T$  найдется точка  $O$ , не принадлежащая множеству  $\Phi$ . Спроектируем множества  $B_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) из точки  $O$ , т. е. построим множества  $B'_j$ , каждое из которых состоит из соответствующего множества  $B_j$  и прямолинейных отрезков (вместе с их концами), соединяющих точки множества  $B_j$  с точкой  $O$ .

Построим теперь замкнутое покрытие  $\alpha_\beta$  множества  $\Phi$  и симплекса  $T$ . А именно, сначала каждое множество  $A_i$  заменим его частью, не содержащей внутренних точек

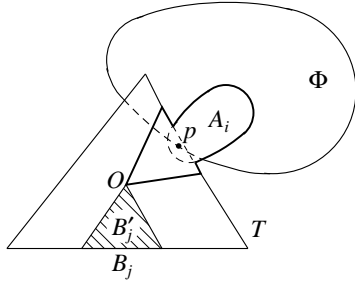


Рис. 73

симплекса  $T$  (если  $A_i$  лежит целиком внутри  $T$ , то просто выбросим его); при этом  $A_i$  заменится, очевидно, некоторым замкнутым множеством  $A''_i$ . Часть покрытия внутри симплекса  $T$  заменим покрытием симплекса  $T$  «пирамидами»  $B'_j$  (рис. 73). Затем пирамиды  $B'_j$  «приклеим» к множествам  $A_i$  по такому правилу: если  $B'_j$  имеет общие точки с некоторыми множествами  $A''_i$ , то  $B'_j$  приклеиваем к одному из этих множеств и только к одному; если  $B'_j$  не имеет общих точек ни с каким множеством  $A''_i$ , то оставляем его без изменения. После этого покрытие  $\alpha_\beta$  определим так: его элементами служат множества, полученные

из множеств  $A_i$  присоединением к каждому из них всех приклеенных к нему множеств  $B'_j$ , (если к множеству  $A''_i$  ничего не приклеено, то оно без изменения входит в состав покрытия  $\alpha_\beta$ ), а также множества  $B'_j$ , ни к чему не приклеенные (рис. 73).

Утверждается, что всякая точка, отличная от  $O$ , принадлежит не более чем  $n$  множествам покрытия  $\alpha_\beta$ . Действительно, каждая точка, лежащая вне  $T$ , может принадлежать  $n+1$  множеству из  $\alpha_\beta$  лишь в том случае, если она принадлежит  $n+1$  соответствующему множеству из  $\alpha$ , что исключено, так как точка  $p$  лежит внутри  $T$ . Если бы такая точка  $b$  нашлась внутри  $T$ , то ее проекция из точки  $O$  на  $\tilde{T}$  принадлежала бы одновременно  $n+1$  множеству  $B_j$ , что также невозможно. Остается испытать точки, лежащие на  $\tilde{T}$ . Пусть  $a$  — одна из таких точек. Так как каждое множество  $B_j$  имеет диаметр  $< \varepsilon/2$ , то объединение всех множеств  $B_j$ , содержащих точку  $a$  (их по построению не более  $n$ ), имеет диаметр  $< \varepsilon$  и потому имеет общие точки не более чем с  $n$  множествами  $A''_i$ . Таким образом, как число пирамид  $B'_j$ , содержащих точку  $a$ , так и число множеств  $A''_i$ , к которым они могут быть приклеены при образовании покрытия  $\alpha_\beta$ , меньше  $n$ . А так как каждая пирамида  $B'_j$  приклеивается не более чем к одному множеству  $A''_i$ , то число множеств покрытия  $\alpha_\beta$ , содержащих точку  $a$ , тоже не больше  $n$ .

А теперь, заменив каждое множество покрытия  $\alpha_\beta$  его общей частью с множеством  $\Phi$ , получим покрытие  $\alpha$  множества  $\Phi$ , отличающееся от исходного покрытия  $\alpha$  лишь внутри  $U(p)$  и имеющее кратность  $\leq n$  (так как точка  $O$  лежит вне  $\Phi$  и при переходе от  $\alpha_\beta$  к  $\alpha'$  устраняется из рассмотрения).

Таким образом, мы выяснили, что указанный нами признак внутренних точек является достаточным, так как для невнутренних точек он заведомо не выполняется. Остается

доказать, что этот признак необходим, т. е. выполняется для всякой внутренней точки множества  $\Phi$ .

**3.** Итак, пусть  $p$  — внутренняя точка. Возьмем симплекс  $T$ , содержащийся в  $\Phi$  и содержащий внутри себя точку  $p$ . Через точку  $p$  проведем  $(n - 1)$ -мерные плоскости, параллельные  $(n - 1)$ -мерным граням симплекса  $T$ .

Каждая такая плоскость разбивает пространство, а тем самым и множество  $\Phi$  на две части. Одна из этих частей содержит лишь одну вершину симплекса  $T$ , другая — все остальные. Части, содержащие по одной вершине симплекса, мы обозначим через  $A_1, \dots, A_{n+1}$ . Эти множества, очевидно, образуют замкнутое покрытие  $\alpha$  множества  $\Phi$  и при этом  $p$  — единственная точка из  $\Phi$ , принадлежащая  $n + 1$  множеству покрытия (рис. 74). Покажем, что если окрестность  $U(p)$  точки  $p$  настолько мала, что не пересекается с границей симплекса  $T$ , то, изменяя покрытие  $\alpha$  в окрестности  $U(p)$ , невозможно получить покрытие меньшей кратности.

Пусть в окрестности  $U(p)$  покрытие  $\alpha$  изменилось произвольным образом. Такое изменение в общем случае сводится к тому, что множества  $A_i$  заменяются другими, которые совпадают с первоначальными вне  $U(p)$  и, кроме того, могут появляться новые множества, целиком лежащие в  $U(p)$ . Каждое из этих «новых» множеств присоединим к одному из деформированных множеств  $A_i$  и получившиеся множества обозначим через  $\tilde{A}_i$ . Мы покажем, что существует точка, принадлежащая одновременно всем множествам  $\tilde{A}_i$ . Для этого мы воспользуемся следующей леммой:

**Лемма Шпернера.** Пусть  $K$  — произвольная триангуляция  $n$ -мерного симплекса  $T$ <sup>54)</sup> с вершинами  $e_1, e_2, \dots, e_{n+1}$ . Пусть каждой вершине  $e'_k$  триангуляции  $K'$  поставлена в соответствие вершина  $S(e'_k) = e_{i_k}$  симплекса  $T$ , принадлежащая той его грани наименьшего числа измерений, на которой лежит  $e'_k$  (сам симплекс считается своей  $n$ -мерной гранью и потому внутренней точке  $e'_k$  можно сопоставить любую вершину симплекса). Тогда существует такой  $n$ -мерный симплекс  $T_i$  триангуляции  $K$ , что его вершины отображаются в различные (и, следовательно, во все) вершины симплекса  $T$ .

Симплекс  $T_i$ , все вершины которого отображаются в различные вершины симплекса  $T$ , назовем «нормальным». Лемма будет доказана, если мы установим, что число нормальных симплексов нечетно. Это доказывается индукцией по  $n$ . Для  $n = 0$  утверждение тривиально. Пусть оно верно для  $n - 1$ . Выделим у симплекса  $T$  грань  $|e_1 \dots e_n|$  с вершинами  $e_1, \dots, e_n$ .  $(n - 1)$ -мерную грань симплекса  $T_i$ , вершины которой отображаются в  $e_1, \dots, e_n$ , назовем отмеченной. Очевидно, что если симплекс  $T_i$  имеет отмеченные грани, не будучи нормальным, то таких граней — две. Поэтому если бы число нормальных симплексов было четным, то общее число отмеченных граней у всех симплексов  $T_i$  также было бы четным. Но так как всякая отмеченная грань, лежащая внутри  $T$ , принадлежит двум симплексам, то общее число таких граней само четно. Следовательно, должно быть четным число отмеченных граней, лежащих на  $(n - 1)$ -мерных гранях симплекса  $T$ . Но

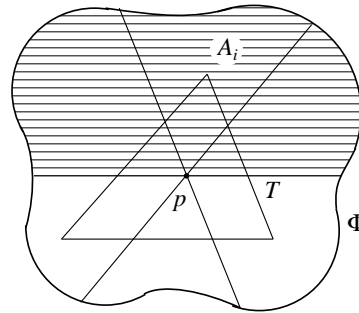


Рис. 74

<sup>54)</sup> Триангуляцией симплекса  $T$  мы называем такое разбиение  $T$  на симплексы  $T_i$ , при котором общая часть двух симплексов  $T_i$  и  $T_j$  является гранью каждого из них (гранью любого числа измерений). Вершины симплексов  $T_i$  называются вершинами триангуляции.

по определению отображения  $S$  такие грани могут лежать только на грани с вершинами  $e_1, \dots, e_n$ . А этого не может быть по предположению индукции, так как отмеченные грани, лежащие на грани  $|e_1 \dots e_n|$ , играют роль нормальных симплексов в том отображении, которое испытывает триангуляция грани  $|e_1 \dots e_n|$  в результате отображения  $S$ . Лемма доказана.

Теперь докажем, что множества  $\tilde{A}_i$  имеют общую точку. Для этого возьмем произвольную триангуляцию  $K$  нашего симплекса  $T$ . Определим какое-нибудь отображение вершин триангуляции  $K$  в вершины симплекса  $T$  с условием, что и вершина  $T$  и отображаемая в нее вершина триангуляции принадлежат одному и тому же множеству  $\tilde{A}_i$ . Так как по построению множество  $\tilde{A}_i$ , содержащее данную вершину, не имеет общих точек с противоположной гранью, то отображение  $S$  удовлетворяет условию леммы Шпернера и потому найдется симплекс, вершины которого, отображаясь в различные вершины симплекса  $T$ , принадлежат всем множествам  $\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_{n+1}$  (так как каждая вершина  $T$  принадлежит лишь одному из множеств  $\tilde{A}_i$ ). Так как триангуляция  $K$  может быть произвольно мелкой, то из замкнутости множеств  $\tilde{A}_i$  легко следует, что они имеют общую точку. Но при переходе к множествам  $\tilde{A}_i$  мы могли лишь уменьшить кратность покрытия. Поэтому исходное покрытие, полученное из  $\alpha$  произвольным изменением в окрестности  $U(p)$ , имело кратность  $\geq n + 1$ . Доказательство теоремы тем самым завершено.

---

---

## Глава III

### Единственность многогранника с данной разверткой

---

---

#### § 1. НЕСКОЛЬКО ЛЕММ О МНОГОГРАННЫХ УГЛАХ

1. Теоремы единственности выпуклого многогранника с данной разверткой доказываются на основании леммы Коши (§ 1 главы II), но для того, чтобы воспользоваться этой леммой, нужно сначала доказать некоторые леммы о выпуклых многогранных углах.

Если вокруг вершины многогранного угла  $V$  описать единичную сферу, то он вырежет на этой сфере многоугольник  $V'$ , стороны и углы которого равны соответственно плоским и двугранным углам многогранного угла  $V$ . Если многогранный угол  $V$  — выпуклый, то сферический многоугольник  $V'$  — также выпуклый, т. е. расположен по одну сторону от каждого большого круга, содержащего одну из его сторон. Обратно, если на сфере дан выпуклый многоугольник, то, проектируя его из центра сферы, получим выпуклый многогранный угол.

Поэтому вместо многогранных углов мы будем рассматривать выпуклые сферические многоугольники. При этом мы будем допускать существование углов, равных  $\pi$ , не считая, однако, две стороны, образующие такой угол, за одну сторону. Этому соответствует наличие у многогранного угла двугранных углов, равных  $\pi$ . Однако сферические многоугольники, имеющие только два угла, отличных от  $\pi$  и тем самым сводящихся к двуугольникам, исключаются из рассмотрения всюду, кроме леммы 1. Этому соответствует исключение многогранных углов, сводящихся к двугранным углам.

Дальше в этом параграфе сферический многоугольник мы будем называть часто просто многоугольником. (Это тем более позволительно, что все полученные результаты верны и для плоских многоугольников.)

**2. Лемма 1.** *Если два выпуклых сферических многоугольника  $P$  и  $P_1$  прилегают друг к другу по стороне  $AM$  и суммы их углов при вершинах  $A$  и*

$M$  не превосходят  $\pi$ , то они образуют вместе также выпуклый многоугольник  $P + P_1$ .

Пусть  $AB$  и  $ML$  — стороны многоугольника  $P$ , смежные с  $AM$  (рис. 75). Каждый из трех больших кругов  $AM$ ,  $AB$ ,  $ML$  определяет на сфере некоторое полушарие, в котором лежит многоугольник  $P$ . Общая часть этих полушарий представляет собой сферический треугольник  $T$ , содержащий многоугольник  $P$ . Точно так же многоугольник  $P_1$  содержится в треугольнике  $T_1$ , ограниченном стороной  $AM$  и продолжением сторон  $AB_1$  и  $ML_1$ . Так как суммы углов треугольников  $T$  и  $T_1$  при вершинах  $A$  и  $M$  не превосходят  $\pi$ , то треугольник  $T_1$ , в свою очередь, содержится в треугольнике  $T_2$ , ограниченном стороной  $AM$  и продолжениями сторон  $AB$  и  $ML$ . Треугольники  $T$  и  $T_2$  образуют вместе двуугольник  $T + T_2$ , содержащий в себе многоугольник  $P + P_1$ .

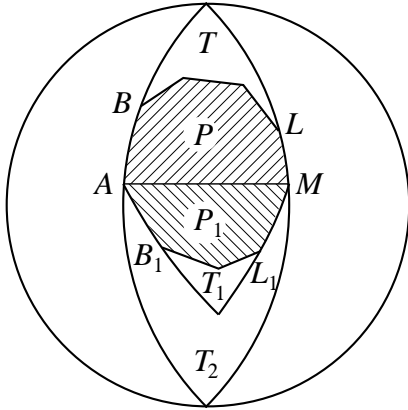


Рис. 75

Проведем теперь большой круг, содержащий какую-нибудь сторону многоугольника  $P$ , отличную от  $AM$ . Так как многоугольник  $P$  — выпуклый, то он лежит по одну сторону от этого большого круга. Этот большой круг имеет общую точку хотя бы с одной из сторон треугольника  $T$  (отличной от  $AM$ ). Он идет или вдоль одной из них, или пересекает их обе. Поэтому он не может заходить внутрь треугольника  $T_2$ . Действительно, иначе он пересекал бы каждую из сторон треугольника  $T_2$  (отличную от  $AM$ ), и

мы получили бы большой круг, который имеет хотя бы с одной из сторон двуугольника  $T + T_2$  две общие точки, а это невозможно, потому что большой круг может пересекать большую полуокружность (сторону двуугольника  $T + T_2$ ) только в одной точке.

Следовательно, треугольник  $T_2$  и тем более многоугольник  $P_1$  расположен по одну сторону от такого большого круга, и именно по ту же сторону, по какую лежит многоугольник  $P$ . По тем же соображениям многоугольник  $P$  лежит по одну сторону от большого круга, содержащего любую сторону многоугольника  $P_1$ , отличную от  $AM$ . Следовательно, многоугольник  $P + P_1$  лежит по одну сторону от всякого большого круга, содержащего одну из его сторон, а это и означает, что он — выпуклый.

Из доказанной леммы вытекает следующая теорема:

**Теорема 1.** Если все углы сферического многоугольника не превосходят  $\pi$ , то многоугольник — выпуклый.

Доказательство ведется индукцией по числу углов. Для треугольника утверждение непосредственно очевидно. Допустим, что оно верно для многоугольников с числом углов, меньшим  $n$  ( $n > 3$ ), и докажем его для  $n$ -угольника.

Разобьем данный  $n$ -угольник  $P$  диагональю на два многоугольника  $P_1$  и  $P_2$ <sup>1)</sup>. Если у  $P$  все углы были не больше  $\pi$ , то это же верно для многоугольников  $P_1$  и  $P_2$ . Вместе с тем число углов у каждого из них меньше  $n$ , а потому согласно предположению они выпуклые. Но многоугольник  $P$  составлен из них так, что суммы углов при их общих вершинах не превосходят  $\pi$ , так как эти суммы являются углами самого  $P$ . Поэтому согласно лемме 1 многоугольник  $P$  — выпуклый, что и требовалось доказать.

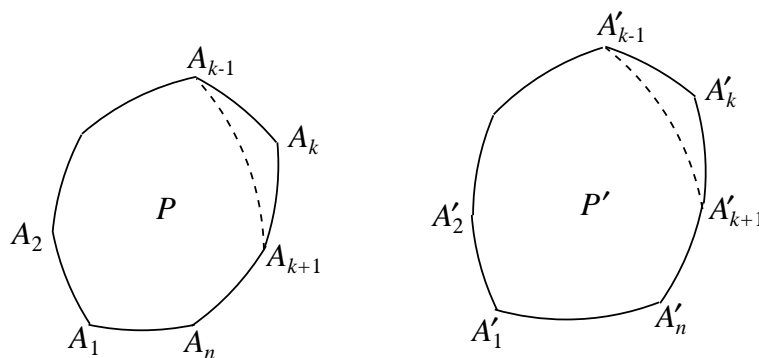


Рис. 76

**3. Теорема 2.** Пусть  $P$  и  $P'$  — два выпуклых многоугольника с одним и тем же числом вершин  $A_1, A_2, \dots, A_n$  и  $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$  (рис. 76). Пусть, далее, выполнены два условия:

1) все их стороны, кроме  $A_n A_1$  и  $A'_n A'_1$ , соответственно равны, т. е.

$$A_1 A_2 = A'_1 A'_2, \dots, A_{n-1} A_n = A'_{n-1} A'_n; \tag{1}$$

2) углы между этими сторонами у первого многоугольника не больше чем у второго, т. е.

$$\angle A_1 \leq \angle A'_1, \dots, \angle A_{n-1} \leq \angle A'_{n-1}, \tag{2}$$

причем хотя бы в одном случае имеет место отношение «меньше».

<sup>1)</sup>Возможность разбить многоугольник с углами, меньшими  $\pi$ , диагональю доказывается просто. Можно, например, воспользоваться тем рассуждением, посредством которого это было доказано в гл. I, п° 3 § 8 для многоугольника в развертке. Мы молчаливо предполагаем многоугольник  $P$  простым, ограниченным одной ломаной, что для нас достаточно. Кольцеобразный многоугольник может не разбиваться одной диагональю, но его можно разбить несколькими диагоналями и применить следующее далее рассуждение, основанное на лемме 1.



Тогда «исключительная» сторона первого многоугольника меньше, чем у второго, т. е.

$$A_n A_1 < A'_n A'_1. \quad (3)$$

В несколько иной, быть может, более наглядной формулировке эта теорема гласит:

*Если выпуклый многоугольник  $P'$  получается из выпуклого многоугольника  $P$  путем деформации, при которой все стороны, кроме одной «исключительной», не меняют своих длин, а углы между этими сторонами увеличиваются (или по крайней мере ни один из них не уменьшается и хотя бы один увеличивается), то «исключительная» сторона удлиняется, так что у многоугольника  $P'$  она больше, чем у  $P$ .*

Доказательство проведем индукцией по числу вершин многоугольников.

Для треугольников теорема сводится к тому, что если у двух треугольников две стороны одного равны двум сторонам другого ( $A_1 A_2 = A'_1 A'_2$  и  $A_2 A_3 = A'_2 A'_3$ ), а углы, заключенные между ними, не равны ( $\angle A_2 < \angle A'_2$ ), то третья сторона там меньше, где угол меньше ( $A_3 A_1 < A'_3 A'_1$ ). Эта известная теорема доказывается во всех элементарных учебниках для плоских треугольников; для сферических же треугольников она доказывается дословно так же.

Таким образом, наша теорема верна для треугольников, и теперь, предположив ее верной для  $(n - 1)$ -угольников, будем доказывать ее для  $n$ -угольников ( $n > 3$ ).

Итак, пусть  $n$ -угольники  $P$  и  $P'$  удовлетворяют условиям теоремы. Имеются две возможности:

1. Каждый из углов  $A_2, \dots, A_{n-1}$  строго меньше соответствующего угла  $A'_2, \dots, A'_{n-1}$ .
2. Среди указанных углов имеются равные, например  $\angle A_k = \angle A'_k$ .

Докажем сначала теорему во втором случае. Для этого проведем диагонали  $A_{k-1} A_{k+1}$  и  $A'_{k-1} A'_{k+1}$  и отсечем от наших многоугольников по треугольнику:  $T = A_{k-1} A_k A_{k+1}$  и  $T' = A'_{k-1} A'_k A'_{k+1}$ . Эти треугольники равны (так как их углы  $A_k$  и  $A'_k$  равны по предположению, а заключающие их стороны равны по условию теоремы). Отсюда следует, что многоугольники  $Q$  и  $Q'$ , оставшиеся после отсечения этих треугольников, будут обладать теми же свойствами, что и исходные многоугольники  $P$  и  $P'$ . Действительно, у многоугольников  $Q$  и  $Q'$  стороны  $A_{k-1} A_{k+1}$  и  $A'_{k-1} A'_{k+1}$  равны по равенству треугольников  $T$  и  $T'$ . Углы при вершинах  $A_{k-1}$  и  $A_{k+1}$  у многоугольника  $Q$  не больше, чем углы при соответственных вершинах многоугольника  $Q'$ , потому что эти углы получаются из углов многоугольников  $P$  и  $P'$  вычитанием равных углов треугольников  $T$  и  $T'$ . Все же прочие углы и стороны у многоугольников  $Q$  и  $Q'$  те же, что у  $P$  и  $P'$ , а значит, находятся в тех же отношениях.

Итак, многоугольники  $Q$  и  $Q'$  удовлетворяют тем же условиям. Но у них на одну вершину меньше, так что, по предположению, теорема для них верна. Следовательно,  $A_n A_1 < A'_n A'_1$ , что и требовалось доказать.

Теперь рассмотрим тот случай, когда все углы  $A_2, \dots, A_{n-1}$  многоугольника  $P$  строго меньше соответственных углов многоугольника  $P'$ .

Возьмем какую-либо вершину  $A_k$  многоугольника  $P$ , не лежащую на продолжении стороны  $A_1 A_n$  (так как мы не исключаем наличия углов, равных  $\pi$ , то могло бы быть, что вершина  $A_2$  или  $A_{n-1}$  лежит на продолжении стороны  $A_1 A_n$ <sup>2)</sup>). Построим треугольник  $T = A_k A_1 A_n$  (рис. 77).

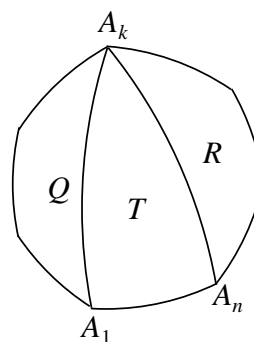


Рис. 77

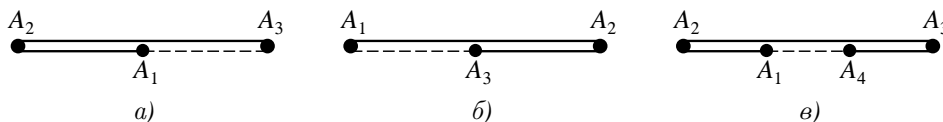
Многоугольник  $P$  разобьется, вообще говоря, на три части: треугольник  $T$  и многоугольники  $Q, R$ , смежные с ним по сторонам  $A_k A_1, A_k A_n$ . (Не исключается, что один из многоугольников  $Q$  и  $R$  вырождается в отрезок.)

Будем непрерывно изменять треугольник  $T$  так, чтобы его угол  $A_k$  увеличивался, а длины сторон  $A_k A_1, A_k A_n$  оставались неизменными. Тогда по упомянутой уже теореме о треугольниках сторона  $A_1 A_n$  будет удлиняться, так что после деформации будет

$$A_1 A_n < A''_1 A''_n. \tag{3'}$$

Вместе с раздвижением сторон  $A_k A_1, A_k A_n$  будем перемещать прилегающие к ним многоугольники  $Q$  и  $R$ . В результате весь многоугольник  $P = Q + T + R$  будет деформироваться так, что только его угол  $A_k$  будет увеличиваться. Мы можем, очевидно, увеличить угол  $A_k$  до любой величины  $\leq \pi$  и, в частности, сделать его равным углу  $A'_k$  многоугольника  $P'$ .

<sup>2)</sup>Пока количество вершин  $n > 4$ , такая вершина  $A_k$  всегда найдется. Но при  $n = 3$  и  $n = 4$  все вершины могут оказаться лежащими на прямой  $A_1 A_n$ , см. рис. а, б, в. Такие



положения естественно возникают после отсечения ряда треугольников с уже выравненными углами. В случаях а, б мы уже пришли к базе индукции — треугольнику, и угол  $A_2$  можно свободно увеличить до угла  $A'_2$ . В случае в можно одновременно поворачивать отрезок  $A_2 A_1$  (вокруг  $A_2$ , по часовой стрелке) и отрезок  $A_3 A_4$  (вокруг  $A_3$ , против часовой стрелки) так, чтобы движущиеся концы  $A_1$  и  $A_4$  все время были равноудалены от прямой  $A_2 A_3$ . И продолжать это до тех пор, пока угол  $A_2$  или угол  $A_3$  достигнет соответственно угла  $A'_2$  или  $A'_3$ . — Прим. В. А. Залгаллера.

Если при этом многоугольник  $P''$ , полученный деформацией из многоугольника  $P$ , будет выпуклым, то к нему применимы все те же рассуждения. Но теперь у него один угол  $A''_k$  равен углу  $A'_k$ , т. е. мы имеем уже рассмотренный случай наличия равных углов. Поэтому на основании доказанного в этом случае можно утверждать, что

$$A''_1 A''_n < A'_1 A'_n. \quad (4)$$

Это вместе с (3') дает

$$A_1 A_n < A'_1 A'_n,$$

что и требовалось доказать.

Все это верно, однако, только при том условии, что многоугольник  $P''$  остается выпуклым. А между тем может случиться, что при рассмотренной деформации многоугольника его выпуклость нарушится раньше, чем угол  $A_k$  достигнет желаемой величины. Выясним, как такое нарушение выпуклости может произойти<sup>3)</sup>.

По теореме 1 многоугольник с углами, не превосходящими  $\pi$ , — выпуклый. Поэтому нарушение выпуклости может быть вызвано только тем, что некоторые углы, увеличиваясь, становятся большими  $\pi$ . Но при рассматриваемой деформации меняются только углы  $A_k, A_1, A_n$ . Угол  $A_k$  не будет становиться больше  $\pi$ , так как он увеличивается лишь до размеров угла  $A'_k$  в выпуклом многоугольнике  $P'$ . Но угол  $A_1$  или  $A_n$  может также увеличиваться и стать в один момент равным  $\pi$ , а далее оказаться уже большим  $\pi$ <sup>4)</sup>. (То, что это на самом деле возможно, видно из рис. 78, где для простоты изображены плоские многоугольники; для сферических многоугольников положение аналогично.)

Будем, для определенности, считать, что в некоторый момент стал равным  $\pi$  именно угол  $A_1$ . (Может случиться, что угол  $A_1$  у самого исходного многоугольника  $P$  равен  $\pi$ . Тогда мы сразу применяем следующее далее построение.)

<sup>3)</sup> Любопытно отметить, что О. Л. Коши, которому принадлежит доказываемая теорема, просмотрел указанную возможность и тем самым не дал, по существу, доказательства теоремы. Этот пробел был восполнен значительно позже другими [352, с. 34]. (Краткая история различных исправлений ошибки О. Л. Коши содержится в статье И. Х. Сабитова [201], где предложено также новое, чисто аналитическое доказательство. — Прим. В. А. Залгаллера.)

<sup>4)</sup> Если в треугольнике  $A_k A_1 A_n$  угол  $A_k$  увеличивается при неизменности длин сторон  $A_k A_1, A_k A_n$ , то угол  $A_1$ , (соотв.  $A_n$ ) убывает или возрастает в зависимости от того, будет ли угол  $A_n$  (соотв.  $A_1$ ) в треугольнике острым или тупым. Это непосредственно очевидно из рис. 78.

Мы имеем теперь многоугольник  $P''$ , у которого угол  $A_1''$  равен  $\pi$  и потому  $A_1''A_2''$  и  $A_1''A_n''$  образуют одну сторону<sup>5)</sup>.

Рассмотрим треугольник  $A_{n-1}''A_2''A_n''$ . Если в нем  $\angle A_n'' \leq \frac{\pi}{2}$ , то поворотом отрезка  $A_2''A_1''$ , оставляя вершину  $A_n''$  неподвижной, увеличиваем угол  $\angle A_2''$  до нужного значения  $\angle A_2$ , не нарушая выпуклости.

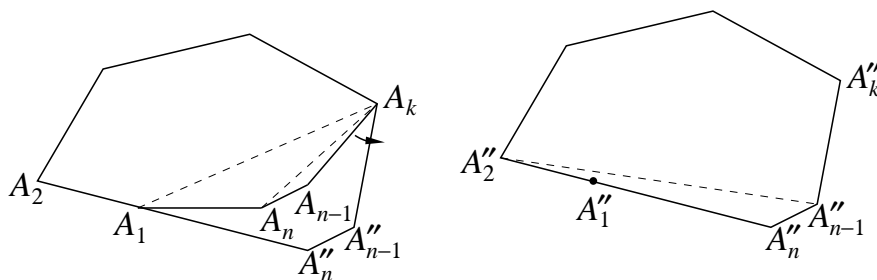


Рис. 78

Если  $\frac{\pi}{2} < \angle A_n'' < \pi$ , то начинаем непрерывно увеличивать угол  $\angle A_{n-1}''$ , вращая отрезок  $A_{n-1}''A_n''$  вокруг вершины  $A_{n-1}''$ ; отрезок  $A_2''A_1''$  одновременно поворачиваем вокруг вершины  $A_2''$  так, чтобы его продолжение все время шло в точку  $A_n''$ . При этом (пока угол  $\angle A_n''$  тупой) будет расти угол  $\angle A_2''$ , удлиниться отрезок  $A_1''A_n''$  и уменьшаться тупой угол  $\angle A_n''$ . Поэтому представится одна из трех возможностей.

1. Угол  $\angle A_{n-1}''$  удастся довести до нужного значения (т. е. до угла  $\angle A_{n-1}'$ ) без нарушений выпуклости.
2. Угол  $\angle A_2''$  удастся довести до нужного значения (т. е. до угла  $\angle A_2'$ ) без нарушений выпуклости.
3. Прежде чем наступит одна из двух предыдущих возможностей, тупой угол  $\angle A_n''$  уменьшится до  $\frac{\pi}{2}$ . В этом положении прекратим увеличение угла  $\angle A_{n-1}''$  и поворотом отрезка  $A_2''A_1''$  увеличим угол  $\angle A_2''$  до нужного значения (т. е. до угла  $\angle A_2'$ ) без нарушений выпуклости.

Наконец, если  $\angle A_n'' = \pi$ , то поступаем с треугольником  $A_2''A_{n-1}''A_n''$  так же, как в случае, изображенном на рис. 78.

<sup>5)</sup> В издании 1950-го года треугольник  $A_2''A_{n-1}''A_n''$  был спутан с треугольником  $A_2''A_k''A_n''$  и не разделены случаи, когда в многоугольнике  $P$

$$\angle A_n'' \leq \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2} < \angle A_n'' < \pi, \quad \angle A_n'' = \pi.$$

Поэтому несколько следующих абзацев приводятся в чуть измененной редакции, восстанавливающей точность доказательства. — Прим. В.А. Залгаллера.

Итак, мы можем построить выпуклый многоугольник  $P'''$ , у которого хотя бы один из углов  $A_i'''$  будет равен соответствующему углу  $A_i'$ . Тогда, как уже доказано, можно заключить, что

$$A_1''' A_n'' < A_1' A_n',$$

а так как при переходе от  $P$  к  $P'''$  сторона  $A_1 A_n$  все время удлинялась, то  $A_1 A_n < A_1''' A_n'''$  и, следовательно,

$$A_1 A_n < A_1' A_n'.$$

Таким образом, доказательство нашей теоремы завершено.

(Мы фактически доказали, что многоугольник  $P$  можно непрерывно деформировать так, что выпуклость не нарушается, углы  $A_2, \dots, A_{n-1}$  не убывают и хотя бы один из них достигает нужной величины. Повторением таких деформаций многоугольник  $P$  можно превратить в  $P'$ . При этом условия теоремы никогда не будут нарушаться, а сторона  $A_1 A_n$  будет постепенно удлиняться<sup>6)</sup>.)

**4. Лемма 2.** *Если у двух выпуклых сферических многоугольников стороны соответственно равны, а среди соответственных углов имеются неравные, то при обходе вокруг этих многоугольников разности соответствующих углов меняют знак не менее четырех раз, т. е. если  $A_1 A_2 = B_1 B_2, \dots, A_n A_1 = B_n B_1$ , то либо все разности  $\delta_i = \angle A_i - \angle B_i$  равны нулю, либо в ряду их  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \delta_1$  есть по крайней мере четыре перемены знака.*

Если не все разности  $\delta_i$  равны нулю, то они должны менять знак. Действительно, если, например,  $\angle A_2 \leq \angle B_2, \dots, \angle A_{n-1} \leq \angle B_{n-1}$  и хотя бы в одном случае имеется точное неравенство, то по теореме 2 должно быть  $A_1 A_n < B_1 B_n$  вопреки условию.

Если перемены знака имеются, то их четное число, потому что при обходе мы возвращаемся к той разности, с которой начали обход. Следовательно, достаточно показать, что не может быть только двух перемен знака.

Допустим, однако, что имеется ровно две перемены знака, и пусть, например, углы  $A_1, \dots, A_m$  больше углов  $B_1, \dots, B_m$ , а углы  $A_{m+1}, \dots, A_n$  меньше углов  $B_{m+1}, \dots, B_n$  (не исключая, конечно, что среди этих углов могут быть равные).

<sup>6)</sup> Утверждение этого абзаца неточно. Приведенное доказательство теоремы дает непрерывную деформацию  $P$  в  $P'$  с неубыванием углов ломаной. Однако оно не гарантирует сохранения выпуклости в процессе деформации у всего многоугольника, а лишь для вписанного в него многоугольника, соединяющего концы ломаной и вершины, углы при которых на данном шаге индукции еще оставались меньше соответственных углов многоугольника  $P'$ . Лишенная указанного недостатка деформация тоже всегда существует. Это доказано, в частности, в статье И. Х. Сабитова [201]. — Прим. В.А. Залгаллера.

Разделим стороны  $A_1A_n$ ,  $A_mA_{m+1}$ ,  $B_1B_n$ ,  $B_mB_{m+1}$  пополам точками  $K$ ,  $L$ ,  $M$ ,  $N$  и проведем  $KL$  и  $MN$  (рис. 79). Сравнивая многоугольники  $A_1 \dots A_mLK$  и  $B_1 \dots B_mNM$ , мы видим, что все их стороны, кроме  $LK$  и  $NM$ , равны по условию, а углы  $A_1, \dots, A_m$  больше углов  $B_1, \dots, B_m$ . Поэтому согласно теореме 2 должно быть  $LK > NM$ . Но если так же сравнить многоугольники  $A_{m+1} \dots A_nKL$  и  $B_{m+1} \dots B_nMN$ , то по той же причине должно быть  $LK < NM$ . Полученное противоречие показывает, что не может быть только двух перемен знака и, следовательно, их должно быть не менее четырех.

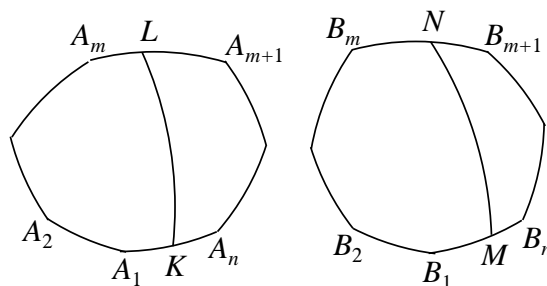


Рис. 79

5. Лемму 2 легко пересказать для многогранных углов. При этом мы присоединим к многогранным углам также «вырождающиеся», т. е. сводящиеся к дважды покрытым плоским углам, меньшим  $\pi$ .

**Лемма 2а.** Если у двух выпуклых многогранных углов, не сводящихся к двугранным углам, и может быть вырождающихся, плоские углы соответственно равны, а среди соответственных двугранных углов имеются неравные, то при обходе вокруг вершин данных многогранных углов разности соответственных двугранных углов меняют знак не менее четырех раз.

(Как оговорено в начале параграфа, допускаются двугранные углы, равные  $\pi$ . Речь идет о плоских углах между соседними ребрами, включая ребра этих двугранных углов.)

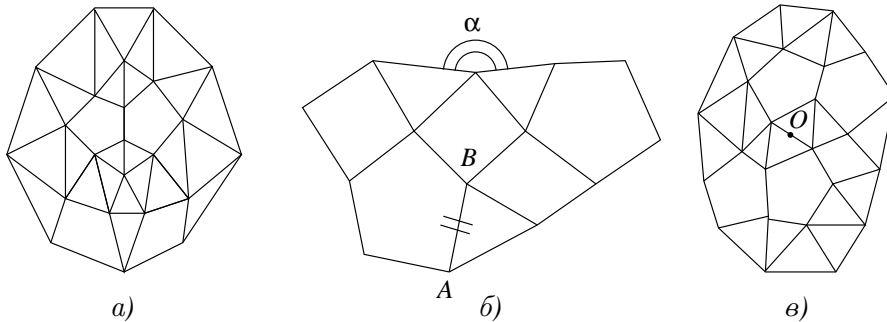
Действительно, если оба многогранных угла не вырождаются, то, описывая вокруг их вершин равные сферы, получим на этих сферах многоугольники, удовлетворяющие условиям леммы 2, так что в этом случае лемма 2а есть простой пересказ леммы 2.

Пусть хотя бы один из данных многогранных углов вырождается. Обозначим его  $V_1$ , другой обозначим  $V_2$ . Пусть  $p_1$ ,  $q_1$  — те ребра угла  $V_1$ , двугранные углы при которых равны нулю. Если при ребре  $p_2$  угла  $V_2$ , соответствующем ребру  $p_1$ , двугранный угол также равен нулю, то он равен нулю и при ребре  $q_2$ . Тогда углы  $V_1$  и  $V_2$  оказываются равными.

Допустим поэтому, что угол при ребре  $p_2$  не равен нулю. Тогда и при  $q_2$  он не равен нулю. Следовательно, углы при ребрах  $p_2$ ,  $q_2$  больше, чем

при  $p_1, q_1$ . Вместе с тем суммы плоских углов многогранного угла  $V_2$  между ребрами  $p_2, q_2$  равны с обеих сторон, так как они равны на угле  $V_1$ . Поэтому на угле  $V_2$  с обеих сторон между ребрами  $p_2, q_2$  имеются ребра, углы при которых меньше  $\pi$ . Но так как угол  $V_1$  вырождается, то двугранные углы при его соответственных ребрах равны  $\pi$ . Таким образом, на угле  $V_2$  с обеих сторон между ребрами  $p_2, q_2$  имеются ребра, двугранные углы при которых меньше, чем при соответствующих ребрах угла  $V_1$ . А так как углы при самих ребрах  $p_2, q_2$  больше, чем при  $p_1, q_1$ , то получаем как раз четыре перемены знака. Лемма доказана.

**Упражнение**<sup>7)</sup>. Предлагаем читателю с помощью этой леммы Коши доказать утверждения о гомеоморфных кругу выпуклых многогранниках, взаимное расположение граней которых изображено на рисунках *a, б, в*.



В случае *a* многогранник неизгибаем при твердых гранях и сохранении выпуклости. В случае *б* при изгибаниях указанного типа минимальное значение угла  $\alpha$  достигается, если двугранный угол при ребре  $AB$  становится равным  $\pi$ . В случае *в*, если все грани правильные многоугольники, то многогранник симметричен относительно оси, проходящей через точку  $O$ . (Многочисленные подобные применения леммы Коши см. в [108].)

## § 2. РАВЕНСТВО ДВУГРАННЫХ УГЛОВ ПРИ РАВЕНСТВЕ ПЛОСКИХ УГЛОВ

**1.** Здесь к выпуклым многогранникам мы причисляем также дважды покрытые выпуклые многоугольники, т. е. «многогранники», составленные из двух наложенных друг на друга равных многоугольников<sup>8)</sup>.

<sup>7)</sup> Добавлено В. А. Залгаллером.

<sup>8)</sup> Точки, лежащие внутри этих многоугольников, хотя и совпадают, но считаются как бы различными; их удобно считать лежащими с разных сторон того «дважды покрытого» многоугольника, который образуют два наложенных друг на друга многоугольника. Расстояние между точками «на разных сторонах» дважды покрытого многоугольника измеряется по линии, «переходящей» через край многоугольника (рис. 80).

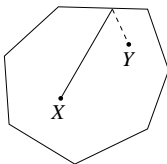


Рис. 80

Естественная развертка такого многогранника состоит из двух равных многоугольников, склеиваемых по всем соответственным сторонам.

Кроме того, мы будем допускать разбиение граней многогранника на конечное число многоугольников, каждый из которых будет считаться «гранью». В соответствии с этим у многогранника могут быть два сорта ребер и вершин: «настоящие» и «ненастоящие». Каждое ребро является общей стороной двух «граней». Ненастоящие ребра — те, двугранные углы при которых равны  $\pi$ , т. е. сводятся к плоскости. Ненастоящие вершины — те, многогранные углы при которых сводятся к двугранным или, в частности, к плоскости, что будет, если вершина лежит внутри истинной грани многогранника. Такое расширение понятий грани, ребра и вершины оказывается удобным и используется дальше без особых упоминаний.

Мы говорим, что два многогранника имеют одинаковое строение, если между их элементами: гранями, ребрами, вершинами можно установить взаимно однозначное соответствие, сохраняющее отношение принадлежности. Например, если ребро  $a$  (вершина  $A$ ) на многограннике  $P$  принадлежит грани  $Q$  (ребру  $q$ ), то соответственное ребро  $a_1$  (вершина  $A_1$ ) на многограннике  $P_1$  принадлежит соответственной грани  $Q_1$  (ребру  $q_1$ ).

**2. Теорема 1.** *Если у двух замкнутых выпуклых многогранников одинакового строения соответственные углы на соответственных гранях равны, то двугранные углы при соответственных ребрах также равны.*

Пусть  $P_1$  и  $P_2$  — два многогранника, удовлетворяющих условиям теоремы. Сопоставим каждому ребру многогранника  $P_1$  знак  $+$  или  $-$  в зависимости от того, больше или меньше двугранный угол при этом ребре, чем двугранный угол при соответственном ребре многогранника  $P_2$ . Ребра с равными двугранными углами остаются неотмеченными.

Рассмотрим перемены знаков, получающиеся при обходе вокруг одной вершины.

Здесь следует различать два случая в зависимости от того, будет ли данная вершина настоящей или нет.

Пусть  $A_1, A_2$  — соответственные вершины многогранников  $P_1, P_2$ . Настоящая вершина характеризуется, как нам известно, тем, что сумма сходящихся в ней плоских углов меньше  $2\pi$ . А так как по условию соответственные плоские углы на многогранниках  $P_1$  и  $P_2$  равны, то вершины  $A_1$  и  $A_2$  одновременно либо обе настоящие, либо обе ненастоящие.

Если вершины  $A_1$  и  $A_2$  — настоящие, то мы можем воспользоваться леммой 2а § 1, согласно которой при условии равенства плоских углов разности двугранных углов либо все равны нулю, либо меняют знак не менее 4 раз.

Если же вершины  $A_1$  и  $A_2$  — ненастоящие, то мы будем различать два случая: 1) к обеим вершинам подходят настоящие ребра, но настоящему ребру, подходящему к  $A_1$ , соответствует ненастоящее ребро, подходящее к  $A_2$ ; 2) второй случай включает все прочие возможности: либо хотя бы при одной из вершин настоящих ребер нет, либо они соответствуют друг



другу. Мы покажем, что в первом случае число перемен знаков вокруг вершины  $A_1$  равно четырем, а во втором случае вершины  $A_1$  и  $A_2$  можно вовсе исключить.

1) Пусть имеет место первый случай. Пусть  $a_1, a'_1$  — настоящие ребра, сходящиеся в вершине  $A_1$ , и  $b_2, b'_2$  — настоящие ребра, сходящиеся в вершине  $A_2$  (рис. 81). Так как многогранный угол при ненастоящей вершине сводится к двугранному, то два сходящихся в ней настоящих ребра являются продолжением друг друга. Поэтому если настоящему ребру  $a_1$  многогранника  $P_1$  соответствует ненастоящее ребро  $a_2$  многогранника  $P_2$ , то ребру  $a'_1$  соответствует также ненастоящее ребро  $a'_2$ . А тогда настоящим ребрам  $b_2, b'_2$  многогранника  $P_2$  соответствуют ненастоящие ребра  $b_1, b'_1$  многогранника  $P_1$ .

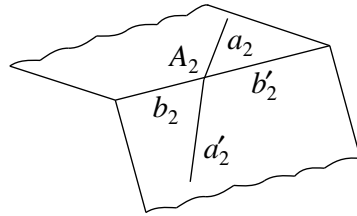
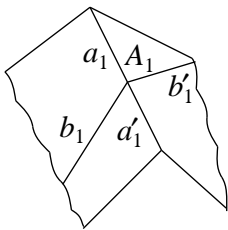


Рис. 81

При настоящих ребрах двугранные углы меньше  $\pi$ , а при ненастоящих — равны  $\pi$ . Поэтому знаки разностей углов при ребрах  $a_1$  и  $a_2, b_1$  и  $b_2, a'_1$  и  $a'_2, b'_1$  и  $b'_2$  будут последовательно  $-, +, -, +$ , что даст как раз

четыре переменны знака. (Других отмеченных ребер нет, так как все они, как при вершине  $A_1$ , так и при  $A_2$ , — ненастоящие, и тем самым углы при них равны.)

2) Во втором случае можно различать три возможности:

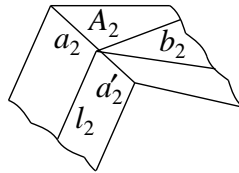
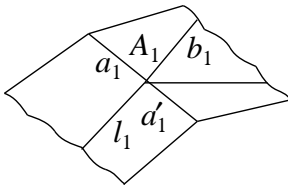


Рис. 82

2а) ни при одной из вершин  $A_1$  и  $A_2$  нет настоящих ребер;

2б) они имеются только при одной из этих вершин;

2в) они имеются при обеих и соответствуют друг другу (рис. 82).

2а) Когда все ребра при вершинах  $A_1, A_2$  ненастоящие, то все двугранные углы вокруг вершин  $A_1$  и  $A_2$  равны  $\pi$ . Поэтому все ребра вокруг вершины  $A_1$  будут неотмеченными, так что вершины  $A_1, A_2$  и все сходящиеся в них ребра можно исключить.

2б) и 2в) Пусть, например, при вершине  $A_1$  есть настоящее ребро  $A_1$  и, следовательно, также настоящее ребро  $a'_1$ , являющееся продолжением  $a_1$ . Пусть  $a_2, a'_2$  — соответствующие ребра при вершине  $A_2$ . Тогда, если к вершине  $A_2$  подходят настоящие ребра, то они суть  $a_2, a'_2$  (случай 2в). Остальные ребра  $b_1, \dots, l_1$ , подходящие к  $A_1$ , — ненастоящие, и им соответствуют ненастоящие ребра  $b_2, \dots, l_2$ . Поэтому ребра  $b_1, \dots, l_1$  оказываются неотме-

ченными, и их можно исключить. Ребра  $a_2$  и  $a'_2$  заведомо служат продолжением друг друга, потому что плоские углы между ними такие же, как между  $a_1$  и  $a'_1$ , т. е. равные  $\pi$ . Двугранные углы при ребрах  $a_2$  и  $a'_2$  равны, и потому ребра  $a_1$ ,  $a'_1$  имеют один и тот же знак. Следовательно, мы можем вовсе исключить вершины  $A_1$  и  $A_2$ , сопоставив друг другу ребра  $a_1 + a'_1$  и  $a_2 + a'_2$ ; при этом ребру  $a_1 + a'_1$  будет отнесен, конечно, тот же знак, какой стоял на ребрах  $a_1$  и  $a'_1$ .

Итак, все ненастоящие вершины, в которых имеет место второй случай, можно исключить вовсе. Тогда из всего доказанного вытекает следующее: если на многограннике  $P_1$  вообще имеются отмеченные ребра, то вокруг всякой вершины, к которой они подходят, имеется не менее четырех перемен знака. Но согласно лемме Коши (§ 1, главы II), это невозможно. Поэтому отмеченных ребер нет вовсе. А это означает, что соответственные двугранные углы многогранников  $P_1$  и  $P_2$  равны и теорема доказана.

**3. Теорема 2.** Пусть  $P_1$  — бесконечный выпуклый многогранник, ни из какой вершины которого не исходит более одного бесконечного ребра, даже если исключить все или некоторые ненастоящие вершины (объединяя при этом в одно каждое ребро, разделенное такой несобственной вершиной<sup>9)</sup>). Тогда, если многогранник  $P_2$  имеет то же строение, что  $P_1$ , и соответственные углы на соответственных гранях многогранников  $P_1$  и  $P_2$  равны, то двугранные углы при их соответственных ребрах также равны.

Прежде чем приступить к доказательству, сделаем некоторые замечания. Если все бесконечные ребра многогранника  $P_1$  параллельны, то из одной вершины заведомо может исходить только одно бесконечное ребро. Поэтому для таких пар многогранников теорема 2 утверждает, что равенство углов на гранях всегда влечет за собой равенство двугранных углов. Многогранник с параллельными бесконечными ребрами характеризуется тем, что его полная кривизна равна  $2\pi$ , потому что только при параллельности бесконечных ребер сферическое изображение бесконечного многогранника покрывает целую полусферу. Отсюда следует, что в теореме 2 содержится следующая

**Теорема 3.** Если у двух бесконечных выпуклых многогранников одинакового строения, имеющих полную кривизну  $2\pi$ , соответственные углы на

<sup>9)</sup>Поскольку мы допускаем ненастоящие вершины, разбивающие ребра, эта оговорка необходима. Например, возьмем многогранный угол  $P$ , он несомненно допускает деформации, не меняющие плоских углов, но меняющие двугранные углы. На каждом ребре угла  $P$  возьмем по точке и, приняв эти точки за (ненастоящие) вершины  $A_i$ , соединим их (ненастоящими) ребрами. После этого из каждой вершины  $A_i$  будет исходить по одному бесконечному ребру, а из настоящей вершины  $O$  угла  $V$  будут исходить лишь конечные ребра  $OA_i$ . Только исключая ненастоящие вершины  $A_i$ , мы получим, что из вершины  $O$  исходит более одного бесконечного ребра.

*соответственных гранях равны, то двугранные углы при их соответственных ребрах также равны.*

Если же бесконечный многогранник имеет полную кривизну  $< 2\pi$ , то у него имеются непараллельные бесконечные ребра и из одной вершины может исходить несколько бесконечных ребер. В последнем случае теорема 2 неприменима, и нужны дополнительные условия, которые будут рассмотрены в § 4. То, что здесь из равенства плоских углов не следует равенство двугранных углов, показывает пример многогранного угла, который можно деформировать без изменения его плоских углов.

Теперь докажем теорему 2.

Пусть  $P_1$  и  $P_2$  — многогранники, удовлетворяющие условиям теоремы 2. Присоединим к каждому из них по одной несобственной вершине и будем считать, что в этих вершинах сходятся их бесконечные ребра. Тогда получим абстрактные многогранники  $\overline{P}_1, \overline{P}_2$  одинакового строения и гомеоморфные сфере. На многограннике  $\overline{P}_1$  всякие две вершины соединяются не более чем одним ребром. Действительно, для собственных вершин это ясно. Если же ребро  $AB$  соединяет собственную вершину  $A$  с несобственной вершиной  $B$ , то оно есть попросту бесконечное ребро многогранника  $P_1$ . А так как по условию из одной вершины  $A$  на многограннике  $P_1$  может исходить только одно бесконечное ребро, то и в этом случае ребро  $AB$  — единственное, соединяющее вершины  $A$  и  $B$ .

Но если многогранник гомеоморфен сфере и каждые две его вершины соединяются не более чем одним ребром, то к сети его ребер применима лемма Коши. Расставим на ребрах многогранника  $P_1$  знаки разностей двугранных углов  $P_1$  и  $P_2$ . Тогда, рассуждая так же, как в доказательстве теоремы 1, убедимся, что, во-первых, вокруг каждой настоящей вершины будет не менее четырех перемен знака, если только к вершине подходит хотя бы одно отмеченное ребро. Во-вторых, для ненастоящих вершин может быть два случая: или вокруг такой вершины имеется ровно четыре переменны знака, или такую вершину можно вовсе исключить. Таким образом, вокруг каждой из оставшихся отмеченных вершин будет не менее четырех перемен знака. Согласно условию теоремы, исключение ненастоящих вершин не нарушает того, что из одной вершины многогранника  $P_1$  исходит максимум одно бесконечное ребро. Поэтому и после такого исключения к оставшейся сети на многограннике  $\overline{P}_1$ , полученном из  $P_1$  присоединением несобственной вершины, лемма Коши будет применима. На многограннике  $\overline{P}_1$  вокруг каждой из оставшихся (отмеченных) вершин будет не менее четырех перемен знака; единственное исключение может составить только несобственная вершина: число перемен знаков вокруг нее могло бы даже равняться нулю. Однако, как было отмечено в § 1 главы II, лемма Коши допускает уточнение: ее результат верен также при наличии одной верши-

ны с числом перемен знаков, меньшим четырех. Применяя лемму Коши с этим дополнением, замечаем, что полученная расстановка знаков невозможна, т. е. все ребра должны быть неотмеченными и тем самым все разности собственных двугранных углов многогранников  $P_1$  и  $P_2$  равны нулю.

4. Совершенно аналогично теореме 2 имеет место

**Теорема 4.** Пусть  $P_1$  — конечный выпуклый многогранник, ограниченный одной замкнутой ломаной и такой, что никакая его внутренняя, т. е. не лежащая на границе, вершина не соединяется с границей более чем одним ребром. Тогда, если многогранник  $P_2$  имеет то же строение, что  $P_1$ , и углы на соответственных гранях при соответственных внутренних вершинах многогранников  $P_1$  и  $P_2$  равны, то равны также двугранные углы при их соответственных ребрах.

Действительно, присоединим к многограннику  $P_1$  несобственную вершину, отождествив с ней всю границу многогранника  $P_1$ ; к этой вершине будут подходить все ребра, идущие изнутри к границе многогранника. В результате получим абстрактный «многогранник», гомеоморфный сфере. Тогда буквальное повторение рассуждений, примененных в доказательстве теоремы 2, приводит к доказательству теоремы 4<sup>10)</sup>.

Заметим, что теорема 4 включает в себя как теорему 1, так и теорему 2. Если многогранники  $P_1$  и  $P_2$  — замкнутые и их соответственные углы на гранях равны, то, срезая углы вокруг одной вершины, получим многогранники  $P'_1, P'_2$  с границами, удовлетворяющие условиям теоремы 4. Если же многогранники  $P_1$  и  $P_2$  — бесконечные, то, отрезав от них бесконечные куски бесконечных граней, не задевая вершин, получим опять-таки многогранники  $P'_1, P'_2$ , удовлетворяющие условиям теоремы 4. Для многогранников, ограниченных несколькими замкнутыми ломаными, пришлось бы вводить несколько несобственных вершин, а тогда уточненная лемма Коши не приводит ни к какому результату. Здесь нужны еще дополнительные условия, но вопрос о том, какие именно, остается совершенно открытым.

### § 3. Единственность многогранника с данной разверткой

1. В этом параграфе, так же как в предыдущем, к выпуклым многогранникам причисляются также дважды покрытые выпуклые многоугольники. Если точки  $X, Y$  лежат с разных сторон такого вырождающегося многогранника  $P$ , то расстояние между ними измеряется длиной самой короткой

<sup>10)</sup> В выводах о числе перемен знака играет роль только выпуклость многогранных углов, а потому достаточно требовать, чтобы у многогранников  $P_1, P_2$  были выпуклыми все многогранные углы; сами же многогранники могут быть невыпуклыми. Такие многогранники можно назвать локально выпуклыми. Полный многогранник, являющийся локально выпуклым, — заведомо выпуклый, но если есть граница, то он может быть и невыпуклым в целом.

ломаной, проходящей от  $X$  до края  $P$  и далее к  $Y$  (см. рис. 80). Таким образом, если точки  $X$  и  $Y$  совпадают, но считаются лежащими с разных сторон, то расстояние между ними не равно нулю. Доказательству равенства многогранников с одинаковыми развертками предположим некоторые леммы. В отличие от условия, принятого в предыдущем параграфе, в этих леммах под гранями многогранника понимаются только его истинные грани. Вырожденный многогранник состоит только из двух совпадающих граней.

**Лемма 1.** *Если линия  $L$  на выпуклом многограннике  $P$  является кратчайшей (т. е. самой короткой из всех линий, соединяющих данные точки), то она представляет собой ломаную, имеющую не более одного отрезка на каждой грани<sup>11)</sup>.*

Действительно, пусть точки  $X, Y$  кратчайшей  $L$  лежат на грани  $Q$ . Тогда по выпуклости грани  $Q$  на ней лежит прямолинейный отрезок  $XU$ . Этот отрезок заведомо дает кратчайшее соединение точек  $X$  и  $Y$ , и если бы участок  $\widehat{XU}$  линии  $L$  не совпадал с отрезком  $XU$ , то, заменяя его этим отрезком, мы сократили бы линию  $L$  вопреки тому, что она — кратчайшая. Отсюда ясно, что вся часть линии  $L$ , лежащая на  $Q$ , сводится к одному отрезку.

**Лемма 2.** *Если бесконечная в одну сторону линия  $L$  на бесконечном выпуклом многограннике  $P$  является кратчайшей на всяком своем отрезке, то, начиная с некоторой точки, она представляет собой полупрямую, лежащую на бесконечной грани многогранника  $P$ .*

Действительно, по лемме 1 сколь угодно длинный участок линии  $L$  может иметь на каждой грани максимум один отрезок. Так как число граней конечно, то, начиная с некоторой точки, линия  $L$  должна остаться в пределах одной грани  $Q$ , а так как она — кратчайшая на каждом отрезке и бесконечна, то на  $Q$  она оказывается полупрямой.

**Лемма 3.** *Если многогранники  $P_1$  и  $P_2$  склеены из одной и той же развертки  $R$ , то существует изометрическое, т. е. сохраняющее длины, отображение одного из них на другой.*

Действительно, каждой точке  $X$  развертки  $R$  отвечают точки  $X_1, X_2$  многогранников  $P_1, P_2$ , так что каждой точке  $X_1$  на  $P_1$  отвечает точка  $X_2$  на  $P_2$ . Это соответствие будет изометрическим, потому что всякие две соответствующие друг другу линии  $L_1$  и  $L_2$  на  $P_1$  и  $P_2$  отвечают одной и той же линии  $L$  на развертке  $R$  и, следовательно, имеют одну и ту же длину. В силу леммы 3 вопрос о равенстве многогранников, склеенных из одной развертки, сводится к вопросу о равенстве изометричных многогранников.

<sup>11)</sup> Подразумевается, что речь идет о полном многограннике или по крайней мере о таком, все грани которого выпуклые. Иначе утверждение леммы может оказаться неверным, как можно убедиться на простых примерах.

**Лемма 4.** Пусть дано изометрическое отображение  $\varphi$  выпуклого многогранника  $P_1$  на выпуклый многогранник  $P_2$  и обратное отображение  $\varphi^{-1}$   $P_2$  на  $P_1$ . Образы граней многогранника  $P_1$ , налегая на грани многогранника  $P_2$ , разбивают их на «новые» грани, и обратно, образы граней многогранника  $P_2$  разбивают  $P_1$  также на «новые» грани. Утверждается, что в результате многогранники  $P_1$  и  $P_2$  оказываются одинаково составленными из равных новых граней.

Действительно, пусть  $Q_1$  — грань многогранника  $P_1$  и  $\varphi(Q_1)$  — ее образ на многограннике  $P_2$ . Пусть  $\varphi(Q_1)$  хотя бы отчасти налегает на грань  $R_2$  многогранника  $P_2$ , так что имеется их общая часть  $S_2 = R_2 \cap \varphi(Q_1)$ . Покажем, что  $S_2$  есть выпуклый многоугольник (рис. 83).

Пусть  $X_2, Y_2$  — точки из  $S_2$ , а  $X_1, Y_1$  — те точки на грани  $Q_1$ , которые переходят при отображении  $\varphi$  соответственно в  $X_2$  и  $Y_2$ . По выпуклости грани  $Q_1$  отрезок  $X_1Y_1$  принадлежит ей, а потому его образ  $\varphi(X_1Y_1)$  содержится в  $\varphi(Q_1)$ . Так как отрезок  $X_1Y_1$  есть кратчайшая на  $P_1$ , то в силу изометричности отображения  $\varphi$  линия  $\varphi(X_1Y_1)$  будет кратчайшей на  $P_2$  между точками  $X_2, Y_2$ . Но эти точки лежат на одной грани  $R_2$ ; следовательно, кратчайшая между ними на  $P_2$  представляет собой прямолинейный отрезок  $X_2Y_2$ . Таким образом, отрезок  $X_2Y_2$  содержится одновременно в  $\varphi(Q_1)$  и в  $R_2$ , а тем самым и в  $S_2$ , чем доказана выпуклость многоугольника  $S_2$ .

Фигура  $S_2 = R_2 \cap \varphi(Q_1)$  вырезается из грани  $R_2$  образами ребер, ограничивающих грань  $Q_1$ . Так как ребра многогранника являются на нем кратчайшими линиями, то по изометричности отображения  $\varphi$  их образы также будут кратчайшими. Образы бесконечных ребер будут бесконечными, кратчайшими на всяком участке. Поэтому на основании лемм 1 и 2 часть образа каждого ребра, лежащая на грани  $R_2$ , есть отрезок или полупрямая (если ребро бесконечно). Следовательно, фигура  $S_2$  вырезается из  $R_2$  конечным числом отрезков и, может быть, еще полупрямых и тем самым представляет собой многоугольник, конечный или бесконечный. Так как граней у многогранников  $P_1$  и  $P_2$  — конечное число, то число всех пересечений граней многогранника  $P_2$  с образами граней многогранника  $P_1$  конечно. По доказанному каждое такое пересечение есть выпуклый многоугольник, и тем самым многогранник  $P_2$  оказывается подразделенным на конечное число выпуклых новых граней. Рассматривая обратное отображение  $\varphi^{-1}$  многогранника  $P_2$  на  $P_1$ , точно так же получим, что многогранник  $P_1$  разбивается

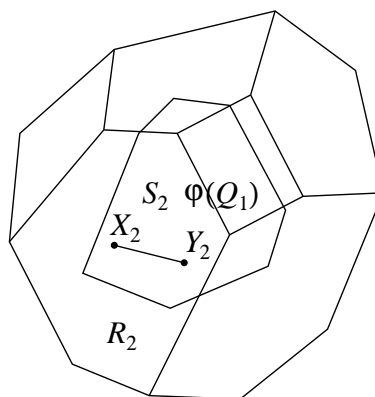


Рис. 83

на конечное число выпуклых новых граней. Покажем, что отображение  $\varphi$  переводит новые грани многогранника  $P_1$  в новые грани многогранника  $P_2$ . Пусть  $S_1$  — новая грань на многограннике  $P_1$ ; она есть пересечение некоторой его грани  $Q_1$  с образом некоторой грани  $R_2$  многогранника  $P_2$  при обратном отображении  $\varphi^{-1}$ :

$$S_1 = Q_1 \cap \varphi^{-1}(R_2).$$

Но тогда  $\varphi(S_1) = \varphi(Q_1) \cap R_2$ , т. е.  $S_1$  переходит в новую грань  $S_2$  на многограннике  $P_2$ , являющуюся пересечением его грани  $R_2$  с  $\varphi(Q_1)$ .

Итак, отображение  $\varphi$  переводит новые грани на  $P_1$  в новые грани на  $P_2$ , а так как это отображение — изометрическое, то тем самым  $P_1$  и  $P_2$  оказываются одинаково составленными из равных граней.

Вследствие леммы 4 вопрос о равенстве изометричных многогранников сводится к вопросу о равенстве многогранников, одинаково составленных из равных «новых» граней.

**2. Теорема 1.** *Если имеется изометрическое отображение  $\varphi$  одного замкнутого выпуклого многогранника на другой, то это отображение можно осуществить движением или движением и отражением, т. е. с помощью такого движения или движения с отражением совмещаются точки, соответствующие друг другу в силу отображения  $\varphi$ <sup>12)</sup>.*

(Согласно лемме 3, в этой теореме уже содержится теорема о равенстве замкнутых выпуклых многогранников с одинаковыми развертками.)

Пусть имеется изометрическое отображение  $\varphi$  замкнутого выпуклого многогранника  $P_1$  на замкнутый выпуклый многогранник  $P_2$ . Тогда, согласно лемме 4,  $P_1$  и  $P_2$  оказываются одинаково составленными из равных новых граней, соответствующих друг другу при отображении  $\varphi$ . Так как эти новые грани равны, то, в частности, их углы соответственно равны, а тогда по теореме 1 § 2 оказываются равными также двугранные углы при соответственных («новых») ребрах. Отсюда уже легко заключить (см. ниже лемму 5), что многогранники равны и их соответственные элементы (новые грани, ребра и вершины) совмещаются путем движения или движения и отражения. Но соответственные элементы их — те, которые сопоставляются отображением  $\varphi$ , потому что оно как раз переводит новые грани на  $P_1$  в новые грани на  $P_2$ . Следовательно, отображение  $\varphi$  можно осуществить движением или движением и отражением. Исчерпывающее обоснование последнего вывода содержится в следующей лемме:

---

<sup>12)</sup>Эта теорема является несколько более острой по форме, чем простое утверждение о равенстве многогранников  $P_1$  и  $P_2$ , потому что если  $P_1$  и  $P_2$  равны, то они совмещаются путем движения или движения и отражения, но априори еще не ясно, что при этом будут совмещаться именно те их элементы, которые соответствуют друг другу при данном отображении  $\varphi$ .

**Лемма 5.** *Если имеется такое изометрическое отображение выпуклого многогранника  $P_1$  на выпуклый многогранник  $P_2$ , что при этом отображении «новые» грани переходят в «новые» грани и двугранные углы при соответственных (новых) ребрах равны, то  $\varphi$  можно осуществить движением или движением и отражением.*

Пусть  $Q_1$  — какая-либо новая грань многогранника  $P_1$ , а  $Q_2$  — соответствующая ей грань на  $P_2$ . Так как отображение  $\varphi$  — изометрическое, то  $Q_1$  и  $Q_2$  суть равные многоугольники, и путем движения  $Q_1$  можно наложить на  $Q_2$  так, чтобы каждая точка  $Q_1$  совпала именно с той точкой на  $Q_2$ , которая соответствует ей при отображении  $\varphi$ <sup>13)</sup>. В результате ребра грани  $Q_1$  совпадут с соответственными ребрами грани  $Q_2$ . Если при этом многогранники  $P_1$  и  $P_2$  окажутся по разные стороны от плоскости их общей грани  $Q_1 = Q_2$ , то отразим  $P_1$  в этой плоскости. Тогда, так как двугранные углы при соответственных ребрах равны, то все грани многогранника  $P_1$ , смежные с  $Q_1$ , налягут на соответственные грани многогранника  $P_2$  и даже совпадут с ними.

Действительно, у этих граней совпадают соответственные ребра и вершины, общие с гранью  $Q_1 = Q_2$ , и они лежат по одну сторону от этих ребер. А тогда и все прочие соответственные элементы этих граней должны совпадать в силу изометричности отображения  $\varphi$ . Переходя от этих граней к смежным и т. д., убедимся, что все элементы многогранника  $P_1$  совпадают с соответственными элементами многогранника  $P_2$ , так что отображение  $\varphi$  оказывается осуществленным путем движения или движения и отражения.

**3. Теорема 2.** *Если имеется изометрическое отображение бесконечного выпуклого многогранника  $P_1$  с полной кривизной, равной  $2\pi$ , на выпуклый многогранник  $P_2$ , то это отображение можно осуществить движением или движением и отражением.*

Так как полная кривизна при изометрическом отображении не меняется, то у многогранника  $P_2$  она также равна  $2\pi$ . Применяя лемму 4, получаем, что многогранники  $P_1$  и  $P_2$  одинаково составлены из равных новых граней. Следовательно, углы на этих гранях соответственно равны, а тогда по теореме 3 §2 равны также двугранные углы при соответственных ребрах. Поэтому, применяя лемму 5, получаем, что данное отображение  $P_1$  на  $P_2$  осуществляется движением или движением и отражением.

Заметим, что, как очевидно, в теоремах 1 и 2 речь может идти об отображении многогранника самого на себя, так что, например, замкнутый выпуклый многогранник, допускающий нетождественное изометрическое отображение самого на себя, необходимо оказывается симметричным.

<sup>13)</sup>Эта оговорка — не лишняя, если грань  $Q_1$  допускает движения, совмещающие ее самое с собой.



§ 4. БЕСКОНЕЧНЫЕ МНОГОГРАННИКИ С КРИВИЗНОЙ, МЕНЬШЕЙ  $2\pi$ 

1. Так как кривизна полностью определяется плоскими углами, то из равенства плоских углов двух многогранников следует равенство их кривизн, так что если у одного из них она  $< 2\pi$ , то и у другого так же. Для равенства двугранных углов одного равенства плоских углов в этом случае еще недостаточно, как это видно на примере изгибания многогранного угла. В качестве дополнительного условия можно было бы потребовать равенства двугранных углов при соответственных бесконечных ребрах. Однако это условие оказывается слишком сильным, и можно требовать несколько меньшего. Для выяснения более слабого условия сделаем некоторые замечания. Так же как в § 2, будем считать, что истинные грани многогранника разбиты на конечное число многоугольников, которые и считаются «гранями». В соответствии с этим среди вершин и ребер могут быть и «ненастоящие».

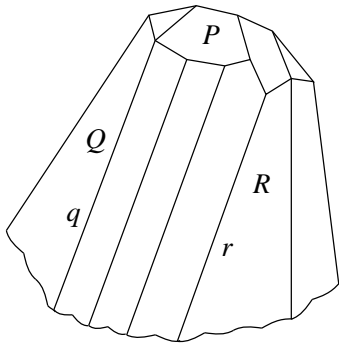


Рис. 84

Пусть  $P$  — бесконечный выпуклый многогранник. Разобьем его бесконечные ребра на классы, относя в один класс каждые два параллельных ребра  $q$  и  $r$ , если они принадлежат одной грани или между ними есть последовательность параллельных ребер, из которых любые два соседних принадлежат попарно одной грани (рис. 84). Если же такой последовательности нет, то ребра  $q$  и  $r$  будем считать входящими в различные классы, хотя бы эти ребра и были параллельны друг другу. Можно показать, что этот случай возможен только для ненастоящих ребер, лежащих на параллельных гранях. Однако это замечание не имеет для дальнейшего никакого значения.

Однако это замечание не имеет для дальнейшего никакого значения.

Пусть  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  — двугранные углы при всех ребрах  $p_1, \dots, p_n$  одного класса. Этому классу в качестве его «двугранного угла» отнесем число

$$\alpha = \pi - \sum_{i=1}^n (\pi - \alpha_i). \quad (1)$$

Здесь  $\pi - \alpha_i$  есть, очевидно, не что иное, как угол между нормальными к граням, сходящимся в ребре  $p_i$ , а  $\pi - \alpha$  — угол между нормальными к граням, прилегающим извне к крайним ребрам данного класса (грани  $Q, R$  рис. 84). Сам же угол  $\alpha$  есть угол между самими этими гранями. Равенство  $\pi - \alpha = \sum (\pi - \alpha_i)$  следует из того, что все ребра  $p_i$  параллельны и, следовательно, все указанные нормали компланарны.

Если многогранник  $P$  бесконечно подобно сжимать к какой-либо точке, то он перейдет в свой предельный угол  $V$ . При этом параллельные ребра сольются и ребра одного класса дадут на  $V$  одно ребро  $p$ . В этом ребре сойдутся грани угла  $V$ , соответствующие граням многогранника, прилегающим извне к крайним ребрам данного класса. Двугранный угол между ними будет тот же  $\alpha$ . Следовательно, «двугранный угол» класса ребер есть не что иное, как соответствующий двугранный угол предельного угла  $V$ . Угол  $V$  может вырождаться в плоский угол, если многогранник  $P$  имеет параллельные грани. Тогда  $V$  следует считать дважды покрытым и различать ребра на одной и на другой его стороне. (Мы не вдаемся в строгое обоснование этого замечания, потому что в дальнейшем достаточно иметь в виду формальное понятие двугранного угла класса бесконечных ребер.)

Если бесконечные многогранники  $P_1$  и  $P_2$  имеют одинаковое строение и соответственно равные плоские углы, то бесконечным ребрам многогранника  $P_1$ , входящим в один класс, отвечают на  $P_2$  также бесконечные ребра одного класса, и обратно. Классы ребер, а вместе с ними ребра предельных углов  $V_1$  и  $V_2$ , оказываются, таким образом, во взаимно однозначном соответствии.

Дополнительное условие, обеспечивающее равенство двугранных углов при равенстве плоских углов, можно сформулировать так:

*Двугранные углы при соответственных классах ребер, т. е. при соответственных ребрах предельных углов, должны быть равны<sup>14)</sup>.*

Если на многогранниках нет параллельных бесконечных ребер, то это условие сводится, конечно, к простому равенству двугранных углов при всех соответственных бесконечных ребрах.

**2.** Докажем теперь, что введенное условие действительно достаточно:

**Теорема 1.** *Если у двух бесконечных выпуклых многогранников одинакового строения соответственные плоские углы равны и двугранные углы при соответственных классах бесконечных ребер также равны, то и все соответственные двугранные углы этих многогранников равны.*

<sup>14)</sup> Углы на гранях предельного угла  $V$  определяются плоскими углами многогранника  $P$ : они равны углам между бесконечными ребрами соответствующих граней многогранника. Поэтому из равенства плоских углов многогранников  $P_1$  и  $P_2$  следует равенство плоских углов на гранях их предельных углов  $V_1$  и  $V_2$ . Тогда равенство двугранных углов у  $V_1$  и  $V_2$  приводит к равенству самих  $V_1$  и  $V_2$ . Вместе с тем, поскольку плоские углы у  $V_1$  и  $V_2$  — одни и те же, их двугранные углы не все независимы. Для равенства всех двугранных углов достаточно требовать равенства их всех, кроме трех соседних. (Это легко проверить, имея в виду выпуклость углов  $V_1$  и  $V_2$ .) Таким образом, поставленное условие можно ослабить; в частности, для трехгранных предельных углов оно вообще оказывается лишним. Поэтому, если у многогранников  $P_1$  и  $P_2$  имеются только три класса ребер, то для равенства всех двугранных углов достаточно одного равенства всех плоских углов.

Пусть многогранники  $P_1$  и  $P_2$  удовлетворяют условиям теоремы. При соединим к этим многогранникам несобственные вершины, считая ребра одного класса сходящимися в одной несобственной вершине. Эти вершины будем считать соседними, если они соответствуют классам ребер, оказывающимся соседними при обходе вокруг бесконечной части многогранника. Соседние несобственные вершины соединим несобственными ребрами. Отметим ребра знаками  $+$  или  $-$  в зависимости от знака разности двугранных углов; ребра с равными двугранными углами, а также несобственные ребра оставим неотмеченными. Вершины, к которым подходят отмеченные ребра, будем называть отмеченными.

Так же как в доказательстве теоремы 1 § 2, можно различать собственные вершины двух родов: настоящие и ненастоящие. Повторяя рассуждения, приведшие к доказательству упомянутой теоремы, можно исключить все ненастоящие вершины, при которых нет четырех перемен знаков, а также все «неотмеченные» вершины. После этого вокруг каждой из оставшихся собственных вершин будет не менее четырех перемен знаков. Несобственные вершины, оставшиеся неотмеченными, также можно исключить.

Покажем, что при «полуобходе» вокруг отмеченной несобственной вершины от одного несобственного ребра к другому имеется не менее одной перемены знака. Действительно, пусть  $\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_n^{(1)}$  — двугранные углы при тех ребрах, которые сходятся в такой вершине  $A_1$  на многограннике  $P_1$ , а  $\alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_n^{(2)}$  — соответственные двугранные углы многогранника  $P_2$ . По формуле (1) двугранные углы при классах этих ребер будут

$$\alpha^{(1)} = \pi - \sum (\pi - \alpha_i^{(1)}), \quad \alpha^{(2)} = \pi - \sum (\pi - \alpha_i^{(2)}).$$

Но по условию теоремы они равны  $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)}$ . Отсюда

$$\sum \alpha_i^{(1)} = \sum \alpha_i^{(2)} \quad \text{или} \quad \sum (\alpha_i^{(1)} - \alpha_i^{(2)}) = 0.$$

Следовательно, разности  $\alpha_i^{(1)} - \alpha_i^{(2)}$  либо все равны нулю, либо меняют знак не менее одного раза.

Возьмем теперь второй экземпляр  $P'_1$  многогранника  $P_1$ . На его ребрах поставим знаки, обратные знакам соответствующих ребер многогранника  $P_1$ . отождествив соответственные несобственные ребра и вершины многогранников  $P_1$  и  $P'_1$ , получим абстрактный «многогранник»  $P_1 + P'_1$ , гомеоморфный сфере. На нем вокруг всякой отмеченной собственной вершины имеется не менее четырех перемен знака, потому что так обстоит дело на многограннике  $P_1$ . Далее, при всякой несобственной отмеченной вершине многогранника  $P_1$  есть хотя бы одна переменна знака, а на  $P'_1$  знаки ребер обратные.

Поэтому при обходе вокруг несобственной вершины на «многограннике»  $P_1 + P'_1$  имеется также не менее четырех перемен знака: по одной при прохождении по  $P_1$  и  $P'_1$  и две при переходе от  $P_1$  к  $P'_1$ , и обратно.

Итак, вокруг всякой отмеченной вершины имеется не менее четырех перемен знака. Но согласно лемме Коши это невозможно, так что отмеченных вершин не должно быть вовсе. Нужно лишь проверить, что многогранник  $P_1 + P'_1$  действительно удовлетворяет условиям применимости этой леммы. Таких условий два: многогранник гомеоморфен сфере и никакие две его вершины  $A, B$  не соединены двумя ребрами. Первое условие выполнено. Второе условие, очевидно, выполнено, если вершины  $A, B$  обе собственные или обе несобственные. Если же  $A$  собственная, а  $B$  несобственная, то ребро  $AB$  есть бесконечное ребро многогранника  $P_1$  (или  $P'_1$ ) и в вершине  $B$  могут сходиться только ребра того же класса. Однако все они параллельны, а потому из одной вершины  $A$  в одну и ту же несобственную вершину не могут исходить два разных ребра.

Следовательно, лемма Коши применима и теорема доказана.

**3.** Обратимся теперь к условию равенства изометричных бесконечных многогранников с кривизной  $< 2\pi$ . Оно совершенно аналогично условию теоремы 1. (Заметим, что, как будет показано в § 2 главы V, всякий бесконечный многогранник с кривизной  $< 2\pi$  допускает непрерывное изгибание, так что дополнительное условие для равенства таких изометричных многогранников всегда необходимо.)

Пусть  $P_1$  — бесконечный выпуклый многогранник и  $\varphi$  — его изометрическое отображение на выпуклый многогранник  $P_2$ . Если отобразить  $P_1$  на  $P_2$  и обратно, то образы (настоящих) граней многогранника  $P_1$  разобьют (настоящие) грани многогранника  $P_2$ , и обратно. В результате согласно лемме 4 § 3 многогранники  $P_1$  и  $P_2$  окажутся одинаково составленными из равных новых граней. В частности, их бесконечные (новые) грани, а следовательно, и бесконечные (новые)<sup>15)</sup> ребра окажутся поставленными в попарное соответствие. Из равенства соответственных граней ясно, что граням с параллельными ребрами будут отвечать грани с параллельными же ребрами. Поэтому каждому классу параллельных друг другу ребер на  $P_1$  будет отвечать класс параллельных друг другу ребер на  $P_2$ . Напомним, что двугранным углом при классе таких ребер мы называем угол между гранями, прилегающими извне к крайним ребрам класса (как грани  $Q$  и  $R$  рис. 84).

Дополнительное условие, о котором идет речь, состоит в следующем: *двугранные углы при соответствующих классах бесконечных (новых) ребер многогранников  $P_1$  и  $P_2$  должны быть равны.*

<sup>15)</sup> Конечно, среди новых граней могут быть и старые, если они не разбиваются на части. Однако среди бесконечных ребер всегда имеются, если не сами старые, то их бесконечные части.

В частности, если на многогранниках  $P_1$  и  $P_2$  вовсе нет параллельных ребер, то условие сводится к тому, что изометрическое отображение должно переводить бесконечные ребра многогранника  $P_1$  в бесконечные ребра многогранника  $P_2$  и двугранные углы при соответственных бесконечных ребрах должны быть равны.

Дальше мы дадим указанному условию другую, более наглядную форму, а сейчас докажем его достаточность:

**Теорема 2.** *Если имеется такое изометрическое отображение одного бесконечного выпуклого многогранника на другой, что двугранные углы при соответственных классах бесконечных (новых) ребер оказываются равными, то это отображение можно осуществить движением или движением и отражением.*

По лемме 4 § 3 изометрическое отображение одного многогранника на другой приводит к тому, что многогранники оказываются одинаково составленными из равных новых граней. В частности, углы на новых гранях соответственно равны, а тогда ввиду равенства двугранных углов при соответственных классах новых ребер можно воспользоваться теоремой 1, в силу которой все двугранные углы при соответственных ребрах оказываются равными. Поэтому на основании леммы 5 § 3 заключаем, что данное изометрическое отображение можно осуществить движением или движением и отражением.

4. Теперь придадим условию теоремы 2 другую форму, для чего рассмотрим предельные углы  $V(P_1)$  и  $V(P_2)$  изометричных многогранников  $P_1$  и  $P_2$ . Каждому классу ребер многогранника  $P_i$  отвечает параллельное ребро  $p$  угла  $V(P_i)$ , в которое переходят все ребра данного класса при бесконечном подобном сжатии многогранника в предельный угол. Грани, прилегающие извне к крайним ребрам данного класса, переходят при этом в грани предельного угла, сходящиеся в ребре  $p$ , так что двугранные углы между теми и другими гранями соответственно равны. Поэтому условие теоремы 2 означает, что *двугранные углы при соответственных ребрах предельных углов  $V(P_1)$  и  $V(P_2)$  должны быть равны.*

Нужно, конечно, иметь в виду, что новому ребру многогранника  $P_i$ , проходящему по его бесконечной грани, отвечает не настоящее ребро угла  $V(P_i)$ , а его образующая, проходящая по его соответствующей грани. Однако при условии равенства двугранных углов каждому настоящему ребру угла  $V(P_1)$  отвечает настоящее ребро угла  $V(P_2)$ , и обратно. При ненастоящих же ребрах двугранные углы всегда равны  $\pi$ . Поэтому *достаточно рассматривать только настоящие ребра предельных углов  $V(P_1)$  и  $V(P_2)$ .*

В настоящем ребре угла  $V(P_i)$  сходятся его грани, соответствующие граням многогранника  $P_i$ , у которых бесконечные ребра не параллельны. Поэтому *условие о равенстве двугранных углов при таких ребрах сводится*

просто к тому, что грани многогранников  $P_i$  с непараллельными бесконечными ребрами должны соответствовать друг другу и образовывать равные двугранные углы. Соответствие граней устанавливается данным изометрическим отображением  $\varphi$ : бесконечная грань  $Q_2$  с непараллельными ребрами на  $P_2$  отвечает грани  $Q_1$  на  $P_1$ , если образ грани  $Q_1$  покрывает, хотя бы и не целиком, грань  $Q_2$ . Неполное покрытие грани  $Q_2$  образом грани  $Q_1$  может происходить от того, что часть  $Q_2$  может априори соответствовать грани  $Q'_1$ , прилегающей к  $Q_1$  и имеющей параллельные бесконечные ребра. Впрочем, поскольку в силу теоремы 2 многогранники оказываются просто равными, на самом деле такое частичное покрытие не может иметь места.

5. Придадим условию теоремы 2 еще новую форму, в которой оно будет фигурировать дальше, в главе IV. Для этого сначала введем некоторые определения.

Пусть  $P$  — бесконечный выпуклый многогранник. Будем называть лучом на  $P$  бесконечную в одну сторону линию, лежащую на многограннике  $P$  и являющуюся кратчайшей на всяком своем конечном отрезке.

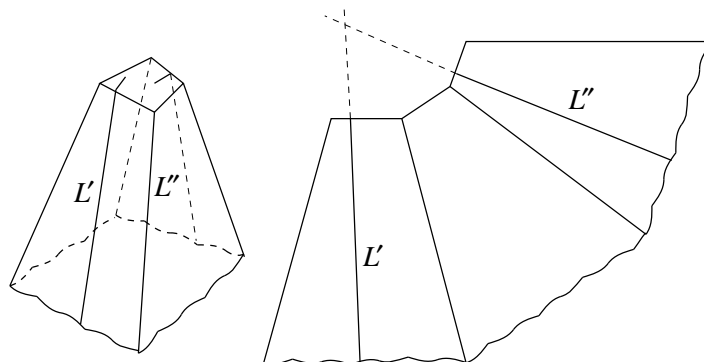


Рис. 85

Эти линии уже рассматривались в § 3 и там в лемме 2 было доказано, что каждая такая линия, начиная с некоторой точки, сводится к полупрямой, лежащей на одной из бесконечных граней многогранника  $P$ . Пусть  $L'$  и  $L''$  — два луча на многограннике  $P$ . Зададим на  $P$  направление обхода. Будем разворачивать бесконечные грани многогранника на плоскость, последовательно прикладывая их друг к другу, в порядке обхода многогранника, начиная от грани, на которой лежит луч  $L'$  (или по крайней мере его бесконечная часть). Тогда лучи  $L'$  и  $L''$  дадут на плоскости две полупрямые (рис. 85). Угол между этими полупрямыми, отсчитываемый от  $L'$  к  $L''$  в указанном направлении обхода, мы назовем углом между лучами  $L'$

и  $L''$  (точнее, это будет угол от  $L'$  до  $L''$  в данном направлении обхода; при другом же направлении обхода угол будет другим).

Очевидно, понятия луча и угла между лучами принадлежат внутренней геометрии многогранника. Поэтому при изометрическом отображении одного многогранника на другой лучи переходят в лучи и углы между лучами сохраняются.

Докажем теперь следующую лемму:

**Лемма 1.** Пусть  $P$  — бесконечный выпуклый многогранник,  $V(P)$  — его предельный угол.

1) При бесконечном подобном сжатии многогранника  $P$  в угол  $V(P)$  каждый луч  $L$  на многограннике  $P$  переходит в образующую угла  $V(P)$  (т. е. в полупрямую, лежащую на угле  $V(P)$  и исходящую из его вершины). Эту образующую мы называем предельной образующей луча  $L$ .

2) Как всякому лучу отвечает предельная образующая, так и обратно, всякая образующая является предельной для какого-либо луча (и для всех параллельных друг другу лучей).

3) Угол между лучами равен углу между их предельными образующими.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Луч  $L$ , начиная с некоторой точки, представляет полупрямую, лежащую на одной бесконечной грани многогранника  $P$ . При бесконечном подобном сжатии к вершине угла  $V(P)$  любая конечная часть многогранника сходится к вершине угла  $V(P)$ , а всякая полупрямая сходится к параллельной ей полупрямой, исходящей из вершины. Поэтому и луч  $L$  сходится к такой полупрямой, чем доказано первое утверждение леммы.

Каждой грани угла  $V(P)$  отвечает параллельная ей бесконечная грань многогранника  $P$ , и всякой полупрямой, лежащей на одной грани, можно сопоставить параллельную полупрямую на другой. Поэтому каждой образующей  $v$  угла  $V(P)$  можно сопоставить параллельную полупрямую  $L$  на многограннике  $P$ . Очевидно, что  $v$  будет предельной образующей для  $L$ . Этим доказано второе утверждение леммы — об обратном соответствии образующих и лучей.

Пусть, наконец,  $L'$  и  $L''$  — два луча на многограннике  $P$ . Если развернуть бесконечные грани многогранника  $P$  на плоскость и сжимать их к одной точке, то каждая грань перейдет в угол, соответствующий грани предельного угла. Вместе с тем лучи  $L'$  и  $L''$  перейдут в их предельные образующие, но угол между ними, очевидно, не изменится. Таким образом, углы между лучами равны углам между их предельными образующими, причем эти углы измеряются на самом угле  $V$  (или, что то же самое, — в его развертке) при том условии, что обход, указанный на многограннике, переносится на предельный угол  $V$ .

Лемма 1 доказана.

Отсюда легко выводится следующее предложение:

**Лемма 2.** *Всякому изометрическому отображению одного бесконечного многогранника  $P_1$  на другой  $P_2$ , отвечает вполне определенное изометрическое отображение предельного угла  $V(P_1)$  на предельный угол  $V(P_2)$ .*

Действительно, при изометрическом отображении лучи переходят в лучи и углы между лучами сохраняются. Вместе с тем по лемме 1 лучам на многогранниках  $P_1$  и  $P_2$  отвечают их предельные образующие на углах  $V(P_1)$  и  $V(P_2)$ . При этом углы между образующими равны углам между соответствующими лучами. Таким образом, если мы сопоставим друг другу те образующие углов  $V(P_1)$  и  $V(P_2)$ , которые отвечают соответственным по изометрии лучам на самих многогранниках, то такое соответствие образующих будет сохранять углы между ними. Отсюда очевидно, что указанное соответствие образующих дает изометрическое отображение одного предельного угла на другой.

Лемма 2 доказана.

Опираясь на последний результат, теорему 2 можно сформулировать существенно по-новому:

**Теорема 3.** *Для того чтобы изометрическое отображение одного бесконечного выпуклого многогранника  $P_1$  на другой  $P_2$  можно было осуществить движением или движением и отражением, необходимо и достаточно, чтобы вызванное отображением  $\varphi$  изометрическое отображение предельного угла  $V(P_1)$  на  $V(P_2)$  осуществлялось движением или движением и отражением.*

Необходимость условия очевидна, потому что предельный угол  $V(P_1)$  можно твердо связать с многогранником  $P_1$ , и тогда при движении, совмещающем  $P_1$  с  $P_2$ , угол  $V(P_1)$  станет предельным углом для  $P_2$ .

Для доказательства достаточности заметим, что каждому бесконечному ребру многогранника  $P_i$  отвечает параллельное ребро его предельного угла  $V(P_i)$ . Из определения изометрического соответствия углов  $V(P_1)$  и  $V(P_2)$  ясно, что их соответственные ребра или вообще образующие отвечают соответственным (может быть, новым) ребрам многогранников  $P_1$  и  $P_2$ . Так как углы  $V(P_1)$  и  $V(P_2)$  совмещаются движением, то их двугранные углы при соответственных ребрах равны. Как уже отмечалось, эти двугранные углы равны двугранным углам при классах ребер многогранников  $P_1$  и  $P_2$ . Поэтому условие теоремы 2 оказывается выполненным и отображение  $\varphi$  можно осуществить движением или движением и отражением<sup>16)</sup>. Для наглядности можно поместить вершины углов  $V(P_1)$  и  $V(P_2)$  в соответственных верши-

<sup>16)</sup> Если совмещение углов  $V(P_1)$  и  $V(P_2)$  происходит без отражения, то так же происходит и совмещение многогранников  $P_1$  и  $P_2$ , потому что отражение многогранника вызывает отражение его предельного угла. Единственное исключение могут представлять многогранники, предельные углы которых вырождаются в плоские. Отражение такого угла в его плоскости не только совмещает его с самим собой, но и вовсе не переставляет его ребер.



нах многогранников и перенести  $P_1$  так, чтобы  $V(P_1)$  совпал с  $V(P_2)$ ; тогда и сам многогранник  $P_1$  совпадет с многогранником  $P_2$ .

Стоит заметить, что теореме 3 нельзя придать следующую простую форму: два изометричных многогранника  $P_1$  и  $P_2$  равны, если равны их предельные углы. Такое утверждение будет попросту неверным.

Действительно, в § 2 главы V будет доказано, что любой бесконечный выпуклый многогранник можно непрерывно изгибать так, что его предельный угол будет только поворачиваться, но вовсе не будет деформироваться. При таком изгибании получаем многогранники, изометричные исходному и имеющие те же предельные углы, но не равные ему. Единственное исключение представляют многогранники, сводящиеся к многогранным углам, потому что они совпадают со своими предельными углами.

Из этого замечания ясно, что наши постоянные оговорки о том, что речь идет об элементах многогранников и предельных углов, соответствующих друг другу именно в силу данного изометрического отображения, ни в какой мере не являются лишними.

**6.** В заключение укажем коротко еще один вид условия теоремы 2, основанный на рассмотрении сферических изображений изометричных многогранников.

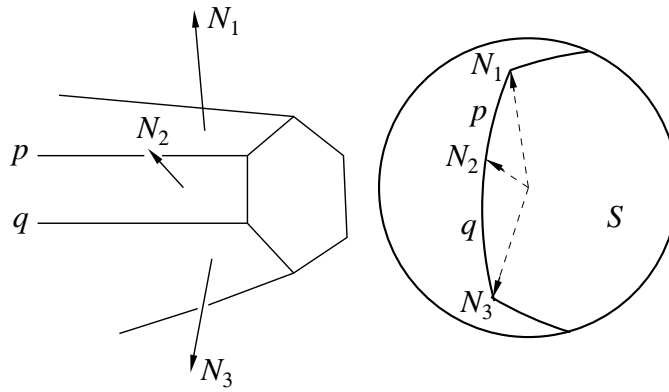


Рис. 86

Сферическое изображение бесконечного выпуклого многогранника есть выпуклый сферический многоугольник. Граница этого многоугольника  $S$  образована сферическими изображениями бесконечных ребер. Сферические изображения параллельных ребер представляют собой дуги одного и того же большого круга и потому образуют одну сторону многоугольника  $S$  (рис. 86). Вершины многоугольника  $S$  являются сферическими изображениями граней с непараллельными ребрами. Все это становится совершенно

ясным, если вспомнить, что сферическое изображение многогранника совпадает со сферическим изображением его предельного угла. Длина стороны многоугольника  $S$  измеряет угол между нормальными к смежным граням предельного угла, т. е. угол между нормальными к соответствующим граням многогранника. Но угол между нормальными равен дополнению двугранного угла до  $\pi$ . Поэтому стороны многоугольника  $S$  определяют также двугранные углы между гранями.

Изометрическое отображение  $\varphi$  многогранника  $P_1$  на  $P_2$  естественно порождает соответствие  $\psi$  сферических изображений этих многогранников: сферическому изображению точки  $X_1$  многогранника  $P_1$  ставится в соответствие сферическое изображение точки  $\varphi(X_1)$  многогранника  $P_2$ . Так как сферическое изображение точки может не быть одной точкой, то это соответствие может быть неоднозначным в обе стороны. Однако оно сохраняет площади, поскольку площадь сферического изображения при изометрическом преобразовании многогранника не меняется.

Так как длины сторон многоугольников  $S_1$  и  $S_2$ , представляющих сферические изображения многогранников  $P_1$  и  $P_2$ , определяются двугранными углами между гранями с непараллельными бесконечными ребрами, то условие теоремы 2 сводится к тому, что *многоугольники  $S_1$  и  $S_2$  должны иметь соответственно равные стороны*. При этом соответствие сторон определено изометрическим отображением  $P_1$  на  $P_2$  так, как это только что указано.

Сферическое изображение  $S$  многогранного угла  $V$  полностью определяет этот угол (ребра угла  $V$  перпендикулярны к граням угла  $S'$ , проектирующего  $S$  из центра сферы, и обратно: ребра угла  $S'$  перпендикулярны к граням угла  $V$ ). Поэтому равенство предельных углов эквивалентно равенству сферических изображений многогранников, и теореме 3 можно придать следующий вид:

**Теорема 4.** Пусть дано изометрическое отображение  $\varphi$  одного бесконечно выпуклого многогранника  $P_1$  на другой  $P_2$ . Оно определяет преобразование  $\psi$  границы сферического изображения  $S_1$  многогранника  $P_1$  в границу сферического изображения  $S_2$  многогранника  $P_2$ . Отображение  $\varphi$  осуществляется движением тогда и только тогда, когда отображение  $\psi$  осуществляется движением.

### § 5. Многогранники, имеющие границу<sup>17)</sup>

1. Прежде всего отметим некоторые интересные следствия, которые можно извлечь из теорем § 3 и 4, для выпуклых многогранников, имеющих границу. Каждый такой многогранник по самому определению есть часть замкнутого или бесконечного выпуклого многогранника. Поэтому, в частности,

<sup>17)</sup> См. также главу V. — Прим. В. А. Залгаллера.

его полная кривизна не может быть больше  $4\pi$ , а если он бесконечный, то она не может превосходить и  $2\pi$ . Однако полную кривизну  $4\pi$  может иметь и не только замкнутый выпуклый многогранник. Действительно, полная кривизна есть сумма кривизн вершин, а потому, вырезая из замкнутого выпуклого многогранника любую его часть, не содержащую вершин ни внутри, ни на границе, получим выпуклый многогранник с той же полной кривизной  $4\pi$ . Нужно только, чтобы оставшаяся часть многогранника была связной, иначе она не считается многогранником по самому его определению. Оказывается, что как бы велика ни была вырезанная часть многогранника, не содержащая вершин, оставшаяся часть многогранника все-таки будет неизгибаемой с сохранением выпуклости! А именно имеет место

**Теорема 1.** *Если полная кривизна выпуклого многогранника  $P_1$  равна  $4\pi$ , то всякое его изометрическое отображение  $\varphi$  на выпуклый же многогранник  $P_2$  осуществляется движением или движением и отражением.*

**Доказательство.** Построив выпуклую оболочку многогранника  $P_1$  и взяв ее поверхность, получим замкнутый выпуклый многогранник  $\bar{P}_1$ . К многограннику  $P_1$  добавляется фигура  $\bar{P}_1 \setminus P_1$ , могущая состоять из отдельных кусков. Так как полная кривизна многогранника  $P_1$  равна  $4\pi$ , то добавленная к нему часть  $\bar{P}_1 \setminus P_1$  уже не может содержать вершин и, следовательно, каждый ее связный кусок можно развернуть на плоскость. Для доказательства (см. п° 3 § 8 главы I) достаточно последовательно разворачивать на плоскость части граней, попавшие в каждую связную часть фигуры  $\bar{P}_1 \setminus P_1$  (рис. 87).

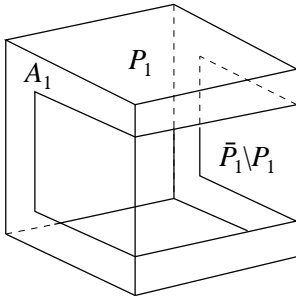


Рис. 87

Так как многогранник  $P_2$  изометричен  $P_1$ , то он имеет такую же полную кривизну  $4\pi$ , а потому к нему применимы те же рассуждения. Мы дополняем его до замкнутого многогранника  $\bar{P}_2$ , причем каждая связная часть фигуры  $\bar{P}_2 \setminus P_2$  может быть развернута на плоскость.

Изометрическое отображение  $\varphi$  многогранника  $P_1$  на  $P_2$  устанавливает определенное изометрическое соответствие их границ. А это определяет изометрическое соответствие границ фигур  $\bar{P}_1 \setminus P_1$  и  $\bar{P}_2 \setminus P_2$ , т. е. соответственные их отрезки имеют равные длины.

Покажем, что и углы на границах этих фигур соответственно равны, если, конечно, измерять углы не в пространстве, а на многогранниках, или, что то же самое, в развернутых фигурах  $\bar{P}_1 \setminus P_1$ ,  $\bar{P}_2 \setminus P_2$ .

Рассмотрим какую-либо пару соответственных точек  $A_1, A_2$  на границах многогранников  $P_1$  и  $P_2$ . На многогранниках  $\bar{P}_1$  и  $\bar{P}_2$  ни одна из этих точек не может быть вершиной, потому что иначе при переходе от  $P_1$  к  $\bar{P}_1$  (или от  $P_2$  к  $\bar{P}_2$ ) к кривизне  $P_1$  добавлялась бы кривизна вершины  $A_1$ , и полная

кривизна многогранника  $\overline{P}_1$  оказывалась бы больше  $4\pi$ . Но если точка на многограннике не есть вершина, то полный угол вокруг нее равен  $2\pi$ . Полные углы вокруг точек  $A_1$  и  $A_2$  на многогранниках  $\overline{P}_1$  и  $\overline{P}_2$  слагаются из углов на многогранниках  $P_1$  и  $P_2$  и углов на дополнениях  $\overline{P}_1 \setminus P_1$  и  $\overline{P}_2 \setminus P_2$ . Углы на многогранниках  $P_1$  и  $P_2$  равны по изометрии. Следовательно, равны также углы на  $\overline{P}_1 \setminus P_1$  и  $\overline{P}_2 \setminus P_2$ .

Итак, фигуры  $\overline{P}_1 \setminus P_1$  и  $\overline{P}_2 \setminus P_2$  состоят из кусков, разворачиваемых на плоскость и имеющих соответственно равные стороны и равные углы. Поэтому они изометричны, а так как  $P_1$  и  $P_2$  тоже изометричны, то и замкнутые многогранники  $\overline{P}_1$  и  $\overline{P}_2$  изометричны. По теореме 1 §3 их изометрия осуществляется движением или движением и отражением, причем совпадают их элементы, соответствие которых установлено изометрией между  $P_1$  и  $P_2$  и вместе с ней между  $\overline{P}_1 \setminus P_1$  и  $\overline{P}_2 \setminus P_2$ . Следовательно, и изометрия между  $P_1$  и  $P_2$  оказывается осуществленной движением или движением и отражением.

Совершенно так же, используя теорему 2 §3, можно доказать следующую теорему.

**Теорема 2.** *Если полная кривизна бесконечного многогранника, имеющего границу, равна  $2\pi$ , то всякое его изометрическое отображение на выпуклый же многогранник можно осуществить движением или движением и отражением.*

Наконец, из теоремы о равенстве изометричных замкнутых выпуклых многогранников вытекает еще такой результат:

**Теорема 3.** *Назовем многогранной шапочкой выпуклый многогранник, имеющий плоский край и такой, что его ортогональная проекция на плоскость края однозначна (т. е. всякая прямая, перпендикулярная к этой плоскости, пересекает многогранник лишь в одной точке или только касается его). Оказывается, что изометричные многогранные шапочки равны; изометрическое отображение одной из них на другую осуществляется движением или движением и отражением.*

Для доказательства приложим к краям данных шапочек шапочки, им симметричные. Тогда получатся замкнутые выпуклые многогранники, и если шапочки были изометричны, то и эти многогранники будут изометричными. Применяя теперь теорему 1 §3 о замкнутых многогранниках, получаем теорему 3.

2. Теперь установим некоторое общее условие равенства изометричных многогранников, имеющих границу, не зависящее от их полной кривизны.

**Теорема 4.** *Если у двух выпуклых многогранников, ограниченных каждый одной замкнутой ломаной и имеющих одинаковое строение, соответственные углы на соответственных гранях равны и, кроме того, равны также углы между граничными ребрами при всех соответственных граничных*

вершинах, то соответственные двугранные углы этих многогранников также оказываются равными.

Здесь так же, как в теоремах § 2, допускается существование ненастоящих вершин и ребер, так что и «границы» могут быть лишь кусками истинных граней.

Из этой теоремы совершенно так же, как и раньше, используя лемму 4 § 3, можно вывести:

**Теорема 5.** *Если имеется изометрическое отображение выпуклого многогранника, ограниченного одной замкнутой ломаной, на другой выпуклый многогранник и если это отображение сохраняет углы между граничными ребрами при всех граничных вершинах, то такое отображение можно осуществить движением или движением и отражением.*

Достаточно доказать теорему 4.

Пусть  $P_1$  и  $P_2$  — два многогранника, удовлетворяющие условиям этой теоремы. Расставляем на ребрах многогранника  $P_1$  знаки согласно неоднократно применявшемуся условию. Граничные ребра остаются, конечно, неотмеченными.

Так же как в доказательстве теоремы 1 § 2, исключаем ненастоящие вершины, где нет перемен знаков, а также все вообще неотмеченные вершины. При каждой из оставшихся внутренних вершин будет не менее четырех перемен знака.

Пусть  $A_1$  и  $A_2$  — соответственные граничные вершины многогранников  $P_1$  и  $P_2$ . Натянем на сходящиеся в них граничные ребра  $a_1, b_1$  и  $a_2, b_2$  плоские углы. В силу выпуклости многогранников мы получим при вершинах  $A_1$  и  $A_2$  выпуклые многогранные углы. Соответственные плоские углы их равны в силу условий теоремы. Сравнивая их двугранные углы, расставим вокруг вершины  $A_1$  плюсы и минусы согласно нашему правилу. Тогда по лемме 2а § 1 вокруг этой вершины  $A_1$  должно быть не менее четырех перемен знака, если только вершина  $A_1$  — отмеченная. Однако, расставляя знаки на многограннике  $P_1$ , мы вовсе не отмечаем граничных ребер  $a_1, b_1$ . Исключение знаков этих ребер уменьшает число перемен знака не более чем на два. Поэтому при «полуобходе» вершины  $A_1$  на многограннике  $P_1$  от ребра  $a_1$  к ребру  $b_1$  должна иметься хотя бы одна перемен знака.

Возьмем теперь второй экземпляр  $P'_1$  многогранника  $P_1$ . Расставим на его ребрах знаки, обратные знакам соответствующих ребер многогранника  $P_1$ . Отождествив соответственные граничные ребра и вершины многогранников  $P_1$  и  $P'_1$ , получим абстрактный «многогранник»  $P_1 + P'_1$ , гомеоморфный сфере. Вокруг каждой из отмеченных вершин этого многогранника будет не менее четырех перемен знака.

Итак, на ребрах многогранника  $P_1 + P'_1$  расставлены знаки  $+$  и  $-$  так, что вокруг всех отмеченных вершин число перемен знаков не меньше четырех.

Но согласно лемме Коши это невозможно. Следовательно, на многограннике  $P_1$  вовсе не должно быть отмеченных ребер, и теорема 4 доказана<sup>18)</sup>.

В теоремах 4 и 5 предполагается, что многогранники ограничены каждой одной замкнутой ломаной, т. е. гомеоморфны кругу. Если это не так, то наше рассуждение неприменимо. В связи с этим можно поставить задачу: обобщить теоремы 4 и 5 на выпуклые многогранники другой топологической структуры.

**3.** Как было отмечено еще в п<sup>о</sup> 6 §1 главы I, рассмотрение бесконечных выпуклых многогранников эквивалентно рассмотрению конечных многогранников с границей, обладающих тем свойством, что их крайние грани допускают безграничные продолжения без появления у них новых пересечений. Необходимые и достаточные условия этого были указаны там же. В связи с этим теоремы о бесконечных многогранниках, доказанные в §2–4, автоматически переносятся на соответствующие многогранники с границей.

Кроме того, и для бесконечных выпуклых многогранников, но уже не полных, а ограниченных каждой одной бесконечной ломаной с конечным числом сторон, имеют место теоремы, аналогичные полученным здесь теоремам 3–5. Однако если бесконечные ребра не параллельны, то необходимо еще ввести условие о двугранных углах между бесконечными гранями, совершенно так же, как в теоремах 1 и 2 §4. Формулировки и доказательства теорем для бесконечных многогранников с границей мы оставляем читателю.

## § 6. ОБОБЩЕНИЯ

1. Обобщение теорем, доказанных в этой главе, возможно в ряде направлений:

1) исследование изометрических отображений выпуклых многогранников не обязательно на многогранники, но на любые выпуклые поверхности;

<sup>18)</sup>Эта теорема может быть несколько обобщена в двух отношениях. Во-первых, вместо многогранников, выпуклых в целом, можно иметь в виду многогранники только локально выпуклые, т. е. такие, что их многогранные углы выпуклы как при внутренних, так и при граничных вершинах (если углы при граничных вершинах еще дополнить плоскими углами между граничными ребрами). Во-вторых, достаточно требовать, чтобы условие о равенстве углов между граничными ребрами выполнялось для всех граничных вершин, *кроме, может быть, трех*. Такое усиление результата легко получается применением леммы Коши в ее уточненной формулировке. Оно имеет определенный смысл. Именно, пользуясь теоремой Эйлера, легко подсчитать, что если  $E$ ,  $E'$ ,  $K$  суть числа всех вершин, граничных вершин и всех ребер, то  $3E - 3 = K + E'$ . Но многогранник с точностью до движения определяется  $3E - 6$  переменными ( $3E$  координат вершин минус 6 параметров, определяющих положение в пространстве). Развертка же задается  $K$  ребрами. А так как  $3E - 6 = K + E' - 3$ , то для задания многогранника нужно еще не  $E'$ , а  $E' - 3$  параметра, т. е. нужно задавать углы не при всех  $E'$  граничных вершинах, а лишь при  $E' - 3$  из них.

- 2) исследование изометрических отображений одних выпуклых поверхностей на другие;
- 3) перенесение полученных теорем в неевклидовы пространства: Лобачевского и сферическое;
- 4) обобщения на пространства более чем трехмерные.

Во всех этих случаях мы сохраняем требование выпуклости. Сняв его, мы получили бы уже вовсе необозримое поле задач. Хотелось бы, однако, упомянуть одну из них, которая представляется нам самой интересной из всех задач об изгибании:

*Существуют ли замкнутые многогранники, допускающие непрерывные изгибания без переламывания граней или никакой замкнутый многогранник не допускает таких непрерывных изгибаний*<sup>19)</sup>? (Все известные ранее примеры изгибаемых многогранников не реальны: эти многогранники имеют самопересечения и, следовательно, будучи изготовлены, не будут все же изгибаться.)

Дальше, в п<sup>о</sup> 2–5, мы последовательно рассмотрим обобщения теорем этой главы в четырех указанных здесь направлениях.

<sup>19)</sup> В этом вопросе достигнуты существенные продвижения, суть которых такова.

А. Д. Александровым и С. М. Владимировой [41] (а позже другими в [150, 299, 319, 370–376]) построены многогранники, имеющие две разные формы, при том, что их грани изометричны, а соответственные двугранные углы одновременно больше (или меньше)  $\pi$ .

Непрерывно изгибаемые самопересекающиеся октаэдры в трехмерном евклидовом пространстве были открыты Р. Брикаром [251] еще в 1897 г., но затем забыты на многие годы. Некоторые из октаэдров Брикара в 1976 г. переоткрыл Р. Коннелли [258], которому к тому же удалось избавиться от самопересечений. Многогранник Коннелли содержал 18 вершин [109, 305]. Более поздние примеры с меньшим числом вершин [140, 199, 260] стали иметь лишь исторический интерес после 1980 г., когда К. Штеффен предложил элегантный изгибаемый многогранник без самопересечений всего с девятью вершинами, описанный, например, в [50], [65, с. 516–517], [199]. Результаты И. Г. Максимова [134] позволяют надеяться, что многогранник Штеффена имеет минимальное количество вершин.

Р. Александром [231] доказано, что всякий ориентированный изгибаемый многогранник в  $n$ -мерном евклидовом пространстве сохраняет интегральную кривизну в процессе изгибания. Позже это свойство было передоказано во многих работах и была выяснена его связь с дифференциальной формулой Шлефли [238, 295, 296, 342, 347, 355].

И. Х. Сабитовым [195–198, 335] установлено, что в процессе изгибания всякий замкнутый ориентированный изгибаемый многогранник в трехмерном евклидовом пространстве сохраняет свой ориентированный объем. Другое доказательство этой теоремы дано в [266], см. также обзор [340]. В сферическом пространстве объем не обязательно сохраняется [234]. Не известно сохраняется ли объем изгибаемого многогранника в трехмерном пространстве Лобачевского или в  $n$ -мерном евклидовом пространстве при  $n \geq 4$ .

Х. Штахелем изучены изгибаемые октаэдры в четырехмерном евклидовом пространстве [349] и трехмерном пространстве Лобачевского [351], но само существование изгибаемых многогранников в пространствах размерности  $> 4$  остается открытым вопросом.

Отметим еще, что имеются результаты об алгоритмах для распознавания изгибаемых многогранников [190, 194, 200, 236] и о строении конфигурационного пространства многогранников с данной разверткой, т. е. о топологическом строении множества изометричных многогранников [72, 152, 153, 189, 300].

Наконец, естественно возникает вопрос о нахождении классов невыпуклых многогранников, в которых все многогранники неизгибаемы. Некоторые продвижения в этом вопросе читатель найдет в [191, 257]. — *Прим. ред.*

2. Вопрос об изометрических отображениях замкнутых и бесконечных выпуклых многогранников на любые выпуклые поверхности был впервые полностью решен С. П. Оловянишниковым [156, 157]. Из его работ можно вывести следующие результаты:

1. Если дано изометрическое отображение конечного выпуклого многогранника  $P$  с полной кривизной  $4\pi$  на выпуклую поверхность  $F$ , то это отображение сводится к движению или движению и отражению, так что  $F$  сама неизбежно есть многогранник, равный  $P$ .

2. Если дано изометрическое отображение бесконечного выпуклого многогранника  $P$  с полной кривизной  $2\pi$  на выпуклую поверхность  $F$ , то это отображение сводится к движению или движению и отражению, так что  $F$  неизбежно оказывается многогранником, равным  $P$ .

3. Пусть  $P$  — бесконечный выпуклый многогранник с кривизной  $< 2\pi$ ,  $V(P)$  — его предельный угол,  $F$  — бесконечная выпуклая поверхность, а  $V(F)$  — ее предельный конус (т. е. результат бесконечного сжатия  $F$  к одной точке). Изометрическое отображение  $\varphi$   $P$  на  $F$  индуцирует изометрическое отображение  $\psi$   $V(P)$  на  $V(F)$ . Отображение  $\varphi$  сводится к движению или движению и отражению тогда и только тогда, когда к нему сводится отображение  $\psi$ .

4. Теорема 3 § 5 о многогранных шапочках также обобщается:

Выпуклая поверхность, имеющая плоский край и изометричная многогранной шапочке, сама есть равная ей многогранная шапочка<sup>20)</sup>.

Доказательства этих теорем состоят из двух частей: во-первых, доказывается, что поверхность  $F$ , изометричная многограннику  $P$ , сама есть многогранник, если выполнены поставленные условия; после этого остается сослаться на уже доказанные теоремы об отображении многогранника на многогранник. Первая часть доказательства основана на том, что при изометрическом отображении грани многогранника переходят в некоторые развертывающиеся поверхности так, что опорные плоскости к ним неизбежно проходят через точки, соответствующие вершинам многогранника<sup>21)</sup>. После этого уже сравнительно легко доказать, что при соответствующих условиях поверхность  $F$  оказывается многогранником.

3. Вопрос о неизгибаемости замкнутых выпуклых поверхностей имеет большую историю. Еще в 1838 г. Ф. Миндинг высказал предположение о неизгибаемости сферы. В 1854 г. Джелет опубликовал ошибочное доказательство этой гипотезы, и только в 1899 г. она была доказана независимо Г. Либманом и Г. Минковским в той форме, что достаточно регулярная (у Г. Минковского — дважды непрерывно дифференцируемая) поверхность, изометричная сфере, сама есть равная ей сфера. Другое доказательство дал Д. Гильберт в 1901 г. Затем вопросом о неизгибаемости замкнутых выпуклых поверхностей занимались Г. Либман, Г. Вейль, В. Бляшке, но лишь для бесконечно малых изгибаний. Наконец, в 1927 г. С. Э. Кон-Фоссен доказал, что вообще всякие две изо-

<sup>20)</sup> Ю. А. Волковым в 1967 г. получен исключительно сильный результат [88]: дана оценка малости изменения внешних размеров многогранной шапочки через малость изменения ее внутренней метрики. Это дает также независимое доказательство сформулированного утверждения. — Прим. В. А. Залгаллера.

<sup>21)</sup> Иначе площадь сферического изображения поверхности, в которую переходят грани с исключенными вершинами, была бы, как легко видеть, положительной. Между тем при всяком изометрическом отображении одной выпуклой поверхности на другую площадь сферического изображения сохраняется. Этот общий результат получен в моей книге [18, гл. V]. С. П. Оловянишников обходится без него, прямо доказывая указанное утверждение об опорных плоскостях. Вывод этот довольно труден.



метричные аналитические замкнутые выпуклые поверхности со всюду положительной кривизной равны. Позже ему удалось ослабить требование аналитичности до трехкратной непрерывной дифференцируемости. Метод Кон-Фоссена аналогичен методу Коши. В 1943 г. Г. Герглотц дал новое очень простое доказательство той же теоремы, сняв, между прочим, условие, что кривизна всюду существенно положительна (см. [104] и [126]).

Все эти результаты имеют один общий недостаток. Требуется, чтобы как данная поверхность, так и ей изометричная были достаточно регулярными с точки зрения их пространственной формы, а не только в смысле внутренней метрики. Поэтому ни один из них не позволяет утверждать даже того, что всякая выпуклая поверхность, изометричная сфере, сама будет сферой независимо от предвзятых требований ее регулярности.

Первые общие результаты, свободные от этого недостатка и притом относящиеся не только к замкнутым выпуклым поверхностям, были получены А. В. Погореловым в 1948 г. Будем говорить, что поверхность имеет ограниченную удельную кривизну, если отношение избытка суммы углов геодезического треугольника над  $\pi$ , т. е.  $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ , к площади этого треугольника ограничено сверху одним и тем же числом для всех треугольников. Важно иметь в виду, что это условие имеет уже чисто внутренний характер и притом является очень общим. Результаты Погорелова сводятся к тому, что *для выпуклых поверхностей ограниченной удельной кривизны имеют место те же теоремы 1–4, какие в предыдущем пункте были сформулированы для многогранников*; для их формулировки нужно лишь на место «выпуклого многогранника» подставить «выпуклую поверхность ограниченной кривизны» [166]. Доказательства Погорелова основаны на сочетании ряда тонких соображений, существенно отличных от методов Кон-Фоссена и др. Но если заранее ограничиться регулярными поверхностями, эти доказательства значительно упрощаются.

Вопрос об изометрических отображениях общих выпуклых поверхностей, не многогранников и не имеющих ограниченной кривизны, до сих пор остается открытым. Однако имеются основания предполагать, что все теоремы 1–4 о многогранниках верны и для любых выпуклых поверхностей<sup>22)</sup>.

4. Обращаясь к неевклидову пространству, можно заметить, что леммы §1 вовсе не используют аксиомы о параллельных, потому что они говорят о сферических многоугольниках. Лемма Коши по своему топологическому характеру вовсе не связана с тем или иным видом геометрии в данном пространстве. Поэтому теоремы 1 §2 и 1 §3 о замкнутых выпуклых многогранниках переносятся в неевклидово пространство (Лобачевского и сферическое) совершенно дословно вместе с их доказательствами, кроме одного дополнения, необходимого в случае сферического пространства. Дело в том, что лемма Коши существенно использует отсутствие у многогранника двуугольных граней. В пространстве Лобачевского, так же как в евклидовом, двуугольников не бывает, и потому это замечание не существенно. В сферическом же пространстве двуугольники существуют: это — обыкновенные двуугольники, ограничиваемые на сфере двумя боль-

<sup>22)</sup> Теперь это известно. Определенность общих замкнутых выпуклых поверхностей их метрикой первым доказал А. В. Погорелов [168], см. также [173, гл. 3]. Ю. А. Волков получил этот результат независимым путем, как следствие данной им оценки искажения формы выпуклой поверхности через оценку искажения ее внутренней метрики. Проблеме получения такой оценки ставил еще С. Э. Кон-Фоссен [126]. А. В. Погорелов доказал также для общих бесконечных выпуклых поверхностей аналоги результатов нашего §4, см. [173, гл. 3] и определенность метрикой общих замкнутых выпуклых поверхностей в пространствах постоянной положительной кривизны, см. [173, гл. 5, §6]. — Прим. В. А. Залгаллера.

шими полукругами. В связи с этим многогранники в сферическом пространстве могут иметь двугольные грани. Однако, как можно доказать, выпуклый многогранник в сферическом пространстве не имеет двугольных граней, кроме того случая, когда он сплошь состоит из двугольников. Тогда он имеет только две вершины, в которых и сходятся все его двугольные грани, прилегая друг к другу по сторонам. (Предельным случаем такого двухвершинника будет сфера — «плоскость» сферического пространства.) Легко непосредственно убедиться в том, что такие двухвершинники (кроме крайнего случая «плоскости») изгибаемы, так что для них теоремы 1 §2 и 1 §3 не выполняются.

Теоремы §5 о конечных незамкнутых многогранниках также дословно переносятся в неевклидовы пространства (Лобачевского и сферическое), если исключить многогранники, дополняемые до двухвершинников.

В случае теорем о бесконечных многогранниках дело обстоит иначе, потому что в них существенную роль играет понятие параллельности. Однако и их можно перенести в пространство Лобачевского, если понимать параллельность в смысле Лобачевского, именно два бесконечных ребра мы считаем параллельными, если они лежат в одной плоскости и асимптотически сближаются. Приняв это определение, можно перенести в пространство Лобачевского теоремы 2 §2 и 2 §3 о многогранниках с параллельными бесконечными ребрами и теоремы 1 и 2 §4 о многогранниках с непараллельными бесконечными ребрами. Все рассуждения, приводящие к их доказательству, останутся в силе. Точно так же теорема 3 §2 переносится в пространство Лобачевского без изменений.

В этих теоремах речь идет о многогранниках, гомеоморфных плоскости. Однако оказывается, что бесконечный выпуклый многогранник в пространстве Лобачевского, имеющий вершины (и тем самым не сводящийся к бесконечной призме), может и не быть гомеоморфным плоскости. Можно показать, что он может быть гомеоморфен любой конечно-связной области на плоскости, т. е. области с любым конечным числом «дыр»<sup>23)</sup>. Поэтому круг всех возможных теорем о бесконечных выпуклых многогранниках в пространстве Лобачевского крайне расширяется в сравнении с тем, что имеется в пространстве Евклида. Детальное исследование бесконечных выпуклых многогранников в пространстве Лобачевского сулит, по-видимому, немало интересного<sup>24)</sup>.

В качестве задачи о многогранниках, гомеоморфных плоскости, можно предложить вопрос об их предельном угле. Так как подобное сжатие в пространстве Лобачевского невозможно, то предельный угол  $V(P, O)$  многогранника  $P$  при вершине  $O$  нужно определить как границу телесного угла, заполненного лучами, исходящими из  $O$  и содержащимися в теле, ограниченном многогранником  $P$ . Зависит ли этот угол от точки  $O$ ?

<sup>23)</sup> Воспользуемся известной моделью пространства Лобачевского как внутренности евклидова шара  $\mathcal{H}$ , где прямыми считаются хорды шара  $\mathcal{H}$ , а плоскостями — большие круги в этом шаре. Тогда, поскольку прямые Лобачевского и Евклида здесь совпадают, тело, содержащееся в шаре  $\mathcal{H}$  и выпуклое в евклидовом смысле, будет выпуклым в смысле геометрии Лобачевского, и обратно. Граница шара  $\mathcal{H}$  состоит из бесконечно удаленных точек пространства Лобачевского. Возьмем выпуклый многогранник, лежащий в шаре  $\mathcal{H}$  так, что его вершины  $A_1, \dots, A_n$  лежат на поверхности шара, а вершины  $B_1, \dots, B_n$  — внутри. Этот многогранник будет бесконечным выпуклым многогранником в смысле геометрии Лобачевского: его бесконечные ребра сходятся в бесконечно удаленных точках  $A_i$ . Он, очевидно, гомеоморфен сфере с исключенными  $n$  точками  $A_1, \dots, A_n$  и тем самым гомеоморфен плоской области с  $n - 1$  «дырой».

<sup>24)</sup> Укажем на работы [77, 78, 332], в которых рассматриваются различные способы задания бесконечных выпуклых поверхностей и многогранников в пространстве Лобачевского. — Прим. В. А. Залгаллера.

В каком отношении к бесконечным граням и ребрам многогранника находятся его грани и ребра?

5. Обобщение теорем, доказанных в этой главе, на многогранники более чем трехмерные не имеет смысла, потому что уже *в четырехмерном пространстве даже один выпуклый многогранный угол  $V$  не допускает изгибаний*. Для доказательства опишем вокруг вершины такого угла трехмерную сферу. На ней этот угол вырезает выпуклый многогранник  $P$ . Это будет замкнутый многогранник в трехмерном сферическом пространстве. Но, как было отмечено выше, теорема о неизгибаемости замкнутого выпуклого многогранника верна также в сферическом пространстве. Поэтому и угол  $V$  оказывается неизгибаемым. Тем более то же верно в пространстве большего числа измерений. Отсюда следует, что в более чем трехмерном пространстве никакой выпуклый многогранник не допускает нетривиальных изометрических отображений.

Вопрос о равенстве двугранных углов при условии равенства углов на двумерных гранях оказывается тривиальным по совершенно аналогичным соображениям.

---

---

## Глава IV

### Существование многогранника с данной разверткой

---

---

Первые три параграфа этой главы посвящены доказательству существования замкнутого выпуклого многогранника с данной разверткой; это доказательство проводится методом, основанным на лемме об отображении (§ 2 главы II). В § 1 определяется и исследуется многообразие  $\mathbf{M}$  разверток данного строения. В § 2 рассматривается многообразие  $\mathbf{P}$  многогранников, которые могут быть склеены из разверток данного строения. Доказательство завершается в § 3, где лемма об отображении применяется к отображению многообразия  $\mathbf{P}$  в  $\mathbf{M}$ . Последние два параграфа (§ 4 и 5) посвящены бесконечным многогранникам. Обобщения результатов всей главы в духе последнего параграфа главы III излагаются в § 3 главы V.

#### § 1. МНОГООБРАЗИЕ РАЗВЕРТОК

1. Мы будем рассматривать развертки, гомеоморфные сфере и имеющие вокруг каждой вершины сумму углов  $\leq 2\pi$ . Нашей окончательной целью является доказать, что из всякой такой развертки можно склеить замкнутый выпуклый многогранник. Эта цель будет достигнута в § 3. Здесь же мы получим вспомогательные результаты, касающиеся разверток.

Так как всякий конечный многоугольник можно разбить на треугольники, то можно ограничиться развертками, составленными из одних треугольников. Никакие развертки, кроме гомеоморфных сфере и составленных из треугольников, в § 1–3 рассматриваться не будут, и потому они будут называться просто развертками.

Развертка с суммой углов при вершинах  $\leq 2\pi$  будет называться *разверткой положительной кривизны*. Если же в каждой вершине развертки сумма углов строго меньше  $2\pi$ , то мы будем говорить, что развертка не имеет лишних вершин или что развертка имеет строго положительную кривизну.

Как было указано еще в § 6 главы I, развертка имеет свою метрику. В ней можно проводить кратчайшие линии между любыми двумя точками (гла-

ва I, § 8, теорема 1). Такая кратчайшая состоит из отрезков, лежащих на многоугольниках развертки, причем переход от одного отрезка к следующему происходит через отождествленные точки границ многоугольников. Мы воспользуемся некоторыми простыми теоремами относительно кратчайших линий и кривизны в развертках. Доказательства этих теорем даны в § 8 главы I.

Удобно представлять себе развертку отображенной на какую-нибудь сферу  $S$ , так что метрика ее и, в частности, кратчайшие оказываются перенесенными на сферу  $S$ .

Если две развертки могут быть отображены друг на друга так, что расстояния между соответственными парами их точек равны, то мы говорим, что развертки изометричны<sup>1)</sup>. Если из развертки можно склеить замкнутый выпуклый многогранник, то мы будем ради краткости говорить, что развертка *реализуема*. Очевидно, что если данная развертка реализуема, то всякая изометричная ей развертка реализуема тем же самым многогранником. Поэтому вместо одной развертки всегда можно рассматривать развертку, ей изометричную.

**2. Лемма 1.** *Развертка не может иметь менее трех вершин, суммы углов при которых  $< 2\pi$ . Если развертка имеет только три такие вершины, а во всех остальных ее вершинах (если они вообще имеются) суммы углов  $= 2\pi$ , то она реализуема дважды покрытым треугольником.*

Действительно, полная кривизна развертки, гомеоморфной сфере, равна  $4\pi$  (см. главу I, § 8, теорему 3), а кривизна одной вершины  $< 2\pi$ . Отсюда следует первое утверждение леммы.

Пусть теперь развертка  $R$  имеет только три вершины  $A, B, C$  с суммами углов  $< 2\pi$ , во всех же остальных ее вершинах суммы углов равны  $2\pi$ . Отобразив развертку на сферу  $S$ , соединим вершины  $A, B, C$  кратчайшими. Сфера разобьется на два треугольника, не содержащие внутри себя точек, суммы углов вокруг которых  $\neq 2\pi$ . Поэтому эти треугольники можно развернуть на плоскость (глава I, § 8, теорема 4). Налагая их затем друг на друга так, чтобы соответственные их стороны совпали, получим дважды покрытый треугольник, реализующий развертку  $R$ .

**Лемма 2.** *Всякая развертка положительной кривизны изометрична развертке, удовлетворяющей следующим условиям: 1) она составлена из одних треугольников, 2) не имеет «лишних» вершин, т. е. вершин, суммы углов при которых равны  $2\pi$ , 3) ни у какого ее треугольника никакие две вершины не склеиваются друг с другом, т. е. не соответствуют одной вершине развертки.*

<sup>1)</sup> Легко убедиться в том, что если две развертки изометричны, то от одной из них к другой можно перейти конечным числом операций разрезания и склеивания.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть  $R$  — данная развертка и  $A_1, \dots, A_e$  — ее лишние вершины. По лемме 1  $e \geq 3$ . Отобразим развертку  $R$  на сферу  $S$ . Соединив вершину  $A_1$  кратчайшими с прочими вершинами  $A_2, \dots, A_e$ , разрежем сферу  $S$  — или, что то же самое, развертку  $R$  — по этим кратчайшим (см. рис. 88, а, который имеет условный «топологический» характер).

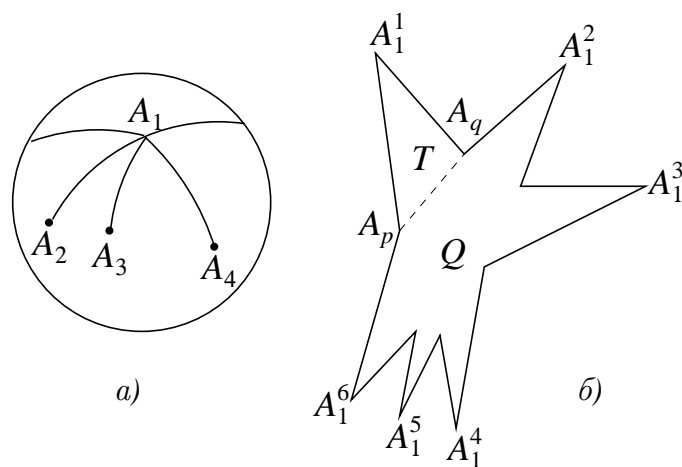


Рис. 88

Так как кратчайшие, исходящие из одной точки, не могут пересекаться, то в результате такого разрезания получим (геодезический) многоугольник  $Q$ , гомеоморфный кругу. Он не содержит вершин внутри, а потому согласно теореме 5 §8 главы I его можно разбить диагоналями на треугольники, каждый из которых разворачивается на плоскость.

Однако мы хотим доказать, что многоугольник  $Q$  можно разбить диагоналями на треугольники так, что в полученной развертке ни у какого треугольника две вершины не будут склеиваться друг с другом, т.е. не будут соответствовать одной вершине развертки.

У многоугольника  $Q$  имеются вершины двух типов:  $e - 1$  вершин отвечают вершинам  $A_2, A_3, \dots, A_e$  развертки и другие  $e - 1$  вершин отвечают одной вершине  $A_1$  (рис. 88, б). Эти вершины «второго рода»  $A_1^1, A_1^2, \dots, A_1^{e-1}$  расположены на периметре многоугольника  $Q$  через одну. Так как одной и той же вершине развертки отвечают только вершины второго рода, то нам нужно доказать следующее:

*многоугольник  $Q$  можно разбить диагоналями на треугольники так, что в каждом из них максимум одна вершина будет вершиной «второго рода».*

Для доказательства заметим, что сумма углов при вершинах «второго рода» есть не что иное, как полный угол вокруг вершины  $A_1$  и, следовательно, по условию она меньше  $2\pi$ . Поэтому самое большее при одной из вершин второго рода угол может быть больше или равен  $\pi$ .

Пусть при вершине  $A_1^1$  угол меньше  $\pi$ . Пусть с ней смежны вершины  $A_p, A_q$ . Проведем отрезок  $A_p A_q$  и рассмотрим треугольник  $T = A_1^1 A_p A_q$  (рис. 88, б). Так как угол многоугольника  $Q$  при вершине  $A_1^1$  меньше  $\pi$ , то он будет также углом треугольника  $T$ , так что общая часть  $TQ$  треугольника  $T$  и многоугольника  $Q$  представляет некоторый многоугольник; в частности, он может совпадать с треугольником  $T$ . В последнем случае, отсекая его от  $Q$ , получим многоугольник  $Q - T$ , у которого на одну вершину второго рода меньше. В противном случае проведем в многоугольнике  $TQ$  кратчайшую из ломаных, соединяющих вершины  $A_p$  и  $A_q$  (рис. 89); эта

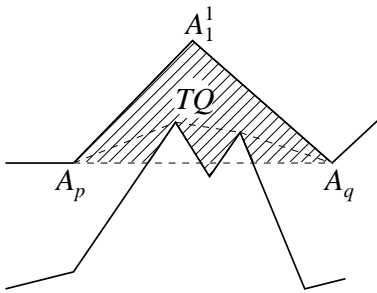


Рис. 89

ломаная  $\widehat{A_p A_q}$ , очевидно, короче ломаной, образованной сторонами  $A_p A_1^1$  и  $A_1^1 A_q$ :

$$\widehat{A_p A_q} < A_p A_1^1 + A_1^1 A_q. \quad (1)$$

Если бы на линии  $\widehat{A_p A_q}$  лежала какая-либо вершина «второго рода»  $A_1^j$ , то мы имели бы

$$A_p A_1^j + A_1^j A_q < A_p A_1^1 + A_1^1 A_q,$$

и, следовательно, хотя бы один из отрезков  $A_p A_1^j, A_1^j A_q$  этой линии был бы короче соответствующего отрезка  $A_p A_1^1$  или  $A_1^1 A_q$ ; например,

$$\widehat{A_p A_1^j} < A_p A_1^1. \quad (2)$$

Однако по первоначальному построению сторона  $A_p A_1^1$  является кратчайшей в данной развертке между вершинами  $A_p$  и  $A_1$ . Линия же  $\widehat{A_p A_1^j}$  тоже соединяет вершину  $A_p$  с  $A_1$ . Она не может быть короче кратчайшей, а потому неравенство (2), а вместе с ним (1) невозможно. Следовательно, и допущение, что на линии  $\widehat{A_p A_q}$  лежит какая-либо вершина второго рода, неверно.

Этим доказано, что многоугольник, отсекаемый от  $Q$  линией  $\widehat{A_p A_q}$ , содержит только одну вершину второго рода  $A_1^1$ . После его отсекания остается часть многоугольника  $Q$ , состоящая из нескольких многоугольников с меньшим числом вершин второго рода. К каждому из этих многоугольников

применимы все предыдущие рассуждения: мы можем отсечь от них многоугольники с одной вершиной второго рода каждый и т. д., пока не разобьем все на многоугольники, каждый из которых будет содержать только одну или ни одной вершины второго рода. После этого остается разбить каждый из этих многоугольников на треугольники, и мы придем к нужному результату.

Доказанные леммы 1 и 2 показывают, что *достаточно ограничиться рассмотрением разверток, состоящих из треугольников и удовлетворяющих следующим условиям: 1) число вершин  $e > 3$ , 2) нет лишних вершин, 3) ни у какого треугольника вершины не склеиваются друг с другом.* В дальнейшем эти условия подразумеваются выполненными без особых оговорок.

**3.** Если в понятии развертки отвлечься от метрических соотношений и рассматривать ее чисто комбинаторно, т. е. иметь в виду только данные в ней отождествления сторон и вершин треугольников, то развертка превращается в то, что мы будем называть *комплексом*. Следовательно, «комплекс» есть совокупность конечного числа абстрактных треугольников с указанным отождествлением их сторон и вершин, удовлетворяющим условиям, содержащимся в самом определении развертки.

Это есть некоторое обобщение понятия комплекса, принятого в комбинаторной топологии. Именно, мы не требуем того, чтобы у двух треугольников отождествлялось только по одной стороне или по одной вершине. Но согласно условию, поставленному в конце предыдущего пункта, склеивание треугольника самого с собой не допускается.

Так как наша развертка гомеоморфна сфере, то если треугольники мыслить как произвольные топологические образы обычных треугольников, комплекс оказывается гомеоморфным сфере. Поэтому можно коротко сказать, что комплекс есть совокупность топологических треугольников с такими отождествлениями их сторон и вершин, в силу которых эта совокупность оказывается гомеоморфной сфере.

Если треугольники данного комплекса  $K$  заданы как плоские треугольники и отождествления сторон происходят с сохранением длин, то мы и получаем развертку. Мы будем говорить в этом случае, что комплекс  $K$  превращается в развертку строения  $K$ .

Пусть  $K$  — данный комплекс, а  $f$ ,  $k$ ,  $e$  — числа его треугольников, ребер и вершин. Так как плоские треугольники однозначно определяются длинами их сторон, то для того, чтобы превратить комплекс  $K$  в определенную развертку, достаточно приписать его ребрам определенные длины. Следовательно, развертка строения  $K$  определяется заданием  $k$  параметров — длин ребер  $r_1, \dots, r_k$ .

Если воспользоваться  $k$ -мерным пространством, то множество всех разверток строения  $K$  изобразится в нем в виде некоторой области  $M^0$ . Един-



ственные условия, которым должны удовлетворять длины ребер, это — «неравенства треугольника»: сумма длин каждой двух сторон треугольника должна быть больше длины третьей его стороны<sup>2)</sup>:

$$r_i + r_j > r_l.$$

Эти неравенства — линейные, и потому каждое из них определяет некоторое полупространство. Пересечение этих полупространств и образует область  $M^0$ . (Кстати видно, что она является внутренностью выпуклого многогранного угла с вершиной в начале.) Эта область заведомо не пуста: достаточно приписать всем ребрам одну и ту же длину, чтобы все неравенства треугольника удовлетворялись. Следовательно, для любого комплекса  $K$  существует развертка строения  $K$  из равносторонних треугольников.

Совокупность разверток строго положительной кривизны изображается множеством  $M$ , являющимся частью области  $M^0$ .

Сумма  $\sum_j \varphi_{ij}$  углов, сходящихся в вершине ( $i$  — номер вершины,  $j$  — номер угла при этой вершине), есть непрерывная функция длин ребер.  $M$  определяется неравенствами

$$\sum_j \varphi_{ij} < 2\pi \quad (i = 1, 2, \dots, e)$$

и, следовательно, представляет собой открытое множество. *Это и есть многообразие разверток строго положительной кривизны, которое мы будем дальше рассматривать.*

Могло бы оказаться, что  $M$  пусто; но тогда нам не о чем говорить, так как мы хотим доказать, что если имеются развертки положительной кривизны строения  $K$ , то из каждой из них можно склеить выпуклый многогранник. Поэтому *мы будем предполагать, что  $M$  не пусто*<sup>3)</sup>.

**4. Лемма 3.** *Если число вершин комплекса  $K$  больше трех, то многообразие  $M$  составляет только часть области  $M^0$  и, следовательно, имеет в  $M^0$  границу.*

<sup>2)</sup> Положительность длин уже следует из этих неравенств:  $r_i + r_j > r_l$ ,  $r_i + r_l > r_j$  и, следовательно,  $2r_i + r_j + r_l > r_j + r_l$ , откуда  $r_i > 0$ .

<sup>3)</sup> То, что  $M$  пусто, означает, что комплекс  $K$  нельзя превратить в развертку с суммами углов при всех вершинах  $< 2\pi$ . Легко построить примеры таких комплексов, допуская у нескольких треугольников склеивание вершин в одну точку. Однако такие «самосклеивания» у нас исключены по условию, принятому в конце п<sup>о</sup> 2. Для комплекса же без самосклеиваний представляется вероятным, что он всегда может быть превращен в развертку строго положительной кривизны, так что на самом деле при нашем условии множество  $M$  не может быть пустым. Однако мы не знаем, как это доказать в общем виде. Для случая, когда в комплексе  $K$  каждые два треугольника склеиваются максимум по одной стороне или вершине, это доказано.

Докажем сначала, что в комплексе с числом вершин, большим трех, есть хотя бы одна вершина, в которой сходится не менее трех треугольников. Для этого достаточно показать, что если в каждой вершине комплекса сходится не более двух треугольников, то комплекс имеет всего три вершины.

Пусть  $ABC$  — треугольник такого комплекса. Пусть к его стороне  $AB$  подклеивается треугольник  $ABD$  (рис. 90). Тогда в вершинах  $A$  и  $B$  уже сошлись два треугольника, и если никакие другие к ним прилежать не могут, то, очевидно, стороны  $AC$  и  $BC$  склеиваются с  $AD$  и  $BD$ . (Могло бы быть, что  $BC$  склеивается с  $AC$ , а  $BD$  — с  $AD$ . Но тогда у треугольника  $ABC$  отождествлялись бы вершины  $A$  и  $B$ , что исключено по условию, принятому в п<sup>о</sup> 2.) Остаются только три вершины, и ничего больше к комплексу прибавить нельзя, так как свободных сторон не осталось. Таким образом, наше утверждение доказано.

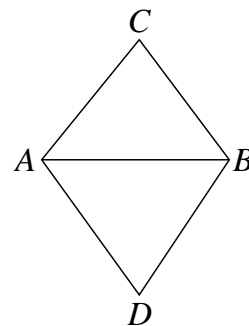


Рис. 90

Пусть теперь комплекс  $K$  имеет более трех вершин. Тогда, как мы сейчас показали, в нем найдется вершина  $A$ , в которой сходится не менее трех треугольников.

Припишем сначала всем ребрам комплекса  $K$  равные длины, т. е. возьмем развертку из правильных треугольников. Затем будем уменьшать в одно и то же число раз длины всех ребер, сходящихся в  $A$ , оставляя длины остальных ребер неизменными. Тогда углы, подходящие к  $A$ , будут возрастать и могут быть сделаны сколь угодно близкими к  $\pi$ . А так как их не менее трех, то сумма их будет становиться  $\geq 2\pi$ . Таким образом, мы получим развертки, не входящие в многообразие  $M$ , и лемма доказана.

*Граница многообразия  $M$  состоит из точек, соответствующих разверткам, у которых сумма углов при каждой вершине меньше или равна  $2\pi$  и хотя бы при одной вершине равна  $2\pi$ .*

Действительно, как было указано, многообразие  $M$  определяется е неравенствами

$$\sum_j \varphi_{ij} < 2\pi \quad (i = 1, 2, \dots, e), \tag{3}$$

где  $\varphi_{ij}$  обозначает  $j$ -й угол при  $i$ -й вершине. Угол  $\varphi_{ij}$  есть непрерывная функция длин ребер. Поэтому на границе многообразия  $M$  ни одно из этих неравенств не может обращаться и хотя бы одно из них должно переходить в равенство.

Отсюда следует также, что граница многообразия  $M$  состоит из кусков е поверхностей  $F_1, F_2, \dots, F_e$ , представляемых уравнениями

$$\sum_j \varphi_{ij} = 2\pi \quad (i = 1, 2, \dots, e), \tag{4}$$

где углы  $\varphi_{ij}$  нужно рассматривать как функции длин ребер, т. е. координат в нашем  $k$ -мерном пространстве<sup>4)</sup>.

Теперь мы докажем последнюю лемму, которая будет играть решающую роль в §3 при доказательстве нашей теоремы о реализуемости разверток положительной кривизны.

**Лемма 4.** *На границе каждой связной компоненты многообразия  $M$  есть такая точка, в некоторой окрестности которой нет точек других связных компонент многообразия  $M$* <sup>5)</sup>.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Пусть  $M'$  — какая-либо связная компонента многообразия  $M$ . Пусть  $X_0$  — точка на ее границе, принадлежащая наименьшему числу поверхностей  $F_1, \dots, F_e$  — скажем, поверхностям  $F_1, \dots, F_l$ . Покажем, что эта точка удовлетворяет требованиям леммы<sup>6)</sup>.

Точка  $X_0$  представляет развертку  $R_0$ , у которой суммы углов при вершинах  $A_1, \dots, A_l$  равны  $2\pi$ , а при всех остальных вершинах  $A_i$  — меньше  $2\pi$ . Очевидно, можно указать такое столь малое  $\varepsilon > 0$ , что при любом изменении длин ребер развертки  $R_0$ , меньшем  $\varepsilon$ , ни при одной из вершин  $A_i$  ( $i > l$ ) сумма углов не становится равной  $2\pi$ . Мы ограничимся только такими изменениями длин ребер. Это означает, что мы ограничиваемся столь малой окрестностью  $W$  точки  $X_0$ , что в этой окрестности нет точек других поверхностей  $F_i$ , кроме  $F_1, \dots, F_l$ .

Рассмотрим треугольники развертки  $R_0$ , подходящие к ее вершине  $A_1$ . Пусть  $r$  — ребро одного из них, противоположащее вершине  $A_1$ . Так как угол треугольника есть возрастающая функция противоположащей стороны, то сумма углов при вершине  $A_1$ , т. е.  $\sum \varphi_{1j}$ , также будет возрастающей функцией длины ребра  $r$ . (Ребро  $r$  может быть противоположащим вершине  $A_1$  еще в другом треугольнике, но тогда вывод о сумме углов тем более верен. Прилежащим к  $A_1$  ребро  $r$  не может быть, так как тогда у первого

<sup>4)</sup> Множества  $F_i$ , определяемые уравнениями (4), мы называем поверхностями условно. На самом деле некоторые из них могут быть пустыми. Именно, если в  $i$ -й вершине сходятся лишь два треугольника и, следовательно, только два угла, их сумма, конечно, всегда меньше  $2\pi$ . (Во всех других случаях уравнение (4) определяет действительно  $(k-1)$ -мерную поверхность в нашем  $k$ -мерном пространстве, но это нам не нужно и не будет поэтому доказываться.)

<sup>5)</sup> На самом деле почти все точки границы заведомо должны обладать этим свойством. Это легко усмотреть из аналитичности функции  $\sum \varphi_{ij}$ . Но мы обходимся элементарными средствами и получаем достаточный для нас результат. Заметим еще, что мы не знаем, не будет ли многообразие  $M$  всегда связным. Если бы удалось просто доказать его связность, то все доказательство упростилось бы.

<sup>6)</sup> На самом деле это наименьшее число поверхностей равно единице, причем почти все точки границы лежат каждая на одной поверхности  $F_i$ . Но мы этого не доказываем, так как можем обойтись и без этого.

взятого треугольника две вершины попадали бы в  $A_1$  вопреки условию, наложенному на рассматриваемые развертки.)

Укорачивая ребро  $r$ , получим развертку  $R_1$  с суммой углов при вершине  $A_1$ , меньшей  $2\pi$ , а удлинняя ребро  $r$ , получим развертку  $R_2$  с суммой углов при  $A_1$ , большей  $2\pi$ .

Разверткам  $R_1$  и  $R_2$  отвечают точки  $X_1$  и  $X_2$ . Можно взять окрестности  $U_1$  и  $U_2$  этих точек так, что  $\sum \varphi_{1j} < 2\pi$  во всякой точке из  $U_1$  и  $\sum \varphi_{1j} > 2\pi$  во всякой точке из  $U_2$ . Окрестности  $U_1$  и  $U_2$  можно, конечно, взять равными и параллельными так, чтобы при параллельном перемещении, переводящем точку  $X_1$  в  $X_2$ , окрестность  $U_1$  совпала с  $U_2$ . (На рис. 91, а  $U_1$  и  $U_2$  для простоты изображены квадратами.)

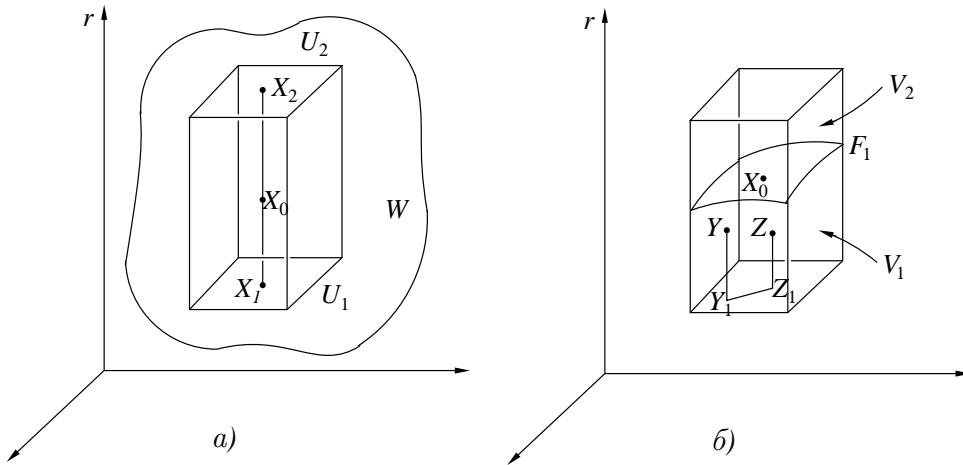


Рис. 91

Ребру  $r$  отвечает ось координаты  $r$  в нашем  $k$ -мерном пространстве, где координатами служат длины ребер. Изменение одного лишь ребра  $r$  изображается смещением вдоль оси  $r$ .

По равенству и параллельности окрестностей  $U_1, U_2$  их соответственные точки  $Y_1, Y_2$  соединяются отрезками, параллельными оси  $r$ . Все такие отрезки заполняют некоторую окрестность  $V$  точки  $X_0$ , имеющую характер призмы.

Докажем, что как раз в этой окрестности и нет точек других связанных компонент многообразия  $M$ , кроме  $M'$ .

В точках  $Y_1, Y_2$  сумма  $\sum \varphi_{1j}$  соответственно меньше и больше  $2\pi$  и при переходе от  $Y_1$  к  $Y_2$  она монотонно возрастает. Поэтому на отрезке  $Y_1 Y_2$  есть и притом единственная точка  $Y$ , в которой  $\sum \varphi_{1j} = 2\pi$ . Это означает,

что всякий такой отрезок  $Y_1Y_2$  с концами в окрестностях  $U_1$  и  $U_2$  пересекается поверхностью  $F_1$  в одной точке. Таким образом, и вся «призма»  $V$  разбивается поверхностью  $F_1$  на две части  $V_1$  и  $V_2$ .

В области  $V_2$  выполняется неравенство  $\sum \varphi_{1j} > 2\pi$ , и потому ни одна ее точка не может принадлежать многообразию  $M$ . Но точка  $X_0$  лежит на границе связной компоненты  $M'$  многообразия  $M$ . Поэтому вблизи  $X_0$  и, следовательно, в области  $V_1$  имеются точки из  $M'$ . Мы докажем сейчас, что вся область  $V_1$  содержится в  $M'$ .

Допустим противное, и пусть  $Y$  — точка из  $V_1$ , не принадлежащая  $M'$  (рис. 91, б). Пусть, далее,  $Z$  — какая-либо точка из  $V_1$ , принадлежащая  $M'$ . По построению «призмы»  $V$  точки  $Y$  и  $Z$  лежат на отрезках, идущих из некоторых точек  $Y_1, Z_1$  области  $U_1$ . Поэтому, если провести отрезок  $Y_1Z_1$ , то мы получим непрерывную ломаную  $L = Y_1Y \cup Y_1Z_1 \cup Z_1Z$ , соединяющую точки  $Y$  и  $Z$  и не выходящую из  $V_1$ .

Так как точка  $Z$  лежит в компоненте  $M'$ , а точка  $Y$  — вне  $M'$ , то ломаная  $L$  должна пересекать границу компоненты  $M'$ .

Точка пересечения, как точка границы, должна лежать на некоторых поверхностях  $F_i$ . Так как она лежит в области  $V_1$ , то поверхности  $F_1$  она принадлежать не может. Кроме того, мы заранее ограничились областью  $W$ , где нет точек других поверхностей  $F_i$ , кроме  $F_1, \dots, F_l$ . Следовательно, точка пересечения может лежать лишь на поверхностях  $F_2, \dots, F_l$ . Однако по определению точки  $X_0$  никакая точка границы компоненты  $M'$  уже не принадлежит менее чем  $l$  поверхностям  $F_i$ . Получается противоречие, и это доказывает, что область  $V_1$  действительно целиком содержится в компоненте  $M'$ .

Но вместе с тем в области  $V_2$  вовсе нет точек многообразия  $M$ , так что «призма»  $V$  и оказывается такой окрестностью точки  $X_0$ , где нет точек других компонент многообразия  $M$ , кроме  $M'$ . Лемма доказана.

## § 2. МНОГООБРАЗИЕ МНОГОГРАННИКОВ

1. В соответствии с тем, что мы рассматриваем многообразие разверток данного строения  $K$ , мы будем рассматривать выпуклые многогранники, которые можно склеить из разверток такого строения. Конечно, нам пока не известно, существует ли хотя бы один такой многогранник, даже если существуют развертки положительной кривизны строения  $K$ . Тем не менее в этом параграфе мы будем рассуждать так, как если бы такие многогранники существовали; в следующем же параграфе мы докажем, что они действительно всегда существуют.

Итак, мы будем рассматривать выпуклые многогранники, которые можно склеить из разверток положительной кривизны данного строения  $K$ . Согласно определению (п<sup>0</sup> 3 § 8 главы I), многогранник  $P$  называется склеен-

ным из развертки  $R$ , если он допускает такое разбиение на (не обязательно плоские) треугольники, что 1) комплекс этих треугольников имеет то же строение, что и комплекс  $K$ , и 2) каждый треугольник разбиения можно развернуть на плоскость, причем его стороны окажутся соответственно равными сторонам соответствующего треугольника развертки  $R$ . Там же в п<sup>о</sup> 3 §8 главы I указано, что склеивание есть не что иное, как изометрическое отображение развертки на многогранник. Таким образом, при склеивании многогранника  $P$  из развертки  $R$  устанавливается определенное ее отображение на многогранник  $P$  и тем самым также отображение на него комплекса  $K$ . Многогранник  $P$  с заданным отображением на него некоторой развертки  $R$  и тем самым комплекса  $K$  мы называем  $K$ -триангулированным многогранником. Комплекс треугольников, получающихся при этом на многограннике  $P$ , мы называем его  $K$ -триангуляцией. Наглядно можно представлять себе  $K$ -триангулированный многогранник как многогранник с нарисованной на нем  $K$ -триангуляцией.

Мы рассматриваем только развертки строго положительной кривизны; у них суммы углов во всех вершинах  $< 2\pi$ , а потому вершины  $K$ -триангуляции неизбежно являются вершинами многогранника.

Два  $K$ -триангулированных многогранника мы считаем равными, если существует движение или движение с отражением, приводящее в совпадение эти многогранники вместе с их  $K$ -триангуляциями, т. е. так, что отображения комплекса  $K$  на эти многогранники тоже совпадают<sup>7)</sup>.

Таким образом, все  $K$ -триангулированные многогранники распадаются на классы равных друг другу. Нашей задачей является превратить множество этих классов в многообразие путем подходящего определения окрестностей. Это будет «многообразие  $K$ -триангулированных многогранников»  $\mathcal{P}$ .

2. Следующую лемму мы докажем в предположении, что триангуляция может иметь вершины, не являющиеся вершинами многогранника. Однако это усиление понадобится нам лишь в §3. В настоящем же параграфе всюду, кроме леммы 1, считается, что вершины триангуляции являются вершинами многогранника.

**Лемма 1.** Пусть на выпуклом многограннике  $P_0$  имеется триангуляция  $T_0$ , каждый треугольник которой можно развернуть на плоскость. То-

<sup>7)</sup>Если данная развертка  $R$  допускает разные отображения на данный многогранник, то каждому отображению соответствует свой  $K$ -триангулированный многогранник. Например, любой данный правильный тетраэдр можно превращать в разные  $K$ -триангулированные тетраэдры, меняя соответствие его вершин вершинам развертки. Однако все эти  $K$ -триангулированные тетраэдры будут равны друг другу. На рис. 37 (с. 54) были даны разные развертки правильного тетраэдра, имеющие одинаковое строение. Этим разверткам соответствуют не только разные, но и не равные друг другу  $K$ -триангулированные тетраэдры.

гда существует такое  $\varepsilon > 0$ , что если вершины многогранника  $P$  удалены от вершин триангуляции  $T_0$  меньше чем на  $\varepsilon$  (причем каждой вершине триангуляции  $T_0$  соответствует одна и только одна вершина многогранника  $P$ ), то на  $P$  можно построить, и притом единственным образом, триангуляцию, близкую к  $T_0$  и имеющую то же строение.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Будем рассматривать любой из многогранников  $P$  как полученный путем малого смещения вершин триангуляции  $T_0$  (т. е. как поверхность выпуклой оболочки этих смещенных вершин). При смещениях этих вершин грани исходного многогранника  $P_0$ , вообще говоря, будут ломаться.

Число различных способов, какими могут переламываться грани многогранника  $P_0$ , давая многогранники  $P$  разных строений, очевидно, конечно, и мы рассмотрим многогранники  $P$  какого-либо одного строения. Триангулируем одинаково все грани этих многогранников  $P$ , беря за вершины триангуляции вершины этих многогранников, и аналогично триангулируем многогранник  $P_0$  (вершинами триангуляции будут здесь вершины из  $T_0$ ).

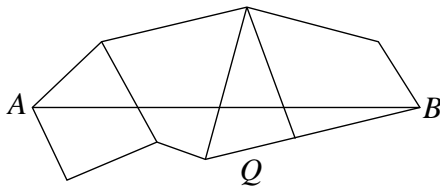


Рис. 92

В результате мы сможем считать, что многогранники  $P$  и  $P_0$  одинаково построены из треугольных граней, некоторые из которых могут лежать в одной плоскости. Развернем теперь какое-нибудь ребро  $AB$  триангуляции  $T_0$  на плоскость вместе со всеми гранями многогранника  $P_0$ , по которым оно проходит; полученную развертку обозначим  $Q$  (рис. 92). Смещение вершин триангуляции  $T_0$  при переходе к многограннику  $P$  вызывает изменение граней, участвующих в этой развертке  $Q$ . Но так как изменение граней происходит непрерывно с непрерывным смещением вершин, то найдется такое  $\delta_{AB} > 0$ , что при смещениях, меньших  $\delta_{AB}$ , изменение развертки  $Q$  будет столь малым, что отрезок  $AB$  останется внутри нее.

Если мы возьмем  $\varepsilon$  меньше всех таких  $\delta$  для всех ребер триангуляции  $T_0$  и для всех возможных строений многогранников  $P$ , то получим как раз искомое  $\varepsilon$ . Действительно, поскольку вершины триангуляции  $T$  при смещениях, меньших  $\varepsilon$ , не будут переходить через ее ребра (как они не переходят через  $AB$  при смещениях  $< \delta_{AB}$ ), постольку ребра, ограничивавшие в  $T_0$  треугольник, будут по-прежнему ограничивать некоторый треугольник и, следовательно, строение триангуляции сохранится. Кроме того, измененная триангуляция получается только одна, потому что, скажем, в измененной развертке  $Q$  есть только один отрезок, соединяющий вершины  $A$  и  $B$ . (На многограннике  $P$  возможны также другие геодезические отрезки  $AB$ ,

но они уже не могут быть сколь угодно близкими к данному, так как будут удалены от него всегда на конечное расстояние, зависящее от «ширины» развертки  $Q$ .)

Таким образом, на каждом многограннике  $P$  с вершинами, близкими к вершинам триангуляции  $T_0$ , существует и притом единственная триангуляция  $T$  того же строения и близкая к  $T_0$  как в смысле ее расположения, так и в смысле длин ее ребер.

**3.** Теперь дадим определение окрестностей в многообразии  $K$ -триангулированных многогранников. Пусть  $P_0$  —  $K$ -триангулированный многогранник и пусть  $A, B, C$  — три его вершины, соответствующие трем данным вершинам  $A, B, C$  комплекса  $K$ . Возьмем декартову систему координат  $x, y, z$  и путем движения приведем многогранник  $P_0$  в такое положение, чтобы вершина  $A$  оказалась в начале,  $B$  — на положительной полуоси  $x$ ,  $C$  — в плоскости  $xy$  на полуплоскости  $y > 0$ . Если многогранник  $P_0$  не вырождается в дважды покрытый многоугольник, то возьмем еще его вершину  $D$ , не лежащую в плоскости  $xy$ , и, если нужно, путем отражения в плоскости  $z = 0$  переведем ее в полупространство  $z > 0$ . Когда расположение многогранника подчинено таким условиям, то никакие движения и отражения невозможны. Поэтому, если мы приведем в такое же расположение другой  $K$ -триангулированный многогранник  $P_1$ , равный  $P_0$ , то он совпадет с  $P_0$  вместе с триангуляцией. Действительно, если многогранники  $P_1$  и  $P_0$  имеют одинаковые  $K$ -триангуляции, то существует отображение многогранника  $P_1$  на  $P_0$ , приводящее в совпадение их  $K$ -триангуляции. Это будет изометрическое отображение  $P_1$  на  $P_0$ , а по теореме 1 §3 главы III такое отображение осуществляется путем движения или движения и отражения. Но движение и отражение многогранника  $P_1$  при данных условиях, наложенных на вершины  $A, B, C, D$ , невозможно. Поэтому в результате совпадения многогранников  $P_1$  и  $P_0$  их  $K$ -триангуляции неизбежно должны совпадать. Следовательно, при данных условиях, наложенных на вершины  $A, B, C, D$ , каждый класс равных  $K$ -триангулированных многогранников представляется одним многогранником, и мы можем поэтому говорить о многообразии многогранников вместо многообразия их классов.

Пусть многогранник  $P_0$  не вырождается в многоугольник. Тогда при достаточно малых, но в остальном произвольных смещениях его вершин, сохраняющих, однако, условия, наложенные на вершины  $A, B, C$ , мы будем получать новые выпуклые многогранники  $P$ . Каждый из них есть граница выпуклой оболочки смещенных вершин. Согласно лемме 1, если смещения вершин достаточно малы, многогранник  $P$  допускает единственную  $K$ -триангуляцию, близкую к  $K$ -триангуляции многогранника  $P_0$ . Таким образом, многогранники  $P$ , достаточно близкие к  $P_0$ , оказываются  $K$ -триангулированными. Все они не равны между собой, потому что при



условию, наложенном на их расположение, каждому классу равных многогранников отвечает только один многогранник. (Нужно иметь в виду, что при малых смещениях вершин вершина  $D$  остается в полупространстве  $z > 0$ .) Совокупность этих многогранников  $P$  мы принимаем за окрестность многогранника  $P_0$ .

Пусть теперь многогранник  $P_0$  вырождается в дважды покрытый многоугольник. Он лежит в плоскости  $z = 0$ , и мы различаем на нем две стороны: верхнюю, обращенную в полупространство  $z > 0$ , и нижнюю, обращенную в полупространство  $z < 0$ . На одну сторону отображается одна часть комплекса  $K$ , на другую — другая. Этим самым стороны вырожденного  $K$ -триангулированного многогранника различаются соответствующими им частями комплекса  $K$ .

При достаточно малых смещениях вершин, сохраняющих условия, наложенные на расположение вершин  $A, B, C$ , многогранник  $P_0$  будет переходить в близкие к нему многогранники  $P$ . Если смещения вершин достаточно малы, то грани поворачиваются мало, и ни одна из них не становится перпендикулярной к плоскости  $z = 0$ . Поэтому на многогранниках  $P$  можно различать две части: верхнюю, обращенную в сторону  $z > 0$ , и нижнюю, обращенную в сторону  $z < 0$ . По лемме 1 многогранники  $P$  допускают  $K$ -триангуляции, близкие к  $K$ -триангуляции многогранника  $P_0$ . Мы будем строить эти триангуляции так, чтобы на верхнюю (нижнюю) сторону многогранника  $P$  отображалась часть комплекса  $K$ , соответствующая верхней (нижней) части многогранника  $P_0$ .

Получаемые таким образом  $K$ -триангулированные многогранники  $P$  будут не равны между собой. Действительно, в силу условия, наложенного на расположение вершин  $A, B, C$ , два равных  $K$ -триангулированных многогранника могли бы не совпадать только в том случае, когда один был бы симметричен другому относительно плоскости  $z = 0$ . Однако при отражении в этой плоскости верхняя и нижняя стороны меняются местами, а им по условию соответствуют разные части комплекса  $K$ . Следовательно, хотя симметричные многогранники равны, однако отображения комплекса  $K$  на них — разные, и тем самым эти многогранники принадлежат разным классам равных  $K$ -триангулированных многогранников.

Совокупность всех многогранников  $P$ , полученных указанным путем, мы принимаем за окрестность вырожденного многогранника  $P_0$ .

Коротко можно сказать, что *окрестностью  $K$ -триангулированного многогранника  $P_0$  мы считаем совокупность всех  $K$ -триангулированных многогранников, близких к  $P_0$  вместе с их  $K$ -триангуляциями.*

4. Мы показали, что все многогранники  $P$  с вершинами, близкими к вершинам  $P_0$ , допускают близкие  $K$ -триангуляции и не равны между собой. Если число вершин комплекса  $K$ , а тем самым и наших многогранников,

равно  $e$ , то имеется всего  $3e$  переменных координат вершин. Но у вершин  $A, B, C$  остаются неизменными соответственно по 3, 2, 1 координате. Следовательно, мы имеем всего  $3e - 6$  переменных координат, причем в достаточно малых пределах их изменения произвольны и приводят к разным  $K$ -триангулированным многогранникам.

Это означает, что *каждый  $K$ -триангулированный многогранник  $P_0$  имеет окрестность, гомеоморфную  $(3e - 6)$ -мерному кубу. Тем самым совокупность всех  $K$ -триангулированных многогранников действительно превращается в многообразие размерности  $3e - 6$ .* (Помня, конечно, о том, что равные  $K$ -триангулированные многогранники не различаются.)

**Лемма 2.** *Если  $e$  — число вершин комплекса  $K$ , а  $k$  — число его ребер, то  $3e - 6 = k$ . Тем самым число измерений многообразия  $P$  равно числу измерений многообразия разверток  $M$ .*

Действительно, пусть  $f$  — число треугольников комплекса  $K$ . У каждого треугольника три стороны, и стороны попарно отождествлены; поэтому  $3f = 2k$ . Но по теореме Эйлера  $f - k + e = 2$ , или  $3f - 3k + 3e = 6$ ; а так как  $3f = 2k$ , то  $3e - 6 = k$ .

**5. Лемма 3.** *Пусть последовательность  $K$ -триангулированных многогранников  $P_n$  такова, что их развертки  $R_n$  сходятся к некоторой развертке  $R$ <sup>8)</sup>. Тогда из многогранников  $P_n$  можно выбрать подпоследовательность многогранников  $P_{n_i}$ , сходящихся к некоторому  $K$ -триангулированному многограннику  $P$  вместе с их  $K$ -триангуляциями (т. е.  $K$ -триангуляция многогранника  $P$  есть предел  $K$ -триангуляций многогранников  $P_{n_i}$ ).*

В этой лемме многогранники рассматриваются с точностью до движения, так как иначе она не верна: многогранники  $P_n$  можно было бы взять удаляющимися в бесконечность. В связи с этим можно предположить, что все многогранники  $P_n$  содержат начало координат. Так как развертки их сходятся, то расстояния между их вершинами равномерно ограничены и сами многогранники оказываются заключенными в некотором шаре с центром в начале координат.

Перенумеруем вершины комплекса  $K$ ; тогда вершины многогранников  $P_n$  (и их разверток  $R_n$ ) окажутся соответственно перенумерованными. Выберем из многогранников последовательность, в которой сходятся первые вершины, потом из этой последовательности выберем другую, в которой схо-

---

<sup>8)</sup>Сходимость разверток есть сходимость длин их ребер, как это ясно из определения многообразия разверток  $M$ . Развертки положительной кривизны заведомо сходятся к развертке неотрицательной кривизны. Вообще говоря, в развертке  $R$  и предельной  $K$ -триангуляции многогранника  $P$  могли бы быть и ненастоящие вершины. Доказательство леммы от этого, по существу, не зависит. Однако в дальнейшем нам понадобится эта лемма лишь для того случая, когда и предельная развертка имеет положительную кривизну.

дятся вторые вершины, и т. д. В результате получим последовательность, в которой сходятся все вершины. Для краткости обозначим многогранники этой последовательности также через  $P_n$ , а их развертки — через  $R_n$ . Выпуклый многогранник  $P$ , натянутый на пределы вершин (т. е. граница их выпуклой оболочки), будет пределом многогранников  $P_n$ . Докажем, что он удовлетворяет требованиям леммы.

Для этого докажем сначала, что если какое-либо ребро многогранника  $P_n$  не совпадает ни с одним ребром развертки  $R_n$ , то число его пересечений со всеми ее ребрами не может превосходить некоторого  $N_0$ , общего для всех ребер всех многогранников  $P_n$ . (Здесь развертка  $R_n$  рассматривается отображенной на  $P_n$  и является, следовательно, его  $K$ -триангуляцией  $R_n$ .)

Пусть  $L$  — верхняя граница длин ребер многогранников  $P_n$ , а  $h$  — нижняя граница высот треугольников разверток  $R_n$ ;  $h > 0$ , потому что развертки  $R_n$  сходятся к некоторой развертке  $R$ . Пусть, наконец,  $m$  — наибольшее число углов, сходящихся в одной вершине развертки  $R_n$  (одно и то же для всех  $R_n$ , так как они имеют одинаковое строение  $K$ ). Я утверждаю, что можно взять

$$N_0 = \frac{2Lm}{h} + m. \quad (1)$$

Допустим противное. Тогда на некотором многограннике  $P_n$  есть ребро  $a$ , имеющее с ребрами развертки  $R_n$  число пересечений

$$N > \frac{2Lm}{h} + m. \quad (2)$$

Это ребро  $a$  разбивается  $N$  точками пересечения на  $N + 1$  отрезков. Покажем, что среди этих отрезков найдется не менее  $m$  отрезков подряд, имеющих длину  $< h/2$ . Действительно, иначе на каждые  $m$  идущих подряд отрезков приходился хотя бы один с длиной  $\geq h/2$ . Число последовательностей из  $m$  отрезков подряд среди всех  $N + 1$  отрезков равно  $\left[ \frac{N+1}{m} \right]$  (целая часть отношения  $\frac{N+1}{m}$ ); а в силу неравенства (2)

$$\left[ \frac{N+1}{m} \right] \geq \left[ \frac{N}{m} \right] \geq \left[ \frac{2L}{h} + 1 \right] > \frac{2L}{h}.$$

Поэтому, если на каждую такую последовательность приходился хотя бы один отрезок с длиной  $\geq h/2$ , то общая длина этих отрезков уже будет  $\geq \left[ \frac{N+1}{m} \right] \frac{h}{2} > L$ . А это невозможно, потому что вся длина ребра  $a$  не больше  $L$ . Следовательно, последовательность из  $m$  отрезков длины  $< h/2$  существует.

Пусть первый из  $m$  идущих подряд отрезков длины  $< h/2$  — отрезок  $EF$  — лежит в треугольнике  $ABC$  развертки  $R_n$  (рис. 93, а); концы его

удалены от вершины  $A$  меньше, чем на половины сторон  $AB$  и  $AC$ , и тем самым лежат ближе к вершине  $A$ , чем к вершинам  $B$  и  $C$ . Чтобы убедиться в этом, мы проводим из точки  $F$  перпендикуляр  $FH$  к стороне  $AB$ ; так как  $FH \leq EF$ , то  $EF$  только тогда меньше половины высоты, опущенной из вершины  $C$ , когда  $FA < \frac{1}{2} AC$ ; аналогичное соображение верно для точки  $E$ .

Выйдя из треугольника  $ABC$ , ребро  $a$  попадает в соседний треугольник  $ACD$ , где оно опять имеет отрезок, меньший  $h/2$ . Поэтому и в этом треугольнике оно проходит ближе к вершине  $A$ , чем к другим. Так как мы имеем  $m$  таких отрезков подряд, а в вершине  $A$  сходится не более  $m$  углов, то ребро  $a$ , обойдя вокруг вершины  $A$ , возвращается к стороне  $AB$  и даже снова ее пересекает (рис. 93, б).

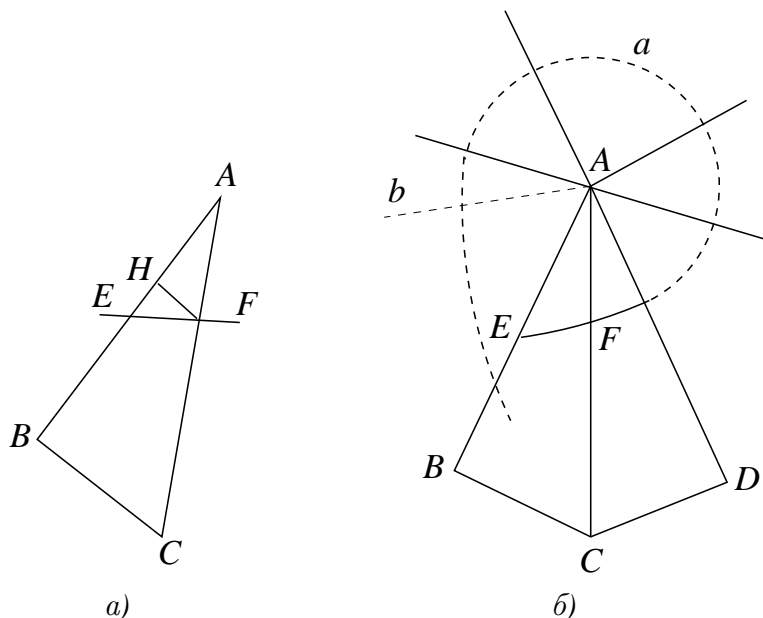


Рис. 93

Это, однако, невозможно. Действительно, вершина  $A$  есть вершина развертки  $R_n$ , а значит, также вершина многогранника  $P_n$ . Поэтому из нее должно исходить в какую-нибудь другую вершину ребро  $b$  многогранника  $P_n$ . Но в силу предыдущего это ребро должно будет пересечь ребро  $a$ , а это невозможно, потому что ребра встречаются только в вершинах.

Итак, мы доказали, что число пересечений любого ребра каждого многогранника  $P_n$  с ребрами развертки  $R_n$  не превосходит числа  $N_0$ , определенное формулой (1). Отсюда ясно, что и обратно, всякое ребро развертки  $R_n$

не может пересекать ребра многогранника  $P_n$  больше чем некоторое число раз, общее для всех многогранников  $P_n$ <sup>9)</sup>.

Теперь перенумеруем ребра каждой развертки  $R_n$ , приписав соответственным ребрам один и тот же номер. Возьмем первые ребра всех этих разверток. Если среди них есть бесконечное число совпадающих с ребрами соответствующих многогранников  $P_n$ , то можно выбрать такую последовательность  $P_{n_i}$ , в которой эти ребра сходятся. Если же бесконечное число первых ребер только пересекает ребра многогранников  $P_n$ , то ввиду ограниченности числа точек пересечения можно выбрать такую последовательность  $P_{n_i}$ , в которой эти точки пересечения сходятся к некоторым предельным положениям. Тогда отрезки между соседними точками пересечений тоже будут сходитья и, следовательно, опять первые ребра разверток будут сходитья. Применяя, далее, то же рассуждение ко вторым ребрам, затем к третьим и т. д., получим в конце концов такую последовательность многогранников  $P_{n_j}$ , в которой все ребра разверток  $R_{n_j}$  сходятся, причем сходятся и их длины.

Пределы этих ребер образуют на предельном многограннике  $P$  сеть того же строения и разбивают его на треугольники, не содержащие внутри себя вершин многогранника. Действительно, треугольники разверток  $R_{n_j}$  составлены из кусков граней многогранников  $P_{n_j}$ , прилегающих друг к другу по отрезкам ребер. Эти куски граней сходятся к некоторым многоугольникам (быть может, вырождающимся) на гранях предельного многогранника  $P$ , и куски  $P$ , составленные из этих многоугольников, ограничены пределами ребер разверток  $R_{n_j}$ . При разворачивании на плоскость эти куски оказываются пределами треугольников разверток  $R_{n_j}$ , т. е. сами являются треугольниками. Тем самым на  $P$  оказывается начерченной некоторая развертка того же строения, что и развертки  $R_{n_j}$ , и имеющая длины ребер, равные пределам длин ребер этих разверток. Следовательно, она и будет предельной разверткой  $R$ . Элементы (вершины, ребра, треугольники) разверток  $R_{n_j}$ , начерченных на многогранниках  $P_{n_j}$ , сходятся к соответственным элементам развертки  $R$ , начерченной на многограннике  $P$ . Это означает, что  $K$ -триангулированные многогранники  $P_{n_j}$  сходятся к  $K$ -триангулированному многограннику  $P$  вместе с их  $K$ -триангуляциями  $R_{n_j}$ .

Лемма доказана.

<sup>9)</sup> Действительно, число ребер любого многогранника  $P_n$  не превосходит некоторого числа  $N_1$ , зависящего лишь от числа вершин, которое у всех  $P_n$  одно и то же. Поэтому общее число пересечений всех ребер не больше  $N_0 N_1$  и, следовательно, на каждое ребро развертки приходится заведомо не более  $N_0 N_1$  пересечений.

§3. СУЩЕСТВОВАНИЕ ЗАМКНУТОГО ВЫПУКЛОГО МНОГОГРАННИКА  
С ДАННОЙ РАЗВЕРТКОЙ

**Теорема.** *Из всякой развертки, гомеоморфной сфере и имеющей суммы углов в вершинах  $\leq 2\pi$ , можно склеить замкнутый выпуклый многогранник<sup>10)</sup>.*

Согласно лемме 2 §1, каждая такая развертка изометрична развертке «положительной кривизны», у которой во всех вершинах суммы углов  $< 2\pi$ . Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением только таких разверток. Далее, согласно лемме 1 §1, развертка только с тремя вершинами реализуема дважды покрытым треугольником. Поэтому доказательство можно вести индукцией по числу вершин развертки: считая, что теорема доказана для всех разверток с числом вершин  $< e$  ( $e > 3$ ), будем доказывать ее для разверток с числом вершин, равным  $e$ . Наконец, при данном  $e$ , очевидно, достаточно ограничиться рассмотрением разверток любого данного строения  $K$ . Таким образом, нам нужно доказать следующее:

*Пусть  $K$  — комплекс с числом вершин  $e > 3$ , допускающий превращение в развертку положительной кривизны<sup>11)</sup>.*

*Если всякая развертка положительной кривизны с числом вершин  $< e$  реализуема, то всякая развертка  $R$  положительной кривизны строения  $K$  также реализуема.*

Рассмотрим многообразие  $M$  разверток  $R$  и многообразии  $K$   $K$ -триангулированных многогранников  $P$ . Так как каждому  $K$ -триангулированному многограннику  $P$  по определению соответствует определенная начерченная на нем развертка  $R$ , то тем самым определяется естественное отображение  $\varphi$  многообразия  $P$  в многообразии  $M$ . Нам нужно доказать, что  $\varphi$  есть отображение на все  $M$ ; этим и будет доказано, что каждой развертке  $R$  отвечает склеенный из нее многогранник  $P$ . По лемме 2 §2 многообразия  $M$  и  $P$  имеют одно и то же число измерений, а потому можно воспользоваться леммой об отображении (§2 глава II). Согласно этой лемме, для установления того, что  $\varphi$  отображает  $P$  на все  $M$ , достаточно доказать следующие свойства этого отображения:

- 1) во всякой связной компоненте многообразия  $M$  имеются образы точек многообразия  $P$ , т. е. реализуемые развертки  $R$ ;
- 2)  $\varphi$  взаимно однозначен;

<sup>10)</sup>В [18] автор доказывал эту теорему иным методом. Позже предложены и другие доказательства. Одно из них принадлежит Л. А. Люстернику и состоит в приближении метрики (на сфере  $S^2$ ), заданной разверткой, гладкими римановыми метриками положительной кривизны и их реализацией по Вейлю — Леви. Более интересны прямое доказательство, предложенное Ю. А. Волковым [84, 91], и конструктивное доказательство, предложенное А. И. Бобенко и И. В. Изместьевым в 2006 г. [248]. — Прим. В. А. Залгаллера.

<sup>11)</sup>В §1 было показано на примере, что не всякий комплекс обладает этим свойством.

3)  $\varphi$  непрерывно;

4) если точки  $R_n$  из многообразия  $\mathbf{M}$  являются образами точек  $P_n$  из многообразия  $\mathbf{P}$  и сходятся к точке  $R$  ( $R \in \mathbf{M}$ ), то существует точка  $P$  из  $\mathbf{P}$ , отображающаяся в  $R$ , и имеется подпоследовательность  $P_{n_j}$ , сходящаяся к  $P$ . Иными словами, если развертки  $R_n$  сходятся к  $R$  и из них склеены многогранники  $P_n$ , то существуют  $K$ -триангулированный многогранник  $P$  и такая подпоследовательность  $P_{n_j}$  из многогранников  $P_n$ , что многогранники  $P_{n_j}$  сходятся к  $P$  вместе с их  $K$ -триангуляциями  $R_{n_j}$ .

Это последнее утверждение как раз составляет содержание леммы 3 § 2, и поэтому остается доказать первые три свойства отображения  $\varphi$ .

Уже в § 2 было оговорено, что существование многогранников, допускающих развертки строения  $K$ , заранее не известно, т. е. многообразие  $\mathbf{P}$  могло бы быть пустым, и тогда отображение  $\varphi$  было бы лишено смысла. Однако первое из перечисленных требований состоит в том, что во всякой связной компоненте многообразия  $\mathbf{M}$  имеются реализуемые развертки. А это, очевидно, включает в себя утверждение, что  $K$ -триангулируемые многогранники существуют. Следовательно, доказательство выполнения первого требования будет содержать в себе также доказательство непустоты многообразия  $\mathbf{P}$ . Однако мы докажем сначала второе и третье свойства отображения  $\varphi$ , потому что они сразу следуют из уже полученных результатов.

*Отображение  $\varphi$  взаимно однозначно.* Действительно, однозначность отображения  $\varphi$  содержится в его определении, потому что оно сопоставляет каждому  $K$ -триангулированному многограннику развертку, являющуюся его  $K$ -триангуляцией. Вместе с тем, если два многогранника  $P_1$  и  $P_2$  имеют одну и ту же развертку  $R$ , то тем самым между ними установлено изометрическое соответствие, переводящее развертку  $R$ , начерченную на  $P_1$ , в развертку  $R$ , начерченную на  $P_2$ . По теореме 1 § 3 главы III такое изометрическое отображение многогранника  $P_1$  на  $P_2$  осуществляется путем движения или движения и отражения. А по самому определению равенства  $K$ -триангулированных многогранников это означает, что  $K$ -триангулированные многогранники  $P_1$  и  $P_2$  равны. Следовательно, неравным  $K$ -триангулированным многогранникам отвечают разные развертки, так что отображение  $\varphi$  взаимно однозначно.

*Отображение  $\varphi$  непрерывно.* Действительно, это свойство отображения  $\varphi$  содержится в самом определении окрестностей в многообразии  $\mathbf{P}$ . Согласно этому определению, окрестность  $K$ -триангулированного многогранника  $P_0$  состоит из многогранников с близкими  $K$ -триангуляциями. Это означает, что близким  $K$ -триангулируемым многогранникам отвечают близкие развертки, т. е. отображение  $\varphi$  непрерывно.

Остается доказать, что во всякой связной компоненте многообразия  $\mathbf{M}$  имеются реализуемые развертки.

Для доказательства рассмотрим, так же как в § 1, многообразие  $M^0$  в с е х разверток строения  $K$ . По лемме 3 § 1 многообразию  $M$  составляет часть многообразия  $M^0$  и имеет в нем границу (потому что, по предположению, число вершин  $e$  комплекса  $K$  больше трех).

Граница многообразия  $M$  состоит из разверток, у которых суммы углов во всех вершинах  $\leq 2\pi$  и в некоторых из них  $= 2\pi$ . По лемме 2 § 1 каждая такая развертка изометрична развертке с числом вершин, меньшим  $e$ , а по предположению индукции все такие развертки реализуемы. Следовательно, граница многообразия  $M$  в  $M^0$  состоит из реализуемых разверток.

Пусть  $M'$  — какая-нибудь связная компонента многообразия  $M$ . Согласно лемме 5 § 1, на ее границе существует такая точка, т. е. развертка  $R_0$ , в малой окрестности  $U$  которой нет точек, т. е. разверток из других связных компонент многообразия  $M$ . Так как развертка  $R_0$  лежит на границе многообразия  $M$ , то она реализуема посредством некоторого выпуклого многогранника  $P_0$ . Однако не все вершины развертки  $R_0$  являются вершинами этого многогранника, потому что при некоторых из них суммы углов равны  $2\pi$ . Этим вершинам соответствуют на многограннике  $P_0$  точки  $A_1, \dots, A_l$ , лежащие внутри его ребер или граней. Выдвинув эти точки наружу на достаточно малое расстояние, построим выпуклую оболочку совокупности этих смещенных точек и вершин многогранника  $P_0$ . Граница этой выпуклой оболочки будет выпуклым многогранником  $P$  с вершинами, близкими к вершинам развертки  $R_0$ , начерченной на  $P_0$ , причем точкам  $A_1, \dots, A_l$  будут соответствовать уже истинные вершины многогранника  $P$ . Согласно лемме 1 § 2, многогранник  $P$  допускает  $K$ -триангуляцию  $R$ , близкую к развертке  $R_0$ . Но все вершины этой  $K$ -триангуляции лежат в истинных вершинах многогранника  $P$ , а потому суммы углов во всех вершинах развертки  $R$  строго меньше  $2\pi$ . Следовательно, развертка  $R$  принадлежит многообразию  $M$ . А так как она близка к развертке  $R_0$  и вблизи развертки  $R_0$  нет иных разверток из  $M$ , кроме принадлежащих рассматриваемой связной компоненте  $M'$ , то  $R$  принадлежит этой связной компоненте. Но развертка  $R$  реализована многогранником  $P$ . Следовательно, в любой связной компоненте многообразия  $M$  имеются реализуемые развертки.

Таким образом, доказано, что все условия леммы об отображениях выполнены, и тем самым доказана наша теорема о существовании выпуклого многогранника с данной разверткой.

#### § 4. СУЩЕСТВОВАНИЕ БЕСКОНЕЧНОГО ВЫПУКЛОГО МНОГОГРАННИКА С ДАННОЙ РАЗВЕРТКОЙ

1. Как было доказано в § 6 и 7 главы I, развертка бесконечного выпуклого многогранника необходимо удовлетворяет двум условиям: 1) «условие положительности кривизны», требующее, чтобы суммы углов вокруг вер-



шин развертки не превосходили  $2\pi$ , и 2) развертка гомеоморфна плоскости. Согласно теореме 10 § 7 главы I, это второе условие равносильно следующим двум:

2а) развертка содержит хотя бы один бесконечный многоугольник,

2б) развертка имеет один бесконечный конец, т. е. если переходить от одного бесконечного многоугольника к другому, склеиваемому с первым по бесконечной стороне, от него к следующему и т. д., то вернемся к исходному многоугольнику, исчерпав все бесконечные многоугольники развертки. (В частности, развертка может содержать только один бесконечный многоугольник, и тогда такая циклическая последовательность состоит из него одного: он склеивается сам с собой.)

Условия 1, 2а и 2б легко проверяемы для каждой данной развертки.

Теперь мы докажем, что они достаточны для того, чтобы из развертки склеивался бесконечный выпуклый многогранник.

**Теорема.** Если развертка удовлетворяет условиям 1, 2а и 2б, то из нее можно склеить бесконечный выпуклый многогранник.

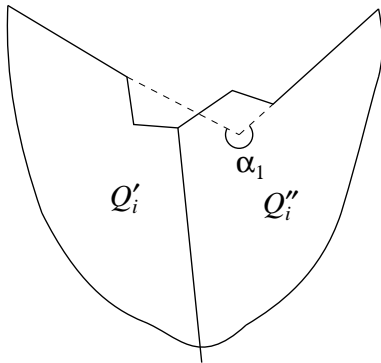


Рис. 94

то мы считаем  $\alpha_i = 0$ . Если  $\alpha_i \geq \pi$ , то проведем в многоугольнике  $Q_i$  из надлежащей вершины полупрямую, делящую его на два многоугольника  $Q'_i, Q''_i$  с углами  $\alpha'_i, \alpha''_i$ , равными  $\alpha_i/2$  (рис. 94). Разбивая таким образом все многоугольники  $Q_i$ , у которых  $\alpha_i \geq \pi$ , мы получим развертку, в которой у всех бесконечных многоугольников углы  $\alpha_i < \pi$ . Поэтому можно предполагать, что рассматриваемая развертка — именно такая.

**3.** Пусть у многоугольника  $Q_i$  бесконечные стороны параллельны. Если они отождествляются не друг с другом, а со сторонами других многоугольников, то, подклеив  $Q_i$  к одному из этих многоугольников  $Q_j$ , получим многоугольник  $Q_i + Q_j$ . Угол между бесконечными сторонами многоугольника  $Q_i + Q_j$  — тот же самый, что у  $Q_j$ . (При подклеивании  $Q_i$  к  $Q_j$  конечные части этих многоугольников могут, вообще говоря, перекрываться; но этого

**2.** Приступим к доказательству сформулированной теоремы.

Пусть  $R$  — какая-либо данная развертка, удовлетворяющая условиям 1, 2а и 2б.

Рассмотрим какой-либо бесконечный многоугольник  $Q_i$  нашей развертки. Если его бесконечные стороны не параллельны, то их можно продолжить до пересечения друг с другом, и тогда угол, содержащий бесконечную часть  $Q_i$ , который они образуют, мы называем углом  $\alpha_i$  между бесконечными сторонами многоугольника  $Q_i$ . Если бесконечные стороны многоугольника параллельны,

можно избежать, отрезав эти части и приняв их за новые многоугольники развертки.) Производя такую операцию подклеивания со всеми бесконечными многоугольниками с параллельными бесконечными сторонами, придем к развертке  $R$ , в которой если и есть бесконечный многоугольник с параллельными сторонами, то эти стороны отождествлены между собой. Но так как бесконечные многоугольники образуют одну циклическую последовательность, если идти через их отождествляемые бесконечные стороны, то можно считать, что в развертке  $R$  либо вовсе нет бесконечного многоугольника с параллельными сторонами, либо есть один такой многоугольник, а других бесконечных многоугольников нет.

Рассмотрим оба случая отдельно.

4. Предварительно докажем одну простую лемму, которая нам понадобится также в § 1 главы V.

**Лемма.** Пусть развертка  $R$ , гомеоморфная сфере, состоит из двух частей  $R_1$  и  $R_2$ , имеющих общую границу  $L$ , причем существует изометрическое отображение развертки  $R$  на себя, меняющее местами  $R_1$  и  $R_2$  и оставляющее неизменной их границу  $L$ . Тогда замкнутый выпуклый многогранник  $P$ , склеенный из развертки  $R$ , имеет плоскость симметрии, содержащую ломаную  $L$ .

Действительно, многогранник  $P$  состоит из двух частей  $P_1$  и  $P_2$ , соответствующих разверткам  $R_1$  и  $R_2$ . Согласно условию теоремы, многогранник  $P$  допускает изометрическое отображение на себя, состоящее в перемене местами соответствующих точек его частей  $P_1$ ,  $P_2$ , причем точки их общей границы  $L$  остаются на месте. Всякое же изометрическое отображение замкнутого выпуклого многогранника сводится к движению или движению и отражению. В данном случае движение исключается, поскольку все точки замкнутой ломаной  $L$ , разделяющей  $P_1$  и  $P_2$ , остаются на месте. Следовательно, перемена местами частей  $P_1$  и  $P_2$  осуществляется отражением в плоскости, а так как при этом неподвижными остаются только точки этой плоскости, то ломаная  $L$  лежит в ней, и лемма доказана.

5. Пусть в развертке  $R$  имеется единственный бесконечный многоугольник  $Q$  с параллельными сторонами  $a'$ ,  $a''$  и пусть  $A'$ ,  $A''$  — вершины, из которых они исходят. Отложим на этих сторонах равные отрезки  $A'B'$ ,  $A''B''$  настолько большой длины, чтобы отрезок  $B'B''$  проходил внутри развернутого плоскости многоугольника  $Q$ . Отрезав от многоугольника  $Q$  бесконечную часть, отсекаемую отрезком  $B'B''$ , получим развертку  $R_1$  из конечных многоугольников. В этой развертке только сторона  $B'B''$  не отождествляется ни с какой другой стороной. Возьмем второй экземпляр  $R_2$  такой же развертки и отождествим у разверток  $R_1$  и  $R_2$  свободные стороны  $B'B''$ , совмещая одновременно соответствующие вершины. Тогда получится развертка  $R_1 + R_2$ , симметричная относительно линии  $B'B''$  (рис. 95). Сумма

углов, сходящихся в вершине  $B(= B' = B'')$ , будет равна  $2\pi$ . Кроме того, развертка  $R_1 + R_2$ , очевидно, гомеоморфна сфере. Следовательно,  $R_1 + R_2$  удовлетворяет всем условиям, каким должна удовлетворять развертка замкнутого выпуклого многогранника, и из нее можно склеить такой многогранник. Этот многогранник состоит из двух частей  $P_1$  и  $P_2$  соответственно двум половинам развертки  $R_1$  и  $R_2$ . По доказанной лемме многогранник  $P_1 + P_2$  симметричен относительно некоторой плоскости  $T$ , содержащей замкнутую ломаную  $L = B'B''$  (точки  $B'$  и  $B''$  склеиваются в одну  $B$ ).

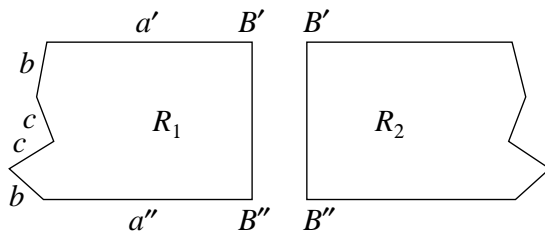


Рис. 95

Из того, что полный угол вокруг всякой точки ломаной  $L$  равен  $2\pi$ , следует, что в плоскости  $T$  нет вершин многогранника  $P_1 + P_2$  и что  $T$  может пересекаться лишь отдельными ребрами, которые по симметрии многогранника  $P_1 + P_2$  перпендикулярны к  $T$ . Это позволяет отбросить часть  $P_2$ , а на  $P_1$  грани,

подходящие к  $T$ , продолжить до бесконечности. Присоединяемая при этом к  $P_1$  бесконечная призма, как это легко проследить, будет как раз склеена из той бесконечной полосы, которую мы отрезали раньше от многоугольника  $Q$ . Полученный из  $P_1$  продолжением граней бесконечный многоугольник реализует развертку  $R$ .

**6.** Пусть теперь в развертке  $R$  нет бесконечных многоугольников с параллельными сторонами. Пусть  $A_1, \dots, A_n$  — вершины, из которых исходят бесконечные стороны. Отложим на них равные отрезки  $A_i B_i$  столь большой длины  $l$ , чтобы в бесконечных многоугольниках  $Q_i$  отрезки  $B_i B_{i+1}$  проходили каждый целиком внутри своего многоугольника  $Q_i$ . Отрезав от многоугольников  $Q_i$  их бесконечные части, отсекаемые отрезками  $B_i B_{i+1}$ , получим развертку  $R$  из конечных многоугольников. В этой развертке только стороны  $B_i B_{i+1}$  не отождествляются ни с какими другими (рис. 96).

Пусть  $Q'_i$  — отделенная отрезком  $B_i B_{i+1}$  конечная часть многоугольника  $Q_i$ . Если увеличивать длину  $l$  сторон  $A_i B_i$  и  $A_{i+1} B_{i+1}$  и одновременно подвергать  $Q'_i$  подобному сжатию так, чтобы длины сторон  $A_i B_i$  и  $A_{i+1} B_{i+1}$  оставались постоянными, то многоугольник  $Q'_i$  будет сходиться к равнобедренному треугольнику. Отсюда легко заключить, что при увеличении длины  $l$  углы при вершинах  $B_i$  и  $B_{i+1}$  в многоугольнике  $Q'_i$  сходятся к углам такого равнобедренного треугольника и, следовательно, становятся в конце концов меньше некоторого  $\alpha < \pi/2$ . Поэтому, если выбрать  $l$  достаточно большим, то при всех вершинах  $B_i$  многоугольников  $Q'_i$  углы будут меньше

$\pi/2$  и суммы их при каждой общей вершине  $B_i$  будут меньше  $\pi$ . Выберем настолько большое  $l$  и рассмотрим соответствующую развертку  $R_1$ .

Возьмем второй экземпляр  $R_2$  такой же развертки и отождествим у разверток  $R_1$  и  $R_2$  их свободные ребра  $B_i B_{i+1}$ . Получим развертку  $R_1 + R_2$ , симметричную относительно линии  $B_1 B_2 \dots B_n$ , составленной из этих ребер. Так как в развертке  $R_1$  углы при вершинах  $B_i$  были меньше  $\pi$ , то в развертке  $R_1 + R_2$  они будут меньше  $2\pi$ . Наконец, развертка  $R_1 + R_2$ , очевидно, гомеоморфна сфере<sup>12)</sup>.

Следовательно, из нее можно склеить замкнутый выпуклый многогранник. Этот многогранник состоит из двух частей  $P_1$  и  $P_2$  соответственно двум частям  $R_1$  и  $R_2$  его развертки. Так же как и выше, из взаимной симметрии этих частей развертки следует, что многогранник  $P_1 + P_2$  имеет некоторую плоскость симметрии  $T$ , разделяющую его части  $P_1$  и  $P_2$ .

Будем повторять это построение при все более увеличивающихся длинах  $l$  (которые мы при построении откладывали на бесконечных ребрах развертки). На получаемых многогранниках  $P_1 + P_2$  будем рассматривать лишь части  $P_1$ . Последние при  $l \rightarrow \infty$ , как это наглядно почти очевидно, дадут в пределе некоторый бесконечный многогранник, который и будет реализовывать развертку  $R$ .

Надо лишь показать, что из получаемых при увеличении  $l$  многогранников  $P_1$  действительно можно выбрать подпоследовательность многогранников, сходящихся к некоторому предельному многограннику  $P$ . (Метрика его заведомо будет совпадать с метрикой развертки  $R$ , поскольку метрики на многогранниках  $P_1$  должны сходиться и к метрике на  $P$  и к метрике в  $R$ .)

Рассмотрим подробнее возможную структуру многогранника  $P_1 + P_2$ .

Внутри части  $P_1$  будет, очевидно, ровно столько вершин, сколько было существенных вершин  $A_i$  у исходной развертки  $R$ ; обозначим их число через  $e$ . Граница части  $P_1$  представляет собой многоугольник, лежащий в

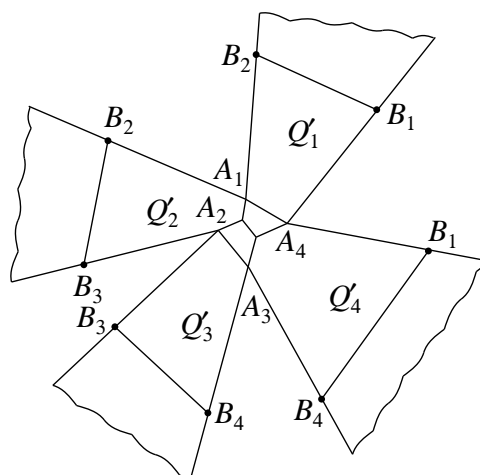


Рис. 96

<sup>12)</sup> Если  $f, k, e$  — числа многоугольников, ребер и вершин развертки  $R$ , а  $n$  — число ее бесконечных многоугольников, то в развертке  $R_1 + R_2$  числа многоугольников, ребер и вершин будут  $\bar{f} = 2f, \bar{k} = 2k + n, \bar{e} = 2e + n$  и потому  $\bar{f} - \bar{k} + \bar{e} = 2(f - k + e) = 2$ .

плоскости  $T$ . Вершины этого многоугольника могут быть двух сортов. Во-первых, точки  $D_i$ , не являющиеся вершинами многогранника  $P_1 + P_2$ . Через каждую такую точку проходит ребро многогранника  $P_1 + P_2$ , по симметрии перпендикулярное к  $T$  (рис. 97). Такое ребро должно заканчиваться в одной из  $e$  вершин  $A_i$ , а потому таких ребер во всяком случае не более чем  $e$ . Во-вторых, точки  $C_j$ , являющиеся вершинами многогранника  $P_1 + P_2$ . Каждая из них может получаться лишь из некоторой точки  $B_i$  развертки, а потому этих вершин не больше чем бесконечных многоугольников  $Q_i$  в развертке  $R$ ; пусть их будет  $m$  штук. Из каждой такой вершины внутри  $P_1$  могут идти некоторые ребра, но общее число их во всяком случае не превышает  $em$ .

Пусть теперь  $P_1^n$  — многогранники, полученные для все больших  $l_n \rightarrow \infty$ .

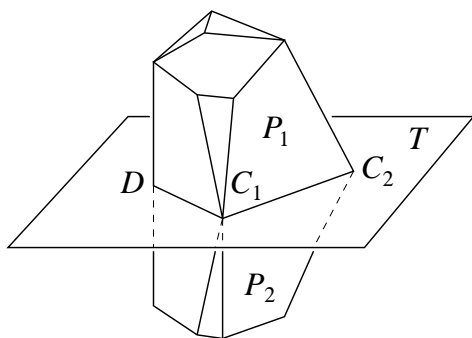


Рис. 97

некоторым точкам  $A_i$ ; во-вторых, ребра  $A_i^n D_i^n$ , перпендикулярные к  $T^n$ , если только таковые существуют, исходят из сходящихся вершин  $A_i^n$ , а потому сходятся к параллельным друг другу лучам, исходящим из точек  $A_i$ ; в-третьих, ребра  $A_i^n C_j^n$  существуют для одних и тех же пар  $(i, j)$  и их направления сходятся к некоторым предельным лучам, исходящим из точек  $A_i$ .

Сами многогранники  $P_1^n$ , как это читатель сам может проследить, сходятся к выпуклой оболочке совокупности предельных вершин  $A_i$  и исходящих из них предельных лучей. Эта оболочка и даст многогранник  $P$ , реализующий развертку  $R$ . На рис. 97а изображен для примера, многогранник, полученный предельным переходом от многогранников рис. 97.

## § 5. СУЩЕСТВОВАНИЕ БЕСКОНЕЧНОГО МНОГОГРАННИКА С ДАННОЙ РАЗВЕРТКОЙ И ДАННЫМ ПРЕДЕЛЬНЫМ УГЛОМ

1. В § 3 главы III было доказано, что бесконечный выпуклый многогранник с кривизной, равной  $2\pi$ , определяется своей разверткой однозначно (с точностью до движения или движения и отражения). Поэтому, если

Передвинем все  $P_1^n$  в такое положение, чтобы одна какая-либо вершина, например  $A_1^n$ , у всех них совпала, а внешние нормали к плоскостям  $T^n$  были одинаково направлены. При этом все внутренние для части  $P_1^n$  вершины многогранника  $P_1^n + P_2^n$  расположатся в ограниченной части пространства, и теперь уже очевидно существование подпоследовательности многогранников  $P_1^n$  (мы сохраняем для простоты их нумерацию), для которых, во-первых, все вершины  $A_i^n$  сходятся к

развертка имеет кривизну  $2\pi$ , то к теореме существования, доказанной в предыдущем параграфе, нечего добавить. Заметим, что развертка с кривизной  $2\pi$  характеризуется тем, что в ней все бесконечные многоугольники имеют параллельные бесконечные стороны; это соответствует первому случаю, рассмотренному в предыдущем параграфе. Но если кривизна развертки меньше  $2\pi$ , то из нее, оказывается, можно склеить не один, а бесконечно много неравных выпуклых многогранников с разными предельными углами.

Прежде чем сформулировать соответствующую теорему, напомним некоторые определения. Лучом в развертке  $R$  или на многограннике  $P$  мы называем бесконечную в одну сторону линию, являющуюся кратчайшей на всяком конечном отрезке. При бесконечном подобном сжатии к какой-нибудь точке бесконечный выпуклый многогранник  $P$  переходит в многогранный угол — предельный угол  $V$  многогранника  $P$ . Если кривизна многогранника  $P$  равна  $2\pi$ , то  $V$  вырождается в полупрямую, и этот случай мы здесь исключаем; вообще же  $V$  может быть и дважды покрытым плоским углом. При сжатии многогранника  $P$  в угол  $V$  любой луч  $L$  на  $P$  переходит в одну из образующих угла  $V$  — предельную образующую луча  $L$ . Если на многограннике  $P$  была задана ориентация, то в пределе она переносится на угол  $V$ . (См. глава III, § 4, п° 5, лемма 1.)

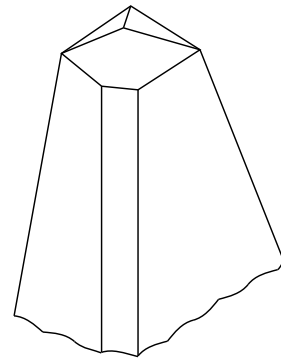


Рис. 97а

**Теорема.** Пусть развертка  $R$ , удовлетворяющая условиям, необходимым для развертки бесконечного выпуклого многогранника, имеет кривизну  $< 2\pi$ . Пусть эта развертка ориентирована и в ней задан луч  $L$ . (Начиная с некоторого места, он представляет собой полупрямую, проходящую по одному из ее бесконечных многоугольников<sup>13)</sup>.) Пусть, наконец,  $V$  — выпуклый многогранный угол с кривизной, равной кривизне развертки  $R$ , и с данным обходом вокруг вершины, а  $\bar{L}$  — одна из его образующих. Существует бесконечный выпуклый многогранник  $P$ , склеенный из развертки  $R$ , имеющий  $V$  своим предельным углом и такой, что линия, соответствующая на нем лучу  $L$ , имеет  $\bar{L}$  в качестве предельной образующей, а ориентация многогранника  $P$ , определенная ориентацией развертки  $R$ , совпадает с ориентацией угла  $V$ .

Такой многогранник  $P$  — единственный с точностью до переноса. (Мы предполагаем, что кривизна развертки  $R$  больше нуля; иначе утверждение единственности не верно.)

Утверждение о единственности содержится в теореме 3 § 4 главы III.

<sup>13)</sup>См. гл. III, § 3, лемма 2.

Действительно, эта теорема говорит, что изометрическое отображение одного многогранника  $P$  на другой, индуцирующее конгруэнтное отображение их предельных углов, можно осуществить движением или движением и отражением. В данном случае, поскольку заданы развертка, предельный угол  $V$ , ориентация и предельная образующая некоторого луча  $L$ , — отображение многогранника  $P$  на другой многогранник  $P_1$  с теми же данными необходимо является изометрическим и индуцирует тождественное преобразование угла  $V$ . Последнее следует из того, что при отображении  $P$  на  $P_1$  угол  $V$ , предельная образующая и ориентация должны сохраняться. Следовательно, отображение  $P$  на  $P_1$  сводится к движению или движению и отражению; отражение, однако, исключается тем требованием, что ориентация многогранника  $P_1$  должна совпадать с данной ориентацией угла  $V$ . Вращение же исключено потому, что оно вызывает вращение предельного угла. Остается только перенос, поскольку предельный угол связан с многогранником с точностью до переноса.

Таким образом, в сформулированной теореме дается полная система данных, определяющих многогранник  $P$ . Можно еще заметить, что задание луча  $L$  и его предельной образующей  $\bar{L}$ , очевидно, эквивалентно заданию другого луча  $L_1$  и другой предельной образующей  $\bar{L}_1$ , если только углы между  $L$  и  $L_1$ ,  $\bar{L}$  и  $\bar{L}_1$ , отсчитанные в направлениях, заданных ориентацией развертки  $R$  и угла  $V$ , равны.

**2.** Так как при данной развертке  $R$  предельный угол  $V$  и образующую  $\bar{L}$  можно выбирать достаточно произвольно, то, меняя их, будем получать новые многогранники с той же разверткой. Таким образом, в данной теореме содержится уже утверждение о возможности изгибания бесконечного выпуклого многогранника с кривизной  $< 2\pi$ . Этот вопрос мы рассмотрим подробнее в § 2 главы V, а сейчас дадим изящный пример изгибания бесконечного выпуклого многогранника.

Пусть даны правильный  $n$ -угольник  $Q$  и правильный  $n$ -гранный угол  $V$ , вершину которого поместим в центре многоугольника так, чтобы ось симметрии угла  $V$  была перпендикулярна к плоскости  $Q$  (рис. 98).

Поверхность выпуклой оболочки полученной таким образом фигуры  $Q + V$  будет бесконечным выпуклым многогранником  $P$  с предельным углом  $V$  и с вершинами только в вершинах многоугольника  $Q$  (глава I, § 4, теоремы 5 и 5а).

Фигура  $Q + V$  имеет  $n$ -кратную ось симметрии, а потому ее имеет и многогранник  $P$ , как бы ни поворачивать угол  $V$  вокруг его оси. Сумма кривизн вершин многогранника  $P$  равна кривизне его предельного угла  $V$  (глава I, § 5, теорема 3). А так как вершины многогранника переходят друг в друга при вращении вокруг оси симметрии, то кривизны их составляют всегда одну  $n$ -ю кривизны угла  $V$  независимо от поворота угла  $V$ .

Если вращать угол  $V$  вокруг оси, то многогранник  $P$  будет изменяться. Однако его грань  $Q$  будет неизменной и по доказанному неизменными будут кривизны его вершин. Поэтому полные углы на его бесконечной части и конечные стороны ее остаются неизменными. Это означает, что хотя бесконечная часть и меняет свою форму, но ее развертка остается неизменной. Чтобы убедиться в этом, достаточно разрезать ее по лучу и развернуть на плоскость; тогда получится бесконечный многоугольник с данными углами и данными конечными сторонами.

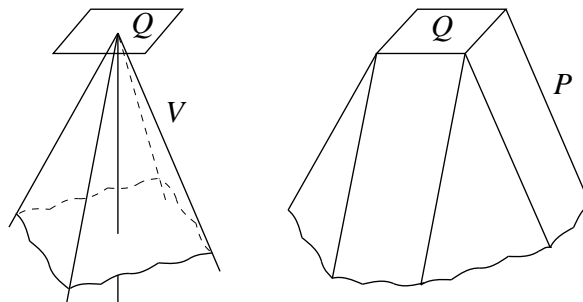


Рис. 98

Таким образом, вращению угла  $V$  вокруг оси отвечает изгибание многогранника  $P$ , при котором его грань  $Q$  остается вовсе неподвижной. Интересно проследить это изгибание наглядно. Здесь предельный угол и ориентация не меняются, но меняется соответствие лучей на угле  $V$  и на бесконечной части многогранника  $P$ .

Тот же результат получится, если вместо  $Q$  взять выпуклую шапку с симметричным основанием, а угол  $V$  взять не обязательно правильным, но все же так, чтобы он имел такую же ось симметрии, как основание шапки.

**3.** Сформулированная выше общая теорема принадлежит С. П. Оловянишникову [156]; данное им доказательство использует существование замкнутого выпуклого многогранника с данной разверткой, подобно доказательству теоремы предыдущего параграфа. Однако его можно осуществить прямо на основании леммы об отображении. Мы дадим здесь это независимое доказательство, хотя доказательство С. П. Оловянишникова несколько проще, поскольку оно *уже использует* теорему о замкнутом многограннике. В заключение мы покажем, как тем же путем можно дать независимое доказательство существования бесконечного выпуклого многогранника с данной разверткой, имеющей кривизну, равную  $2\pi$ .

**4.** Мы будем рассматривать развертки, удовлетворяющие условиям, необходимым для разверток бесконечного выпуклого многогранника с кривизной  $\omega > 0$  и  $< 2\pi$ . Эти развертки гомеоморфны плоскости. Отобразим



такую развертку  $R$  на (топологическую) плоскость  $E$  или, иными словами, вообразим развертку  $R$  склеенной, и пусть  $A_1, \dots, A_e$  — точки плоскости  $E$ , соответствующие тем вершинам развертки, где суммы углов  $< 2\pi$ . Если такая точка — только одна, то, разрезая плоскость  $E$ , т.е. склеенную развертку  $R$ , по лучу, исходящему из этой точки, получим плоский угол, из которого можно склеить любой многогранный угол кривизны  $\omega$ . Следовательно, при  $e = 1$  теорема верна, и дальше ее можно доказывать индукцией по числу вершин.

**5.** Пусть  $e > 1$ . Проведем из точки  $A_1$  луч  $a$ , а также кратчайшие  $A_1A_i$  во все прочие точки  $A_2, \dots, A_e$ . Разрезав плоскость  $E$  по этим линиям, получим бесконечный (абстрактный) многоугольник  $Q$ . У него имеются две вершины  $A_1$ , из которых исходят бесконечные стороны  $a$ . Соединим эти точки линией, кратчайшей в многоугольнике  $Q$  (рис. 99). Согласно

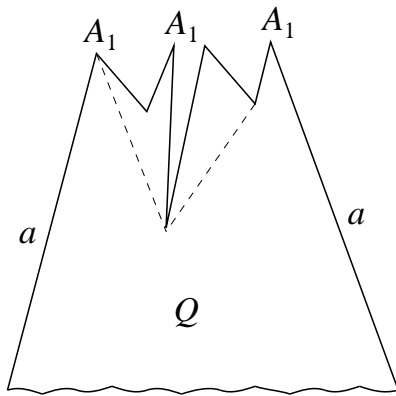


Рис. 99

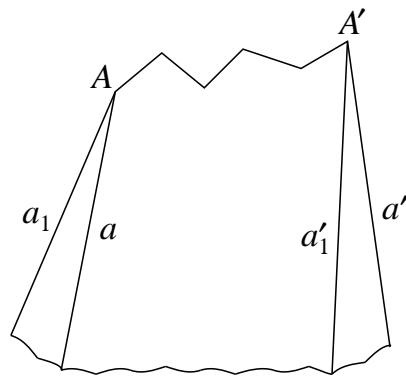


Рис. 100

теореме 1 § 8 главы I, она будет геодезической ломаной с вершинами только в вершинах многоугольника или, в частности, вовсе без вершин, и отсечет от многоугольника  $Q$  конечную часть, состоящую, может быть, не из одного, а из нескольких многоугольников. Каждую из этих частей мы разбиваем диагоналями на треугольники (что возможно в силу теоремы 5 § 8 главы I). В результате получается развертка  $R_1$ , изометричная  $R$  и такая, что 1) в ней нет «лишних» вершин, где сумма углов равна  $2\pi$ , 2) она состоит из треугольников и одного бесконечного многоугольника. Следовательно, достаточно ограничиться развертками, не имеющими «лишних» вершин.

Отвлекаясь от метрических соотношений, мы превращаем развертку в «комплекс», гомеоморфный плоскости; этот комплекс состоит из топологических треугольников и одного топологического многоугольника, открытого с одной стороны. Обратное превращение такого комплекса в развертку

сводится к заданию 1) длин сторон треугольников и 2) углов бесконечного многоугольника (тогда заданы углы и стороны этого многоугольника и он, следовательно, вполне определен). Однако если менять углы бесконечного многоугольника при его вершинах, из которых исходят бесконечные стороны, оставляя неизменной только сумму этих углов, то мы будем получать изометричные развертки<sup>14)</sup>. Поэтому представляется более удобным склеить бесконечные стороны; тогда бесконечный многоугольник превратится в фигуру, гомеоморфную бесконечному конусу с исключенной окрестностью вершины; эту фигуру мы назовем «воронкой». Воронка вполне определяется заданием ее сторон и углов, потому что, разрезая воронку по какому-нибудь лучу, получаем определенный бесконечный многоугольник.

Таким образом, мы будем рассматривать комплекс  $K$ , гомеоморфный плоскости и составленный из топологических треугольников и одной топологической воронки. Превращение этого комплекса в развертку сводится к заданию 1)  $k$  длин его ребер, т. е. сторон треугольников  $r_1, \dots, r$ , и 2)  $n$  углов воронки  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , что составляет всего  $k + n$  переменных. Если развертка  $R$  — положительной кривизны, т. е. суммы углов во всех вершинах  $< 2\pi$ , то при малых изменениях переменных  $r_i$  и  $\alpha_j$  это условие не нарушается. Вместе с тем малые изменения этих переменных могут быть произвольными. Для длин ребер это очевидно. Для изменения угла  $\alpha_j$  проведем из соответствующей вершины воронки какой-либо луч и разрежем по нему воронку. К обеим сторонам разреза можно подклеить стороны любого плоского угла, откуда ясно, что углы допускают любые приращения. Если разрезанную воронку развернуть на плоскость, то получим бесконечный многоугольник (не исключая, конечно, что он может перекрываться сам с собой). Бесконечные стороны его не параллельны, так как иначе кривизна развертки равнялась бы  $2\pi$ . Поэтому можно от этого многоугольника отрезать бесконечный угловой сектор и тем самым уменьшить угол  $\alpha_j$  воронки. Таким образом, множество всех разверток  $R$  положительной кривизны и данного строения  $K$  естественно оказывается  $(k + n)$ -мерным многообразием  $M$ .

**6.** Однако к заданию развертки мы должны присоединить еще задание многогранного угла  $V$ , который должен служить предельным углом соответствующего многогранника. Мы будем рассматривать все возможные выпуклые многогранные углы с данным числом  $h$  ребер, имея в виду действительные ребра, т. е. ребра, двугранные углы при которых  $< \pi$ . При заданной вершине такой угол определяется направлениями его ребер, т. е.

<sup>14)</sup> Это очевидно из рис. 100. Изменение углов при вершинах  $A$  и  $A'$  с сохранением их суммы сводится к тому, что угол между  $a'$  и  $a'_1$  отрезается и прикладывается к стороне  $a$ ; получаем вместо многоугольника с бесконечными сторонами  $a, a'$  многоугольник со сторонами  $a_1, a'_1$ .

$2h$  переменными, а если исключить вращение всего угла как целого вокруг вершины, то остается всего  $2h - 3$  переменных. Наконец, с данной разверткой мы должны связывать многогранный угол, имеющий ту же кривизну  $\omega$ . Этим исключается еще одно переменное и остается  $2h - 4$  переменных. Таким образом, мы получаем  $(2h - 4)$ -мерное многообразие  $V$  выпуклых многогранных углов с данной кривизной  $\omega$ .

Далее, в развертке  $R$  мы должны задать направление обхода ее воронки, а на угле  $V$  — направление обхода вокруг вершины.

Какому-нибудь лучу  $L$  в развертке  $R$  мы должны сопоставить образующую  $\bar{L}$  многогранного угла  $V$ , которая должна быть предельной образующей для соответствующего луча на многограннике  $P$ , склеенном из развертки  $R$ . Но, во-первых, задания лучей  $L$ , параллельных между собой, очевидно, равносильны, а во-вторых, задание луча  $L$  и образующей  $\bar{L}$  эквивалентно заданию любых других луча  $L_1$  и образующей  $\bar{L}_1$ , если только углы между  $L$  и  $L_1$ ,  $\bar{L}$  и  $\bar{L}_1$  равны, считая, конечно, углы в направлении отсчета, заданного ориентацией развертки  $R$  и угла  $V$ . Поэтому можно говорить просто об установлении соответствия направлений лучей в развертке  $R$  и на угле  $V$ ; когда луч  $L$  задан, мы имеем возможность выбрать любую образующую  $\bar{L}$ , а их имеется однопараметрическое семейство. Поэтому произвол в задании соответствия направлений в развертке  $R$  и на угле  $V$  приводит к еще одному переменному параметру.

Таким образом, мы должны рассматривать многообразие ориентированных разверток  $R$  и углов  $V$  с данными соответствиями направлений. Это многообразие обозначим  $MV$ ; число его измерений равно, как мы показали,

$$(k + n) + (2h - 4) + 1 = k + n + 2h - 3. \quad (1)$$

7. Пусть  $R_0$  и  $V_0$  — данные развертка и угол с той же кривизной. Пусть  $L$  и  $\bar{L}$  — соответствующие лучи в развертке  $R_0$  и на угле  $V_0$ . Мы имеем, таким образом, «точку»  $(R_0, V_0)$  нашего многообразия  $MV$ . Не ограничивая общности, можно считать, что луч  $L$  исходит из некоторой вершины  $A$  воронки развертки  $R_0$ . Разрезав воронку по этому лучу, будем вклеивать в полученный разрез секторы  $S$  с непрерывно увеличивающимися углами до тех пор, пока развертка  $R_0$  не превратится в развертку  $R_1$ , у которой сумма углов в вершине  $A$  равна  $2\pi$ . Кривизна развертки уменьшится при этом на величину  $2\pi - \theta$ , где  $\theta$  — сумма углов вокруг вершины  $A$  в исходной развертке  $R_0$ . Но она не станет равной нулю, так как по условию число вершин развертки  $R_0$  больше единицы.

Вместе с таким изменением развертки  $R$  можно непрерывно изменять угол  $V$  так, чтобы его кривизна каждый раз равнялась кривизне развертки. Для этого достаточно, например, непрерывно увеличивать его плоские углы

в одно и то же число раз. Так мы приходим к углу  $V_1$  с той же кривизной, что и развертка  $R_1$ . Соответствие лучей  $L$  и  $\bar{L}$  можно сохранить: за луч  $L$  можно брать каждый раз одну из сторон разреза, сделанного в исходной развертке  $R_0$ , а за луч  $\bar{L}$  — любую из образующих на изменяемом угле  $V$ , лишь бы она менялась непрерывно.

Таким образом, от любой точки  $(R_0, V_0)$  многообразия  $MV$  можно дойти до точки  $(R_1, V_1)$ , «лежащей на его границе», причем в развертке  $R_1$  угол только при данной вершине воронки будет равен  $2\pi$  и поэтому вблизи точки  $(R_1, V_1)$  не будет точек из других связных компонент многообразия  $MV$  помимо связной компоненты, содержащей данную точку  $(R_1, V_1)$ . Для доказательства изобразим «точки»  $(R, V)$ , близкие к  $(R_1, V_1)$ , точками в  $(k + n + 2h - 3)$ -мерном пространстве, где одна из координат есть угол  $\alpha$  воронки при вершине  $A$ , причем рассматриваются все развертки  $R$ , а не только развертки положительной кривизны. Граница многообразия  $MV$  изобразится уравнением  $\alpha + \sum_i \varphi_i = 2\pi$ , где  $\varphi_i$  — остальные углы, сходящиеся в вершине  $A$ . Эта поверхность разбивает окрестность точки  $(R_1, V_1)$  на две части: в одной  $\alpha > 2\pi - \sum \varphi_i$ , в другой  $\alpha < 2\pi - \sum \varphi_i$ . Если точки  $(R', V')$ ,  $(R'', V'')$  лежат по одну сторону, то их можно соединить в данной окрестности непрерывным путем, проходящим целиком с той же стороны от поверхности  $\alpha + \sum_i \varphi_i = 2\pi$ . Если окрестность мала, то суммы углов при всех вершинах, кроме вершины  $A$ , остаются меньше  $2\pi$ , и условия, ограничивающие переменные, задающие выпуклый многогранный угол, также не нарушаются. Поэтому указанный путь лежит в многообразии  $MV$ , а это означает, что все точки этого многообразия, близкие к  $(R_1, V_1)$ , принадлежат одной связной компоненте.

Развертку  $R_1$  можно заменить разверткой, не содержащей более лишней вершины  $A$ . По предположению индукции теорема верна для разверток с меньшим числом вершин. Поэтому из развертки  $R_1$  можно склеить выпуклый многогранник  $P_1$  с данным предельным углом  $V$ . Вершине  $A$  соответствует на многограннике  $P_1$  точка, лежащая внутри грани или ребра. Выдвинем ее наружу на достаточно малое расстояние и построим многогранник  $P$  с этой выдвинутой вершиной, а также со всеми вершинами многогранника  $P_1$  и с тем же предельным углом  $V$ . Легко показать, что многогранник  $P$ , достаточно близкий к  $P_1$ , допускает развертку  $R$ , близкую к  $R_1$  (это доказывается так же, как лемма 1 § 2). Но развертки, близкие к  $R_1$ , соответствуют «точкам»  $(R, V)$  из данной связной компоненты многообразия  $MV$ . Следовательно, во всякой связной компоненте этого многообразия имеются «реализуемые точки»  $(R, V)$ , т. е. развертки  $R$ , из которых можно склеить многогранники с углом  $V$ .

**8.** Теперь рассмотрим множество всех бесконечных выпуклых многогранников, которые можно склеить из разверток строения  $K$  и имеющих

предельные углы с  $h$  ребрами. На каждом таком многограннике мы начерчиваем его развертку и получаем « $K$ -триангулированный» многогранник  $P$ . Вместе с  $K$ -триангуляцией на многогранник  $P$  переносится ориентация его развертки, так что речь идет об ориентированном  $K$ -триангулированном многограннике. Два  $K$ -триангулированных многогранника считаются равными, если их можно привести в совпадение вместе с их  $K$ -триангуляциями путем движения или движения и отражения. Равные  $K$ -триангулированные многогранники мы просто не будем различать.

Бесконечный выпуклый многогранник  $P$  определяется заданием его вершин и предельного угла, причем предельный угол задается с точностью до переноса. Если у многогранника  $e$  вершин, то это дает  $3e$  их переменных координат; если предельный угол имеет  $h$  ребер, то это дает  $2h$  переменных, определяющих их направления; но так как многогранники рассматриваются с точностью до движения (и отражения), то 6 переменных следует исключить и остается всего  $3e + 2h - 6$  переменных, определяющих многогранник  $P$ .

Множество всех  $K$ -триангулированных многогранников  $P$  с  $h$ -гранными предельными углами мы превращаем в многообразие  $\mathbf{P}$ , вводя следующее определение окрестностей: *окрестность многогранника  $P_0$  состоит из всех многогранников  $P$ , близких к  $P_0$ , вместе с их  $K$ -триангуляциями.*

Близость многогранников  $P$  определяется близостью их вершин и направлений ребер предельных углов. *Всякий многогранник  $P$ , близкий к данному  $P_0$ , допускает единственную  $K$ -триангуляцию, близкую к  $K$ -триангуляции многогранника  $P_0$ .* Это доказывается теми же очевидными рассуждениями, какими аналогичное утверждение доказано в § 2 для замкнутых многогранников (лемма 1 § 2). При этом из близости длин ребер  $K$ -триангуляций близких многогранников очевидно уже следует близость углов их воронок. Таким образом, мало меняя все  $3e + 2h - 6$  переменных, мы будем получать  $K$ -триангулированные многогранники, близкие к данному вместе с их  $K$ -триангуляциями. Все эти многогранники будут различны также и в том случае, когда многогранник  $P_0$  вырождается в дважды покрытый многоугольник. Какие-нибудь два таких многогранника могли бы быть равны, если бы были симметричны относительно его плоскости. Но в таком случае их ориентации, очевидно, противоположные и, следовательно, с учетом ориентации они не равны<sup>15)</sup>.

Следовательно,  $\mathbf{P}$  есть действительно многообразие с числом измерений  $3e + 2h - 6$ .

<sup>15)</sup> Ориентация переносится с многогранника  $P_0$  на близкие очевидным путем, и, в частности, если  $P_0$  вырождается, то нужно помнить о наличии у него двух сторон, которым соответствуют стороны близких ему многогранников. Впрочем, так же, как в случае замкнутых многогранников, можно обойтись без ориентации.

**9.** Каждому многограннику из  $P$  однозначно соответствуют 1) его развертка, являющаяся его  $K$ -триангуляцией, 2) его предельный угол  $V$ , 3) соответствие направлений его лучей и образующих угла  $V$ , устанавливаемое при бесконечном сжатии многогранника в угол  $V$ .

Этим самым устанавливается однозначное отображение многообразия  $P$  в многообразии  $MV$ , и для того, чтобы доказать нашу теорему, достаточно показать, что все условия леммы об отображении здесь выполнены.

Покажем прежде всего, что размерности многообразий  $P$  и  $MV$  равны. Пусть  $f, k, e$  — числа треугольников, ребер и вершин комплекса  $K$ . По формуле Эйлера

$$f - k + e = 1. \tag{2}$$

Комплекс  $K$  имеет воронку с  $n$  сторонами, с которыми отождествлены  $n$  сторон его треугольников; остальные их стороны отождествлены друг с другом попарно. Поэтому

$$3f = 2k - n. \tag{3}$$

Из формул (2) и (3) следует, что

$$k + n = 3e - 3.$$

Поэтому для числа измерений многообразия  $MV$  (формула (1)) получаем

$$k + n + 2h - 3 = 3e + 2h - 6,$$

т. е. оно равно числу измерений многообразия  $P$ .

Мы уже показали, что во всякой связной компоненте многообразия  $MV$  содержатся образы точек из  $P$ . Прочие свойства отображения  $\varphi$  устанавливаются совершенно аналогично тому, как это сделано в § 3 для случая замкнутых многогранников. Непрерывность его содержится в самом определении окрестностей в многообразии  $P$ . Взаимная однозначность следует из теоремы 3 § 4 главы III, согласно которой два изометричных многогранника с равными предельными углами и одинаковым соответствием направлений лучей и образующих их предельных углов равны.

Наконец, последнее нужное нам свойство отображения  $\varphi$  получается из леммы, совершенно аналогичной лемме 1 § 2. Изменения в формулировке ее и дополнения в доказательстве, связанные с тем, что кроме длин ребер развертку задают еще углы воронки, столь очевидны, что нет надобности их оговаривать.

Следовательно, все условия леммы об отображении выполнены, и тем самым наша теорема доказана.

**10.** Тот же метод приложим к доказательству существования бесконечного выпуклого многогранника с данной разверткой, имеющей кривизну  $2\pi$ .

Здесь мы должны рассматривать только развертки с кривизной  $2\pi$ ; у них воронка превращается в «трубку», потому что бесконечные многоугольники такой развертки имеют параллельные стороны. Прежним рассуждением можно исключить из развертки лишние вершины с суммами углов, равными  $2\pi$ . Развертка данного строения  $K$  будет определяться теперь  $k$  длинами ребер и  $n$  углами трубки, причем эти углы связаны соотношением

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = n\pi.$$

Следовательно, мы получаем  $(k + n - 1)$ -мерное многообразие  $M$  разверток данного строения и положительной кривизны. Здесь разверток с одной вершиной не может быть, потому что кривизна одной вершины  $< 2\pi$ . Развертки же только с двумя вершинами, очевидно, реализуются дважды покрытыми плоскими полосами. Поэтому существование многогранника с данной разверткой можно опять доказывать индукцией по числу вершин.

Многообразие  $P$   $K$ -триангулированных многогранников определяется здесь так же, как и раньше. Число переменных, задающих многогранник, будет  $3e$  координат вершин плюс 2 переменные, задающие направление его предельной полупрямой, минус 6 переменных, связанных с движением многогранника как целого. Итого многообразие  $P$  будет  $(3e - 4)$ -мерным.

Применение формулы Эйлера  $f - k + e = 1$  приводит к соотношению

$$3e - 4 = k + n - 1,$$

т. е. многообразия  $M$  и  $P$  имеют одинаковую размерность.

Далее определяется естественное отображение  $\varphi$  многообразия  $P$  в  $M$ . Его взаимная однозначность следует из единственности многогранника с данной разверткой, имеющей кривизну  $2\pi$  (теорема 2 §3 главы III). Остальные свойства отображения  $\varphi$ , необходимые для применения леммы об отображении, доказываются аналогично тому, как это делается для случая замкнутых многогранников. В результате все требования леммы об отображении оказываются выполненными, и мы заключаем о существовании многогранника с любой разверткой, имеющей кривизну  $2\pi$ .

---

---

## Глава V

### Склеивание и изгибание многогранников с границей

---

---

#### § 1. СКЛЕИВАНИЕ МНОГОГРАННИКОВ С ГРАНИЦЕЙ

1. В главе IV речь шла о развертках, в которых стороны многоугольников склеиваются попарно, так что развертка не имеет границы. Если же у многоугольников развертки есть стороны, не склеиваемые ни с какими другими сторонами, то развертка имеет границу, и такие свободные стороны ее многоугольников мы называем граничными ребрами развертки.

Представляя себе склеиваемые стороны и вершины отождествленными, мы естественно приходим к тому, что граница развертки состоит из конечного числа замкнутых ломаных, образуемых ее граничными ребрами; а если развертка включает бесконечные многоугольники, то ее граница может содержать также бесконечные ломаные, каждая из которых складывается из конечного, числа конечных и двух бесконечных граничных ребер; в частности, конечные граничные ребра могут отсутствовать. Многогранник, который можно склеить из такой развертки, будет иметь соответствующую границу.

Вопрос об условиях, при которых из данной развертки с границей можно склеить выпуклый многогранник, мы не можем решить полностью, а потому вынуждены ограничиться общими указаниями и отдельными, более или менее специальными результатами<sup>1)</sup>. Дальше будут также даны простые примеры разверток, из которых нельзя склеить никакого выпуклого многогранника, хотя они и удовлетворяют некоторым очевидно необходимым условиям.

Подход к решению поставленного вопроса дает следующая теорема:

**Теорема 1.** Пусть граница развертки  $R$  состоит из замкнутых или бесконечных ломаных  $L_1, \dots, L_n$ . Для того чтобы из развертки  $R$  можно было

---

<sup>1)</sup>Теперь известны эффективно проверяемые необходимые и достаточные условия. Они состоят в описании признаков существования «подклеек», о которых идет речь в теоремах 1 и 7. Эти условия даны в статье Л. А. Шора [224]. — Прим. В. А. Залгаллера.



склеить выпуклый многогранник, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие развертки  $R_1, \dots, R_n$ , ограниченные каждая одной ломаной, что отождествление их границ с ломаными  $L_1, \dots, L_n$  давало бы развертку  $R + R_1 + \dots + R_n$ , из которой можно склеить выпуклый многогранник. Развертка  $R + R_1 + \dots + R_n$  уже не имеет границы, и потому вопрос об условиях, при которых из нее можно склеить выпуклый многогранник, решается теоремами, доказанными в § 1–4 главы IV.

Доказательство совершенно очевидно. Если такие развертки  $R_1, \dots, R_n$  имеются, то, склеивая из развертки  $R + R_1 + R_2 + \dots + R_n$  выпуклый многогранник и выделяя из него часть, соответствующую данной развертке  $R$ , получим выпуклый многогранник с разверткой  $R$ . Следовательно, условие достаточно.

С другой стороны, пусть из развертки  $R$  склеивается выпуклый многогранник  $P$ . По самому определению он есть часть полного выпуклого многогранника  $\bar{P}$  без границы, замкнутого или бесконечного. Тогда разность  $\bar{P} \setminus P$  с присоединенной ее границей представляет собой один или несколько выпуклых многогранников  $P_1, \dots, P_n$ . Их развертки  $R_1, \dots, R_n$  вместе с  $R$  образуют развертку  $R + R_1 + \dots + R_n$  полного многогранника  $\bar{P}$ , и тем самым необходимость условия доказана.

Теорема 1 сводит вопрос о возможности склеить выпуклый многогранник из развертки с границей к вопросу о подборе соответствующих разверток  $R_1, \dots, R_n$ . В некоторых случаях такой подбор удается осуществить. Для того чтобы он был возможен, развертка  $R$  должна удовлетворять трем заведомо необходимым условиям:

- 1) развертка  $R$  должна быть гомеоморфна плоскому многоугольнику, конечному или бесконечному, но ограниченному, вообще говоря, несколькими ломаными <sup>2)</sup>;
- 2) суммы углов вокруг всех, как внутренних, так и граничных, вершин развертки  $R$  должны быть  $\leq 2\pi$ ;
- 3) кривизна развертки  $R$  (т.е. сумма кривизн ее внутренних вершин) должна быть  $\leq 4\pi$ , если развертка конечна, и  $\leq 2\pi$ , если она бесконечна.

Необходимость этих условий очевидна, потому что такими свойствами обладает всякий выпуклый многогранник с границей. Бесконечный полный

<sup>2)</sup> То же условие можно выразить иначе, не привлекая понятия гомеоморфизма. А именно, если  $f$ ,  $k$ ,  $e$  — числа многоугольников, ребер и вершин развертки  $R$ , а  $n$  — число ограничивающих ее ломаных, то в случае конечной развертки должно быть  $f - k + e = 2 - n$ , в случае же бесконечной развертки должно быть  $f - k + e = 1 - n$ . Для доказательства эквивалентности обоих условий достаточно заметить, что, подклеивая к каждой ломаной, ограничивающей данную развертку, многоугольник, ограниченный одной ломаной, получим развертку  $\bar{R}$  без границы, у которой соответственно будет  $f - k + e = 2$  и  $f - k + e = 1$ , так что  $\bar{R}$  будет гомеоморфна соответственно сфере или плоскости.

многогранник  $\overline{P}$  гомеоморфен плоскости и имеет кривизну  $\leq 2\pi$ ; поэтому многогранник  $P$ , являющийся частью  $\overline{P}$ , гомеоморфен многоугольнику и имеет кривизну  $\leq 2\pi$ . Замкнутый многогранник  $\overline{P}$  гомеоморфен сфере и имеет кривизну  $4\pi$ ; но сферу с одной исключенной точкой можно отобразить на плоскость, а потому многогранник  $P$ , являющийся частью  $\overline{P}$ , будет гомеоморфен плоскому многоугольнику, кривизна же его не более чем у  $\overline{P}$ , т. е.  $\leq 4\pi$ . В свою очередь, каждая подклеиваемая к  $R$  развертка  $R_i$  должна обладать теми же свойствами 2, 3 и быть гомеоморфной многоугольнику, ограниченному одной замкнутой или бесконечной ломаной.

Условие теоремы 1 сводится в результате к тому, что суммы углов в отождествляемых точках границ разверток  $R$  и  $R_i$  должны быть не больше  $2\pi$ . Так как для каждой ломаной  $L_i$ , входящей в границу развертки  $R$ , и для соответствующей развертки  $R_i$  это условие должно выполняться независимо, то основным оказывается вопрос о склеивании многогранника из развертки, ограниченной одной ломаной. Такая развертка гомеоморфна кругу или полуплоскости в зависимости от того, является ли она конечной или бесконечной.

**2.** Здесь и дальше излагаются результаты, получающиеся «методом склеивания», основанным на теореме 1. При этом без особых оговорок будет иметься в виду, что *речь идет о развертках, удовлетворяющих указанным выше условиям 1, 2, 3.*

Под углом при граничной вершине развертки мы будем понимать сумму углов ее многоугольников при этой вершине; говоря так, удобно представлять себе развертку склеенной хотя бы абстрактно.

Напомним, что «шапочкой» называется такой выпуклый многогранник, ограниченный плоской замкнутой ломаной, проекция которого на плоскость этой ломаной совпадает с многоугольником, ограничиваемым этой ломаной.

**Теорема 2.** *Для того чтобы из гомеоморфной кругу развертки  $R$  можно было склеить шапочку, необходимо и достаточно, чтобы углы при каждой ее граничной вершине не превосходили  $\pi$ <sup>3)</sup>.*

Докажем необходимость этого условия. Пусть  $P$  — шапочка; присоединяя к ней шапочку  $P_1$ , симметричную относительно плоскости, ограничивающей ее ломаной, получим замкнутый выпуклый многогранник  $P \cup P_1$  (как на рис. 97, а, с. 215). Граничные вершины шапочки будут либо его вершинами, либо точками внутри ребер. Суммы углов вокруг них будут  $\leq 2\pi$ . Но каждая из них складывается из углов на  $P$  и  $P_1$ , и так как по симметрии  $P$  и  $P_1$  эти углы равны, то сумма углов при каждой граничной вершине шапочки  $P$  не превосходит  $\pi$ .

<sup>3)</sup> Другое прямое доказательство этой теоремы дано Ю. А. Волковым в [86]. — Прим. В. А. Залгаллера.

Пусть теперь  $R$  — развертка, удовлетворяющая условиям теоремы, и  $R_1$  — второй экземпляр такой же развертки. Отождествляя соответственные элементы границ этих разверток, получим развертку  $R + R_1$ , гомеоморфную сфере, и так как суммы углов при граничных вершинах у  $R$  и  $R_1$  не превосходят  $\pi$ , то вокруг всех вершин развертки  $R + R_1$  суммы углов будут  $\leq 2\pi$ . Поэтому из этой развертки можно склеить замкнутый выпуклый многогранник  $\overline{P}$ , состоящий из двух частей  $P$  и  $P_1$ , соответствующих разверткам  $R$  и  $R_1$ .

Согласно лемме § 4 главы IV, многогранник  $\overline{P}$  симметричен относительно плоскости, содержащей общую границу его частей  $P$  и  $P_1$ . Отсюда ясно, что  $P$  есть шапочка. Она склеена из развертки  $R$ , и теорема таким образом доказана.

Напомним, что, согласно теореме 3 § 5 главы III, шапочка с данной разверткой — единственная с точностью до движения и отражения, так что из развертки  $R$  можно склеить, по существу, только одну шапочку либо ей симметричную.

Если *бесконечной шапочкой* назвать бесконечный выпуклый многогранник, граница которого состоит из одной бесконечной плоской ломаной, также проектирующийся в многоугольник, ограниченный этой ломаной, то можно сформулировать следующую теорему:

**Теорема 3.** *Для того чтобы из развертки  $R$ , гомеоморфной полуплоскости, можно было склеить бесконечную шапочку, необходимо и достаточно, чтобы углы при ее граничных вершинах не превосходили  $\pi$ .*

Доказательство почти буквально повторяет доказательство теоремы 2. Некоторое различие возникает в последнем его пункте, где приходится ссылаться на единственность многогранника  $P + P_1$  с данной разверткой  $R + R_1$ . Если кривизна этой развертки меньше  $2\pi$ , то, как мы знаем, такой многогранник не будет единственным. Как доказано в § 5 главы IV, его предельный угол можно выбирать произвольно, лишь бы кривизна этого угла равнялась кривизне многогранника. Поэтому предельный угол многогранника  $P + P_1$  можно выбирать заранее так, чтобы его части  $V$  и  $V_1$ , соответствующие частям  $P$  и  $P_1$  многогранника, были взаимно симметричными. Тогда при перестановке  $P$  и  $P_1$  получим отображение многогранника  $P + P_1$ , оставляющее неизменным его предельный угол  $V + V_1$  и также его образующие, соответствующие общим бесконечным ребрам у  $P$  и  $P_1$ . Поэтому в силу теоремы 3 § 4 главы III перестановка  $P$  и  $P_1$  должна осуществляться отражением; а отсюда немедленно вытекает, что  $P$  есть бесконечная шапочка.

Единственность бесконечной шапочки с данной разверткой, вообще говоря, не имеет места. Решение вопроса о том, когда единственность все же имеется, или о дополнительных данных, полностью определяющих бесконечную шапочку, мы оставляем читателю; оно может быть легко получено

на основании теорем о бесконечных многогранниках (§ 3, 4 главы III и § 5 главы IV).

Теоремы 2 и 3 полностью характеризуют развертки шапок условием об углах при граничных вершинах. Укажем еще другую характеристику этих разверток:

**Теорема 4.** *Для того чтобы углы развертки при граничных вершинах не превосходили  $\pi$ , необходимо и достаточно, чтобы каждые две внутренние точки развертки соединялись в ней кратчайшей линией, проходящей целиком внутри развертки. (Можно сказать, что такая развертка «выпукла в себе».)*

Здесь удобно представлять себе развертку склеенной хотя бы абстрактно. Кратчайшая линия, соединяющая внутренние точки в развертке, может подходить к границе развертки только в тех вершинах, где угол  $> \pi$ : иначе ее можно было бы заменить линией более короткой, срезая образуемый ею угол (теорема 1 § 8 главы 1, рис. 53). Отсюда и следует теорема 4.

В связи с теоремами 2–4 предложим следующую задачу. Развертка, у которой все углы на границе не превосходят  $\pi$ , может и не быть гомеоморфной кругу или полуплоскости. Ограничиваясь развертками, гомеоморфными части плоскости, доказать, что такими могут быть только развертки боковых поверхностей прямых — замкнутых или открытых — призм; во втором случае (открытой призмы) развертка изометрична плоской полосе между парой параллельных прямых.

**3.** В этом пункте и дальше в пунктах 5–7 мы дадим некоторые достаточные критерии склеиваемости выпуклого многогранника из данной развертки, которые в определенных случаях оказываются также необходимыми. Критерии эти таковы, что для каждой данной развертки легко непосредственно проверить, выполняются они или нет. Основаны они на следующем построении.

Пусть развертка  $R$  ограничена одной замкнутой ломаной  $L$  с вершинами  $A_1, \dots, A_n$  и углами  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ . Построим на плоскости ломаную  $L^0$ , звенья которой последовательно равны по длине ребрам  $A_1 A_2, \dots, A_{n-1} A_n, A_n A_1$ , а углы между звеньями с одной стороны равны  $\alpha_2, \dots, \alpha_n$  (рис. 101). С противоположной стороны углы будут  $\beta_i = 2\pi - \alpha_i$ . Эту сторону мы назовем «внешней стороной» ломаной  $L^0$ , потому что она соответствует внешней стороне ломаной  $L$  относительно развертки  $R$ . (На рис. 101, *а* эта «внешняя сторона» ломаной  $L^0$  обращена не к бесконечной части плоскости.) Вообще говоря, ломаная  $L^0$  не будет замкнутой; ее концы соответствуют одной вершине  $A_1$  ломаной  $L$ . Однако не исключено, что ломаная  $L^0$  может быть замкнутой или что она сама себя пересекает (рис. 101, *б*). Указанное построение ломаной  $L^0$  естественно назвать *разворачиванием ломаной  $L$ , разорванной в вершине  $A_1$* . Совершенно так же можно разворачивать ломаную  $L$ , разорванную в любой ее точке  $A$ .

Если развертка  $R$  ограничена бесконечной ломаной, то разворачивание этой ломаной определяется совершенно аналогично, только разрывать ее не приходится, поскольку она не замкнута.

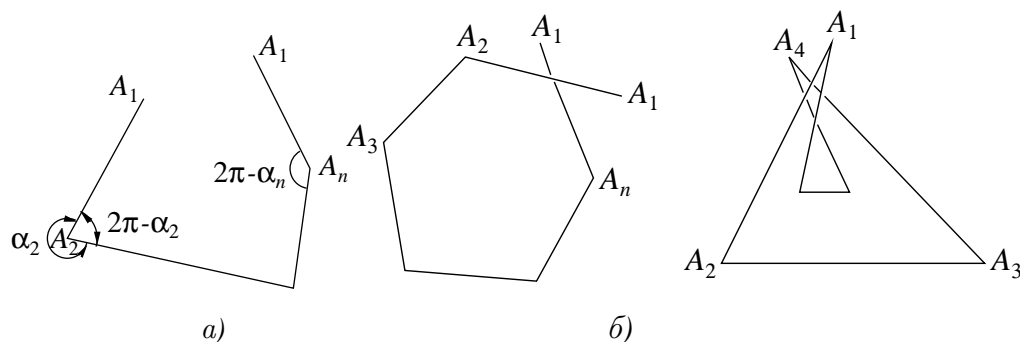


Рис. 101

**Теорема 5.** Для того чтобы из конечной развертки  $R$  с кривизной  $4\pi$ , ограниченной ломаными  $L_1, \dots, L_n$ , склеивался выпуклый многогранник, необходимо и достаточно, чтобы развернутые ломаные  $L_1^0, \dots, L_n^0$  оказывались замкнутыми и ограничивали на плоскости многоугольники  $Q_1, \dots, Q_n$ , лежащие с «внешних» сторон этих ломаных.

(Под многоугольником мы понимаем здесь развертку, не имеющую внутренних вершин. Последовательно разворачивая на плоскость составляющие ее треугольники, мы развернем на плоскость и всю развертку. При этом возможно, что она будет перекрываться сама с собой. Следовательно, мы понимаем «многоугольник» в таком обобщенном смысле, допуская перекрывания его самого с собой.)

Доказательство теоремы 5 очевидно. Действительно, пусть условие теоремы выполнено. Тогда, подклеивая к развертке  $R$  многоугольники  $Q_i$ , получим развертку  $\bar{R} = R + Q_1 + \dots + Q_n$ , гомеоморфную сфере. Углы многоугольников  $Q_i$  дополняют углы развертки  $R$  до  $2\pi$ , так что, во-первых, условие о суммах углов выполнено и из развертки  $\bar{R}$  можно склеить замкнутый выпуклый многогранник  $\bar{P}$ . Во-вторых, это показывает, что никакая точка многогранника  $\bar{P}$ , соответствующая точкам внутри или на границе многоугольников  $Q_i$ , не может быть его вершиной: иначе сумма углов вокруг нее была бы  $< 2\pi$ . Следовательно, все вершины лежат внутри той части  $P$  многогранника  $\bar{P}$ , которая соответствует исходной развертке  $R$ . Поэтому кривизна  $P$  равна кривизне  $\bar{P}$ , т. е. равна  $4\pi$ . Этим достаточность условия теоремы доказана.

Для доказательства необходимости допустим, что из развертки  $R$  склеен выпуклый многогранник  $P$  с кривизной  $4\pi$ . Он есть часть замкнутого выпуклого многогранника  $\overline{P}$ , и так как кривизна многогранника  $\overline{P}$  равна  $4\pi$ , то  $\overline{P}$  не имеет других вершин помимо внутренних вершин многогранника  $P$ . Следовательно, дополнение  $P$  на  $\overline{P}$  состоит из кусков  $Q_i$ , разворачиваемых на плоскость. Суммы углов при общих вершинах многогранника  $P$  и многогранников  $Q_i$  равны  $2\pi$ , так как они не являются вершинами многогранника  $\overline{P}$ . А это как раз и означает, что углы  $\beta$  многоугольников  $Q_i$  дополняют углы  $\alpha$  на  $P$  до  $2\pi$ , т. е. границы многоугольников  $Q_i$  получают разворачиванием ломаных, ограничивающих  $P$ <sup>4</sup>).

Напомним, что, согласно теореме 1 § 5 главы III, выпуклый многогранник с кривизной  $4\pi$  определяется своей разверткой однозначно с точностью до движения и отражения. Поэтому в условиях теоремы 5 из развертки  $R$  склеивается, по существу, единственный многогранник (либо ему симметричный).

**Теорема 6.** *Для того чтобы из бесконечной развертки  $R$ , ограниченной ломаными  $L_1, L_2, \dots, L_n$ , склеивался выпуклый многогранник, достаточно, а если кривизна развертки равна  $2\pi$  — то и необходимо, чтобы развернутые ломаные  $L_1^0, \dots, L_n^0$  оказывались замкнутыми и ограничивали многоугольники, лежащие с «внешних» сторон этих ломаных.*

Доказательство, по существу, не отличается от доказательства теоремы 5. Если кривизна развертки равна  $2\pi$ , то соответствующее утверждение единственности также верно в силу теоремы 2 § 5 главы III.

Когда развертка  $R$  задана, то разворачивание ограничивающих ее ломаных на плоскость не представляет труда, а потому выполнение условий теорем 5 и 6 всегда легко проверяется.

4. Общая теорема 1, лежащая в основании предыдущих выводов, допускает уточнение, которое оказывается особенно полезным при исследовании изгибаний выпуклых многогранников, чему будет посвящен следующий параграф.

**Теорема 7.** *Для того чтобы из развертки  $R$ , ограниченной ломаными  $L_1, \dots, L_n$ , можно было склеить выпуклый многогранник, необходимо и достаточно, чтобы существовали плоские, может быть, самоперекрывающиеся многоугольники  $Q_1, \dots, Q_n$ , стороны которых равны соответственно звеньям ломаных  $L_1, \dots, L_n$ , а углы не превосходят дополнений углов при соответственных вершинах этих ломаных. При этом на ломаных  $L_i$  допускается введение любого числа дополнительных вершин. Ломаные  $L_i$  и*

<sup>4</sup>Исключительный случай получается, если некоторые ломаные  $L_i$ , ограничивающие  $P$ , имеют общие вершины. Тогда их можно считать за одну ломаную, и соответствующий многоугольник  $Q$  будет состояться из многоугольников  $Q_i$ . Строго говоря, этот случай нужно было бы особо оговорить в условиях теоремы.

соответственно многоугольники  $Q_i$  могут быть и бесконечными. (Согласно принятому выше условию подразумевается, что развертка  $R$  гомеоморфна плоскому многоугольнику и суммы углов вокруг ее вершин  $\leq 2\pi$ .)

Достаточность условия очевидна, потому что, отождествляя звенья ломаных  $L_i$  со сторонами многоугольников  $Q_i$ , получим развертку, у которой вследствие условия, наложенного на углы многоугольников  $Q_i$ , суммы углов вокруг всех вершин будут  $\leq 2\pi$ . Эта развертка  $\bar{R}$  не имеет границы и из нее можно склеить выпуклый многогранник<sup>5)</sup>, а вместе с тем и из данной развертки  $R$  склеится выпуклый многогранник.

Для доказательства необходимости допустим, что из развертки  $R$  склеен выпуклый многогранник  $P$ . Пусть  $\bar{P}$  — граница его выпуклой оболочки;  $\bar{P}$  есть замкнутый или бесконечный многогранник без границы, частью которого является  $P$ . Так как выпуклая оболочка полностью определяется одними вершинами, то на дополнении  $\bar{P} \setminus P$  нет никаких вершин: все они лежат внутри или на границе многогранника  $P$ .  $\bar{P} \setminus P$  распадается на части  $Q_1, \dots, Q_n$  соответственно каждой ломаной  $L_1, \dots, L_n$ , ограничивающей развертку  $R$ , и так как эти  $Q_i$  не содержат вершин внутри, то все они разворачиваются на плоскость.

Если  $A$  — какая-либо вершина на границе многогранника  $P$ , а  $\alpha$  и  $\beta$  — углы при ней на  $P$  и на соответствующем многоугольнике  $Q_i$ , то по основному свойству сумм углов вокруг вершин  $\alpha + \beta \leq 2\pi$ . Следовательно, развернутые на плоскость  $Q_i$  представляют собой многоугольники со сторонами, равными звеньям ломаных  $L_i$ , и с углами  $\beta \leq 2\pi - \alpha$ , что и требовалось.

Теорема 7 сводит вопрос о склеивании многогранника из развертки к планиметрической задаче о существовании многоугольника с данными сторонами и с углами, определенным образом ограниченными сверху. Однако мы пока не имеем решения этой задачи, не считая частных случаев, уже заключающихся в доказанных выше теоремах. Задача представляется достаточно интересной, но, по-видимому, трудной<sup>6)</sup>. Во всяком случае теорема 7 почти ничего не дает для решения вопроса об условиях склеивания многогранника из данной развертки. Речь идет, конечно, об условиях, допускающих достаточно эффективную проверку путем построения или вычислений с вещественными числами.

<sup>5)</sup> Это нам известно, если  $\bar{R}$  гомеоморфна сфере или плоскости. Если развертка  $R$  и многоугольники  $Q_i$  конечны, то развертка  $\bar{R} = R + Q_1 + \dots + Q_n$  гомеоморфна сфере. Если же  $R$  бесконечна или среди многоугольников  $Q_i$  имеются бесконечные, то, как можно показать, развертка  $\bar{R}$  необходимо гомеоморфна плоскости, кроме того случая, когда она представляет собой развертку бесконечной призмы. Это замечание оставляем без доказательства.

<sup>6)</sup> Теперь эта задача решена, см. [224]. — Прим. В. А. Залгаллера.

Отметим только один результат, который читатель сам сможет получить, пользуясь теоремой 7. Пусть развертка  $R$  ограничена замкнутыми ломаными  $L_i$ . Пусть все ее углы  $\leq \pi$ , кроме, может быть, двух  $\alpha_i, \beta_i$  для каждой ломаной  $L_i$ , причем вершины  $A_i, B_i$  этих углов делят соответствующую ломаную  $L_i$  на части равной длины. Тогда из развертки  $R$  можно склеить выпуклый многогранник.

**5. Теорема 8.** Пусть  $R$  — конечная или бесконечная развертка, ограниченная замкнутыми ломаными  $L_1, \dots, L_m$ . Пусть  $L_1^0, \dots, L_m^0$  — ломанные, полученные разворачиванием ломаных  $L_k$ , разрезанных в произвольных вершинах  $A_k$ , углы при которых обозначим  $\delta_k$ . Для того чтобы из развертки  $R$  можно было склеить выпуклый многогранник, достаточно, а если все углы на ее границе  $\geq \pi$  и у каждой ломаной  $L_k$  хотя бы один угол  $> \pi$ , то и необходимо выполнение для каждой ломаной  $L_k$  следующих условий:

А) ломаная  $L_k^0$  вместе с отрезком  $A'_k A''_k$ , соединяющим ее концы, ограничивает, быть может, перекрывающийся сам с собой многоугольник  $Q$ , лежащий с «внешней» стороны от  $L_k^0$ ;

В) на отрезке  $A'_k A''_k$ , как на основании, можно построить равнобедренный треугольник  $T$ , содержащийся в  $Q$ , так, что углы  $\gamma_1, \gamma_2$  многоугольника  $Q - T$  при концах отрезка  $a$  удовлетворяют неравенству  $\gamma_1 + \gamma_2 \leq 2\pi - \delta_k$  (рис. 102, а).

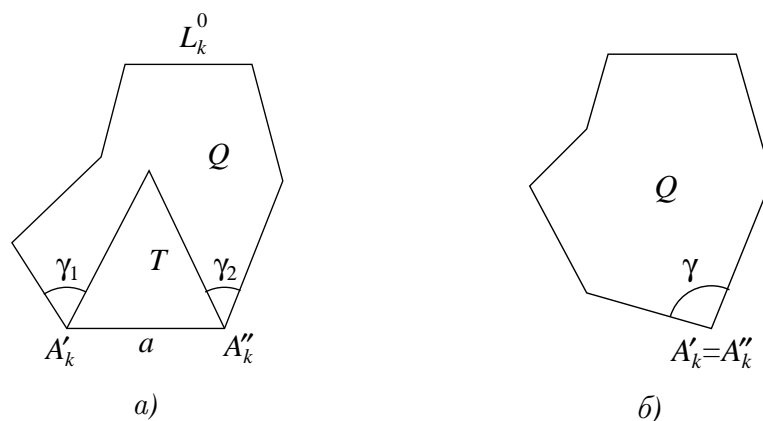


Рис. 102

Если ломаная  $L_k^0$  оказывается замкнутой и отрезок  $A'_k A''_k$  тем самым исчезает, то условия А, В сводятся к тому, что А) ломаная  $L_k^0$  ограничивает многоугольник  $Q$ , лежащий с внешней стороны от нее, и В) угол  $\gamma$  этого многоугольника при вершине, соответствующей совпавшим концам ломаной  $L^0$



(т. е. соответствующей вершине  $A_k$  ломаной  $L_k$ ), должен быть  $\leq 2\pi - \delta_k$  (рис. 102, б).

Для простоты фиксируем свое внимание на случае развертки, ограниченной одной замкнутой ломаной  $L$ . Пусть вершины ее будут  $A_1, \dots, A_n$ , углы —  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ; при разворачивании  $L$  разрывается в вершине  $A_1$ . Допустим, что условия теоремы выполнены. По самому построению ломаной  $L^0$  ее углы с внешней стороны будут

$$\beta_2 = 2\pi - \alpha_2, \dots, \beta_n = 2\pi - \alpha_n. \quad (1)$$

Если ломаная  $L_0$  не замкнута, то имеем многоугольник  $Q' = Q - T$  с углами  $\gamma_1, \gamma_2$  при вершинах  $A'_1, A''_1$ , причем по условию

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \leq 2\pi - \alpha_1. \quad (2)$$

Отождествляя друг с другом стороны многоугольника  $Q'$ , являющиеся боковыми сторонами треугольника  $T$ , получим развертку  $Q''$  с одной внутренней вершиной, угол вокруг которой, очевидно,  $< 2\pi$ .

Вследствие (1) и (2) углы на границе этой развертки будут  $\gamma \leq 2\pi - \alpha_1, \beta_2 = 2\pi - \alpha_2, \dots, \beta_n = 2\pi - \alpha_n$ . Поэтому, отождествляя граничные ребра этой развертки, т. е. звенья ломаной  $L^0$ , с соответствующими граничными ребрами развертки  $R$ , получим развертку  $R + Q''$ , гомеоморфную сфере и имеющую суммы углов вокруг всех вершин  $\leq 2\pi$ . Из такой развертки можно склеить выпуклый многогранник, а тем самым и из данной развертки  $R$  склеится выпуклый многогранник.

Если ломаная  $L^0$  замкнута, то сам ограниченный ею многоугольник  $Q$  принимаем за развертку  $Q''$ , и тогда то же отождествление его сторон с ребрами развертки  $R$  приводит к нужному результату.

Таким образом, достаточность условий теоремы доказана. Если развертка ограничена несколькими ломаными, то нужно лишь подклеивать соответствующее число разверток  $Q''_i$ .

Докажем необходимость условия теоремы в предположении, что на границе развертки  $R$  все углы  $\geq \pi$  и хотя бы один  $> \pi$ . Пусть из развертки  $R$  склеен выпуклый многогранник  $P$ . Он является частью некоторого замкнутого или бесконечного выпуклого многогранника  $\bar{P} = P \cup Q$ , где  $Q$  — дополнение  $P$  до  $\bar{P}$  с включенной границей.  $Q$  также есть выпуклый многогранник; в дальнейшем рассуждении мы не отличаем  $Q$  от какой-нибудь его развертки.

Если развертка  $R$  ограничена несколькими ломаными, то  $\bar{P} \setminus P$  распадается на несколько многогранников и тогда в дальнейшем рассуждении под  $Q$  нужно понимать любой из них.

Покажем, что сумма кривизн вершин многогранника  $\bar{P}$ , лежащих внутри или на границе  $Q$ , не превосходит  $2\pi$ . Эту сумму мы обозначим  $\omega(\bar{Q})$  в отличие от кривизны  $\omega(Q)$  самого  $Q$ , которая есть сумма кривизн его внутренних вершин. ( $\omega(Q)$  есть кривизна замыкания  $Q$  на  $\bar{P}$ .)

Если  $\beta_1, \dots, \beta_n$  — углы на границе  $Q$ , то для  $\omega(Q)$  имеем

$$\omega(Q) = 2\pi - \sum_{i=1}^n (\pi - \beta_i). \quad (3)$$

Полный угол вокруг  $i$ -й вершины на границе складывается из угла  $\beta_i$  на  $Q$  и угла  $\alpha_i$  на  $P$  или, что то же самое, на развертке  $R$ . Поэтому кривизна такой вершины есть  $\omega = 2\pi - \alpha_i - \beta_i$ , а сумма этих кривизн будет

$$\sum_i \omega_i = \sum_{i=1}^n (2\pi - \alpha_i - \beta_i). \quad (4)$$

Складывая (3) и (4), получим для суммы кривизн всех вершин выражение

$$\omega(\bar{Q}) = 2\pi - \sum (\pi - \beta_i) + \sum_i (2\pi - \alpha_i - \beta_i) = 2\pi - \sum_i (\alpha_i - \pi), \quad (5)$$

и так как по условию все углы  $\alpha_i \geq \pi$  и хотя бы один из них  $> \pi$ , то

$$\omega(\bar{Q}) < 2\pi. \quad (6)$$

Так как полный угол вокруг всякой вершины выпуклого многогранника  $P$  не превосходит  $2\pi$ , а углы на границе  $P$  не меньше  $\pi$ , то у  $Q$  все углы, напротив, не больше  $\pi$ . Поэтому, согласно теореме 4, каждые две внутренние точки на  $Q$  соединимы линией, кратчайшей в  $Q$  и проходящей внутри  $Q$ .

Пользуясь тем же приемом «срезания» угла, меньшего  $\pi$ , какой был применен в доказательстве теоремы 4, легко убедиться, что кратчайшая в  $Q$  линия  $AB$ , соединяющая любые две точки  $A, B$  из  $Q$ , либо целиком проходит внутри  $Q$  (исключая, может быть, ее концы, если они лежат на границе), либо совпадает с отрезком границы многогранника  $Q$ . Как показано в п<sup>о</sup> 1 § 8 главы I, кратчайшая, проходящая внутри развертки, не может проходить через точку, где сумма углов  $< 2\pi$ . Если же внутренняя точка  $X$  кратчайшей  $AB$  лежит на границе многогранника  $Q$ , то сумма углов вокруг нее также не может быть меньше  $2\pi$ . Действительно, иначе угол при  $X$  со стороны  $Q$  был бы меньше  $\pi$ , потому что со стороны  $P$  он по условию  $\geq \pi$ ; а тогда угол при  $X$  можно было бы срезать в  $Q$ , сократив тем самым кратчайшую  $AB$ , что невозможно по самому ее определению.

Итак, все углы на границе многогранника  $Q$  не превосходят  $\pi$ , и каждую пару точек из  $Q$  можно соединить в  $Q$  кратчайшей линией, не проходящей через вершины многогранника  $\overline{P}$ .

Пусть теперь  $A$  и  $B$  — две точки многогранника  $Q$ , являющиеся вершинами многогранника  $\overline{P}$ , и пусть их кривизны будут  $\omega_A, \omega_B$ . Мы доказали, что сумма кривизн всех вершин, принадлежащих  $Q$ , меньше  $2\pi$ , а потому

$$\frac{\omega_A + \omega_B}{2} < \pi. \quad (7)$$

Проведем кратчайшую в  $Q$  линию  $AB$ . Построим на плоскости два равных треугольника  $A'B'C', A''B''C''$  с основаниями

$$A'B' = A''B'' = AB$$

и с углами

$$\angle A' = \angle A'' = \frac{\omega_A}{2}, \quad \angle B' = \angle B'' = \frac{\omega_B}{2}. \quad (8)$$

Так как  $\frac{1}{2}(\omega_A + \omega_B) < \pi$ , то такие треугольники существуют.

Разрезав  $P + Q$  по линии  $AB$ , подклеим к обеим сторонам разреза основания треугольников  $A'B'C', A''B''C''$  так, чтобы их вершины  $A', A''$  и  $B', B''$  совпали соответственно с точками  $A$  и  $B$ . Остальные же стороны треугольников склеим друг с другом:  $A'C'$  с  $A''C''$  и  $B'C'$  с  $B''C''$ . Таким путем мы получаем вместо  $P + Q$  новую развертку  $P + Q'$  или  $R + Q'$ . При этом к полным углам вокруг точек  $A$  и  $B$  добавляются углы, равные их кривизнам  $\omega_A, \omega_B$ , т. е. как раз столько, сколько не хватало до  $2\pi$ . Поэтому точки  $A$  и  $B$  перестают быть вершинами. Но появляется новая вершина  $C = C' = C''$  с кривизной  $\omega_C$ , равной сумме кривизн  $\omega_A, \omega_B$ . Действительно, вследствие (8)

$$\angle C' = \angle C'' = \pi - \frac{\omega_A + \omega_B}{2},$$

сумма же этих углов есть полный угол вокруг  $C$ , т. е.  $2\pi - \omega_C$ , откуда

$$\omega_C = \omega_A + \omega_B. \quad (9)$$

Поскольку суммы углов вокруг всех внутренних точек кратчайшей  $AB$  равны  $2\pi$ , то при подклеивании треугольников  $A'B'C'$  и  $A''B''C''$  к разрезу по  $AB$  никаких вершин на этом разрезе не появится.

Итак, суммы углов вокруг всех точек будут  $\leq 2\pi$ , а так как углы на границе  $P \geq \pi$ , то у  $Q'$  они  $\leq \pi$ .

Таким образом, у развертки  $Q$  на одну вершину меньше, чем у  $Q'$ , но вследствие (9) кривизна ее та же, что у  $Q$ , и углы на границе тоже  $\leq \pi$ . Поэтому, если у  $Q'$  есть более одной вершины, то, повторяя то же построение,

придем к развертке  $Q''$  и т. д., пока не получим развертку  $S$ , у которой только одна точка  $O$  есть (существенная) вершина развертки  $R + S$  (или, что то же самое, вершина склеенного из нее многогранника; такой многогранник существует, поскольку все суммы углов вокруг вершин этой развертки не превосходят  $2\pi$ ). Развертка  $R$  при этом построении осталась без изменения.

Пусть точка  $O$  лежит внутри  $S$ . Тогда суммы углов в развертке  $R + S$  вокруг всех точек на общей границе  $L$  разверток  $R$  и  $S$  будут равны  $2\pi$ , а потому углы на  $S$  будут

$$\beta_1 = 2\pi - \alpha_1, \dots, \beta_n = 2\pi - \alpha_n, \tag{10}$$

где  $\alpha_i$  — углы на  $R$ .

Проведем кратчайшую  $OA_1$ , соединяющую точку  $O$  с вершиной  $A_1$  границы развертки  $S$ . Так как развертка  $S$  не имеет существенных вершин,

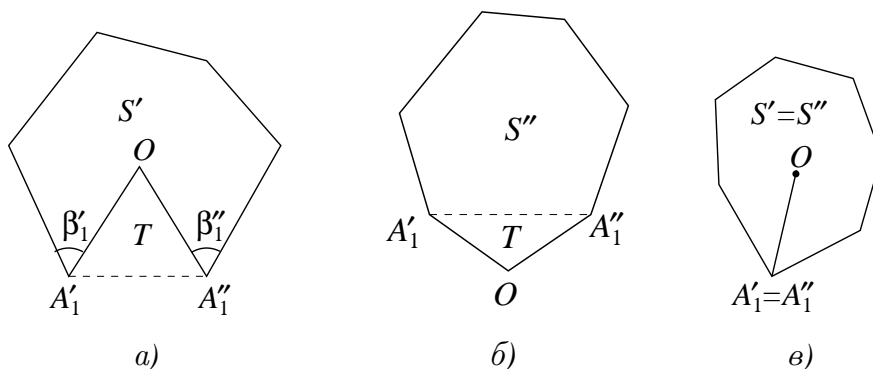


Рис. 103

помимо  $O$ , то, разрезав  $S$  по  $OA_1$ , ее можно развернуть на плоскость, причем получим многоугольник  $S'$  (рис. 103, а). Его углы будут  $\beta_2, \dots, \beta_n$  и углы  $\beta'_1, \beta''_1$  при вершинах  $A'_1, A''_1$ , причем

$$\beta'_1 + \beta''_1 = \beta_1 = 2\pi - \alpha_1. \tag{11}$$

Из соотношений (10) следует, что ломаная  $\widehat{A'_1 A''_1}$  и есть не что иное, как ломаная  $L^0$ , получаемая разворачиванием ломаной  $L$ , ограничивающей развертку  $R$ . Поэтому, проводя отрезок  $A'_1 A''_1$ , получим многоугольник  $S''$ , ограниченный этим отрезком и ломаной  $L^0$ . Этим доказано, что условие А нашей теоремы выполнено.

Если многоугольник  $S''$  получается из  $S'$  прибавлением треугольника  $T = OA'_1 A''_1$  (рис. 103, а), то это означает, во-первых, что  $S' = S'' - T$ ,

а во-вторых, формула (11) означает, что условие В нашей теоремы о сумме углов  $\gamma_1 = \beta'_1$ ,  $\gamma_2 = \beta''_2$  многоугольника  $S' = S'' - T$  при вершинах  $A'_1$ ,  $A''_1$  выполнено.

Если же многоугольник  $S''$  получается из  $S'$  вычитанием треугольника  $OA'_1A''_1$  (рис. 103, б), то углы  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  при его вершинах  $A'_1$ ,  $A''_1$  меньше, чем у  $S'$ ; а в крайнем случае, если треугольник  $OA'_1A''_1$  вырождается в отрезок (рис. 103, в), то  $S''$  и  $S'$  совпадают. Поэтому так или иначе

$$\gamma_1 \leq \beta'_1, \quad \gamma_2 \leq \beta''_1$$

и вследствие (11)

$$\gamma_1 + \gamma_2 \leq 2\pi - \alpha_1.$$

Тогда, даже не вырезая из многоугольника  $S''$  никакого треугольника  $T$ , получаем, что условие В нашей теоремы выполнено. (Можно, конечно, вырезать из  $S''$  сколь угодно узкий треугольник, и тогда углы  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  только уменьшатся.)

Таким образом, доказано, что если существенная вершина  $O$  лежит внутри развертки  $S$ , то условия А, В выполнены.

Пусть теперь  $O$  лежит на границе развертки  $S$ . Тогда внутри  $S$  вовсе нет существенных вершин, и потому  $S$  сама представляет многоугольник с углами  $\beta_i = 2\pi - \alpha_i$  при всех граничных вершинах, кроме  $A_1 = O$ ; угол же при  $A_1 = O$  будет, очевидно,  $\gamma \leq 2\pi - \alpha_1$ . Следовательно, здесь получается как раз тот случай, когда ломаная  $L^0$  замкнута. Она ограничивает многоугольник  $S$ , а угол при ее совпадающих концах есть  $\gamma \leq 2\pi - \alpha_1$ .

Таким образом, теорема полностью доказана <sup>7)</sup>.

Стоит заметить, что выполнение условий А, В этой теоремы легко проверяемо для каждой данной развертки  $R$ . Для условия А это совершенно очевидно, потому что построение ломаной  $L^0$  не представляет труда, когда граничные ребра и углы  $\alpha_i$  заданы. Для условия В это также просто. Действительно, предположим, что условие А уже выполнено, так что имеется многоугольник  $Q$ , ограниченный ломаной  $L^0$  и отрезком  $A'_1A''_1$ . Проведя из

<sup>7)</sup> Прием сведения двух вершин в одну путем склеивания треугольников, примененный в этом доказательстве, оказывается полезным и в других вопросах. Так, например, пользуясь им, можно доказать следующую теорему: пусть дана шапочка с кривизной  $\omega < 2\pi$ ; пусть ее граничные ребра будут  $a_1, \dots, a_n$  и углы  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ ; тогда существует пирамидальная шапочка (т. е. боковая поверхность пирамиды) с теми же данными  $a_1, \dots, a_n$  и  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , причем она имеет наибольшую площадь среди всех шапок с этими данными. Далее, отсюда можно вывести и такую теорему: среди всех выпуклых многогранников, гомеоморфных кругу и имеющих данную кривизну  $\omega < 2\pi$ , данный периметр ограничивающей ломаной и число вершин, не большее данного  $n$ , наибольшую площадь имеет боковая поверхность правильной  $(n-1)$ -гранной пирамиды и только она, не считая многогранников, ей изометричных. Доказательства мы оставляем читателю.

середины этого отрезка перпендикуляр внутрь  $Q$ , возьмем первую точку  $B$  его пересечения с ломаной  $L^0$ . Построим треугольник  $BA'_1A''_1$ ; это будет наибольший равнобедренный треугольник  $T$ , заключающийся в  $Q$ . Если углы при вершинах  $A'_1, A''_1$  в  $Q - T$  таковы, что их сумма  $\gamma_1 + \gamma_2 \leq 2\pi - \alpha_1$ , то условие В выполнено. Если же  $\gamma_1 + \gamma_2 > 2\pi - \alpha_1$ , то оно не может быть выполнено, потому что при всяком меньшем треугольнике  $T$  сумма углов  $\gamma_1 + \gamma_2$  будет еще больше.

**6.** Следующая теорема дает достаточные условия, при которых из данной развертки можно склеить выпуклый многогранник, являющийся частью бесконечного выпуклого многогранника, и которые в известном смысле противоположны условиям теоремы 8.

**Теорема 9.** Пусть  $R$  — развертка, гомеоморфная кругу,  $L$  — ограничивающая ее ломаная,  $L^0$  — ломаная, полученная разворачиванием ломаной  $L$ , разорванной в какой-либо вершине  $A_1$ , угол при которой обозначим  $\alpha_1$ . Допустим, что из концов ломаной  $L^0$  можно провести два луча  $l_1, l_2$  так, что: А) вместе с ломаной  $L^0$  они ограничивают бесконечный (может быть, самоперекрывающийся) многоугольник  $Q$ , лежащий с внешней стороны  $L^0$ ; В) сумма углов  $\gamma_1, \gamma_2$  многоугольника  $Q$  при концах лучей  $l_1, l_2$  равна (или меньше)  $2\pi - \alpha_1$ . Тогда из развертки  $R$  можно склеить выпуклый многогранник, являющийся частью бесконечного выпуклого многогранника.

Пусть  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  — углы развертки  $R$  при вершинах ломаной  $L$ . Они же будут углами с внутренней стороны ломаной  $L^0$ . Углы многоугольника  $Q$  будут соответственно  $\beta_2 = 2\pi - \alpha_2, \dots, \beta_n = 2\pi - \alpha_n$  и  $\gamma_1, \gamma_2$ , причем  $\gamma_1 + \gamma_2 \leq 2\pi - \alpha_1$  (рис. 104). Отождествив бесконечные стороны  $l_1, l_2$  многоугольника  $Q$  друг с другом, а конечные его стороны с соответствующими граничными ребрами развертки  $R$ , получим развертку  $R + Q$ , гомеоморфную плоскости. В силу условий, наложенных на углы многоугольника  $Q$ , в этой развертке суммы углов вокруг всех вершин будут  $\leq 2\pi$  и из нее можно склеить выпуклый многогранник. Часть его, соответствующая данной развертке  $R$ , будет склеенным из нее выпуклым многогранником, и теорема доказана.

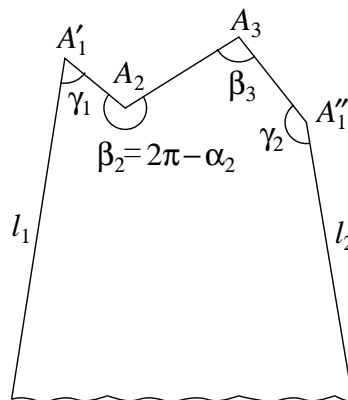


Рис. 104

Условие теоремы 9 для каждой данной развертки допускает прямую проверку. Развернув ломаную  $L$ , проведем из одного ее конца луч  $l_1$  так, чтобы угол  $\gamma_1$  с внешней стороны от  $L^0$  был наименьшим, при котором  $l_1$ , внешняя сторона ломаной  $L^0$  и хотя бы один какой-нибудь луч  $l$  из точки  $A''_1$  могли ограничивать некоторую область, быть может, и налегающую саму

на себя. (Возможность провести такой луч  $l_1$  проверяется конечным числом действий, хотя бы потому, что проверку надо проводить лишь для конечного числа сочетаний лучей  $l_1, l_2$ , идущих в вершины ломаной  $L^0$ .) Затем проводим из точки  $A_1''$  луч  $l_2$ , образующий с внешней стороной ломаной  $L^0$  угол  $\gamma_2 = 2\pi - \alpha_1 - \gamma_1$ . Если при этом лучи  $l_1, l_2$  и ломаная  $L^0$  ограничат лежащий с внешней стороны от  $L^0$  бесконечный, возможно налегающий на себя, многоугольник  $Q$  (рис. 105, а), то условие выполнено. Возможно, однако, что многоугольника  $Q$  не получится. Это может произойти по нескольким причинам:

- 1) лучи  $l_1, l_2$  и внешняя сторона ломаной  $L^0$  ограничат конечный многоугольник (рис. 105, б);
- 2) линия  $L^0$  пересекает сама себя таким образом, что не может ограничивать никакого многоугольника  $Q$ , лежащего с ее внешней стороны (рис. 105, в);
- 3) луч  $l_1$  или  $l_2$  пересекает ломаную  $L^0$  так, что вместе с  $L^0$  не может ограничивать лежащую с внешней стороны от  $L^0$  область (рис. 105, г).

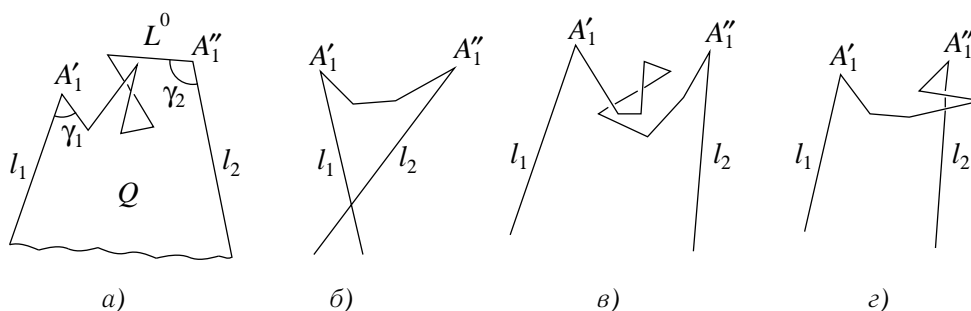


Рис. 105

Во всех случаях 1–3 условия теоремы 9 не будут выполнены и ни при каком другом выборе луча  $l_1$ , идущего из  $A_1'$ . Действительно, уменьшать  $\gamma_1$  нельзя, а увеличивая  $\gamma_1$ , надо уменьшать  $\gamma_2$ , что не может привести к устранению какого-либо из случаев 1–3.

Поскольку получаемый в теореме 9 многогранник есть часть бесконечно-го, то его кривизна не превосходит  $2\pi$ . Поэтому условие теоремы заведомо приложимо лишь к разверткам с кривизной  $\leq 2\pi$ .

Вопрос о том, в какой мере условия теоремы 9 вместе с ограничением кривизны оказываются необходимыми, остается открытым, не считая следующего простого случая.

Допустим, что все углы  $\alpha_i$  развертки  $R$ , кроме, быть может, одного  $\alpha_i$ , не превосходят  $\pi$ . В этом случае ломаная  $L^0$  будет получаться выпуклой во

внешнюю сторону и  $\gamma_1$  можно взять равным нулю. Единственным препятствием к построению требуемого теоремой 9 многоугольника  $Q$  может быть лишь случай 1 в рис. 105, б.

В ограниченном здесь ломаной  $L^0$  и лучами  $l_1, l_2$  многоугольнике углы суть  $\gamma_1 = 0, \gamma_2 = 2\pi - \alpha_1$ , далее  $2\pi - \alpha_1, \dots, 2\pi - \alpha_n$  и, наконец, угол  $\varphi$  между  $l_1$  и  $l_2$ . Сумма всех углов  $(n + 2)$ -угольника равна  $n\pi$ ; поэтому  $\sum_{i=1}^n (2\pi - \alpha_i) + \varphi = n\pi$ , и так как  $\varphi > 0$ , то

$$\sum_{i=1}^n (\pi - \alpha_i) < 0. \quad (12)$$

Вместе с тем, если  $\omega$  обозначает сумму кривизн внутренних вершин развертки  $R$ , то по теореме 2 § 8 главы I

$$\sum_{i=1}^n (\pi - \alpha_i) = 2\pi - \omega,$$

что вместе с (12) дает  $\omega > 2\pi$ . Таким образом, построение невозможно лишь при  $\omega > 2\pi$ .

Это приводит нас к следующей теореме:

**Теорема 10.** *Если у развертки, гомеоморфной кругу, все углы на границе, кроме, может быть, одного, не превосходят  $\pi$  и сумма кривизн внутренних вершин развертки не превосходит  $2\pi$ , то из такой развертки можно склеить выпуклый многогранник, являющийся частью бесконечного выпуклого многогранника.*

7. Теоремы 9 и 10 не могут быть обобщены на развертки  $R$ , ограниченные несколькими ломаными  $L_i$ , потому что иначе, подклеивая к каждой ломаной  $L_i$  соответствующий бесконечный многоугольник  $Q_i$ , мы получили бы бесконечную развертку, не гомеоморфную плоскости. Из такой развертки заведомо нельзя склеить никакого выпуклого многогранника, кроме разве бесконечной призмы. Но в этом случае сама развертка  $R$  представляла бы собой только часть такой призмы и имела кривизну, равную нулю.

По такой же причине теоремы 9 и 10 не обобщаются на бесконечные развертки, не считая тех, из которых склеивается часть бесконечной призмы.

Более того, можно доказать, что, исключая развертки, представляющие собой часть бесконечной призмы, ни для какой развертки, кроме гомеоморфной кругу, условия теорем 9 и 10 вообще не могут быть выполнены.

Зато в случае развертки, ограниченной несколькими замкнутыми или бесконечными ломаными  $L_i$ , для каждой из этих ломаных можно применять достаточные условия теорем 4–10 и получить, таким образом, общую теорему, охватывающую все эти теоремы в части достаточности их условий.



8. В заключение приведем несколько простых примеров разверток, из которых нельзя склеить никаких выпуклых многогранников, хотя они удовлетворяют тем заведомо необходимым условиям 1–3, какие были указаны еще в п<sup>о</sup> 1.

На рис. 106 изображен многоугольник  $Q$ , перекрывающийся сам с собой. Если его разрезать на треугольники, то получим развертку в обычном смысле, из которой, однако, нельзя склеить никакого выпуклого многогранника, если сторона  $a$  достаточно мала. Действительно, если бы из многоугольника  $Q$  со сколь угодно малой стороной  $a$  можно было склеить выпуклый многогранник, то в пределе при исчезающей стороне  $a$  из предельного многоугольника  $Q$  получалась бы область на некоторой выпуклой поверхности, что заведомо невозможно, потому что здесь сумма углов при точке  $a$  больше  $2\pi$ <sup>8)</sup>.

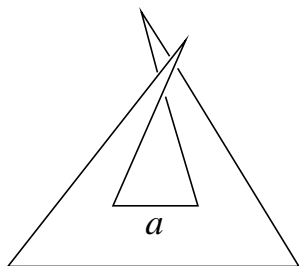


Рис. 106

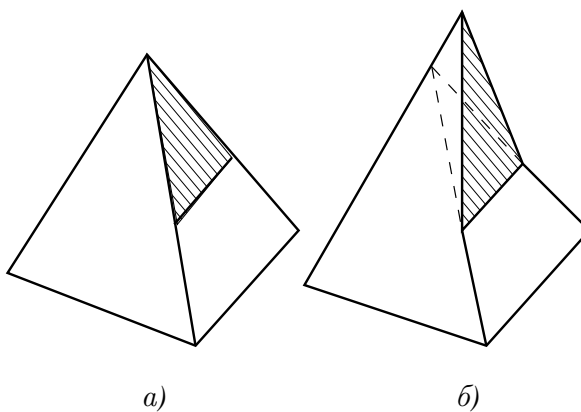


Рис. 107

Кривизна многоугольника  $Q$  равна нулю, и потому данный пример показывает, что даже из развертки нулевой кривизны не всегда можно склеить выпуклый многогранник. Вопрос о необходимых и достаточных условиях, при которых это возможно, остается совершенно открытым.

На рис. 107, *а* изображен правильный тетраэдр, у которого от одной грани отрезан треугольник  $T$ . Если к краям выреза приставить новые грани, как, например, на рис. 107, *б*, то получим невыпуклый многогранник  $P$ , который нельзя изогнуть в выпуклый. Поэтому из развертки этого многогранника нельзя склеить никакого выпуклого многогранника. Доказательство

<sup>8)</sup>Интересно непосредственно убедиться, что многоугольник  $Q$  с относительно очень малой стороной  $a$  не может быть наложен ни на какой выпуклый многогранник. При сколь малых  $a$  наступает такое явление?

основано на том, что тетраэдр с удаленным треугольником  $T$  не допускает изгибаний, т. е. не существует никакого изометричного, но не равного ему выпуклого многогранника. Это легко проверяемое утверждение является частным случаем теоремы, которая будет доказана в следующем параграфе (теорема 3 § 2). Вместе с тем, если бы существовал выпуклый многогранник, изометричный многограннику  $P$ , то его часть, соответствующая тетраэдру с вырезом  $T$ , была бы выпуклым многогранником, изометричным, но не равным тетраэдру с вырезом.

Теорема 3 § 2 позволяет построить сколько угодно подобных примеров разверток, из которых нельзя склеить никакого выпуклого многогранника.

## § 2. ИЗГИБАНИЕ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ

1. Говоря, что выпуклый многогранник  $P$  подвергается *изгибанию*, мы имеем в виду, что существует непрерывное семейство выпуклых многогранников  $P_t$ , изометричных, но не равных  $P$ . Точнее, это семейство обладает следующими свойствами: 1) каждому значению параметра  $t$  из некоторого промежутка, скажем  $0 \leq t \leq 1$ , отвечают выпуклый многогранник  $P_t$  и изометрическое отображение  $\varphi_t$  данного многогранника  $P$  на  $P_t$ , причем  $P_0 = P$  и  $\varphi_0$  есть тождественное отображение  $P$  самого на себя, а  $\varphi_t$  при  $t \neq 0$  не сводится к движению; 2) семейство многогранников  $P_t$  непрерывно, т. е. при  $t \rightarrow t_0$  точки  $\varphi_t(X)$  многогранников  $P_t$ , соответствующие любой данной точке  $X$  многогранника  $P$ , сходятся в точке  $\varphi_{t_0}(X)$  многогранника  $P_{t_0}$ . Дальше термин «изгибание» понимается именно в этом смысле, так что *изгибания, нарушающие выпуклость* или *превращающие многогранник в немноггранник*, исключаются. Всякий выпуклый многогранник допускает непрерывное изгибание с нарушением выпуклости, достаточно непрерывно продавливать его внутрь в окрестность любой вершины<sup>9)</sup>.

В § 3 и 5 главы III было доказано, что *выпуклые многогранники, конечные с кривизной, равной  $4\pi$ , и бесконечные с кривизной, равной  $2\pi$ , не допускают изометрических отображений помимо движений и отражений, а потому они тем более неизгибаемы*. Поэтому речь может идти только об изгибаниях многогранников, конечных с кривизной, меньшей  $4\pi$ , и бесконечных с кривизной, меньшей  $2\pi$ .

Мы покажем, однако, что среди таких многогранников также имеются неизгибаемые и даже не допускающие никаких изометрических отобра-

<sup>9)</sup> Пусть  $O$  — вершина многогранника  $P_0$  и  $Q_0$  — его опорная плоскость, касающаяся  $P_0$  только в точке  $O$ . Вдвигая эту плоскость параллельно вовнутрь, получим плоскости  $Q_t$ , отсекающие от  $P_0$  пирамиды  $R_t$ . Если при каждом  $t$  отражать пирамиду  $R_t$  в плоскости  $Q_t$ , то получим непрерывное семейство многогранников  $P_t$ , изометричных  $P_0$  и невыпуклых.

жений помимо тривиальных, т. е. помимо движений и отражений (теоремы 3 и 4).

В п<sup>о</sup> 2 § 5 главы IV было указано, что всякий полный (т. е. не имеющий границы) бесконечный многогранник с кривизной  $< 2\pi$  допускает непрерывное изгибание. Этот результат мы еще уточним в п<sup>о</sup> 6. Кроме того, мы докажем, что всякий многогранник, являющийся частью изгибаемого, сам допускает изгибания. Поэтому окажется, что многогранник, являющийся частью полного бесконечного многогранника с кривизной  $< 2\pi$ , будет изгибаемым. (Теорема 7 об изгибаемости части изгибаемого многогранника может сначала показаться совершенно очевидной. Однако такое заключение было бы поспешным, потому что при данном изгибании многогранника  $P$  некоторая его часть может, вообще говоря, оставаться неизменной. Легко подобрать соответствующие примеры; один из них представляет изгибание бесконечного многогранника, рассмотренное в п<sup>о</sup> 2 § 5 главы IV. Доказательство теоремы 7, которое будет здесь дано, оказывается не таким уже простым.)

Сделанные замечания показывают, что наша задача сводится к исследованию изгибаемости конечных многогранников с кривизной, меньшей  $4\pi$ , и бесконечных многогранников, имеющих кривизну, меньшую  $2\pi$ , но являющихся частями полных бесконечных многогранников с кривизной, равной  $2\pi$ .

Так как кривизна многогранника сосредоточена в его внутренних вершинах, то речь идет о многогранниках, получающихся из полных путем удаления частей, содержащих хотя бы одну вершину внутри или на границе.

Мы не знаем эффективных условий, необходимых и достаточных для изгибаемости выпуклого многогранника, так что поставленная задача не будет решена полностью, хотя излагаемые далее результаты подводят к такому ее решению, по-видимому, довольно близко<sup>10)</sup>.

На первых порах мы ограничимся рассмотрением выпуклых многогранников, гомеоморфных кругу, т. е. конечных и ограниченных одной замкнутой ломаной без кратных точек. Этот случай не только наиболее интересен с наглядной точки зрения, но и самый характерный, потому что, как мы потом покажем, все полученные для него результаты переносятся на многогранники другого топологического строения.

**2.** Пусть  $P$  — выпуклый многогранник, гомеоморфный кругу, и  $L$  — ограничивающая его замкнутая ломаная. Пусть  $Q$  — такой гомеоморфный кругу многоугольник, что ограничивающая его ломаная допускает отображение  $\psi$  на ломаную  $L$  с сохранением длин. Это, очевидно, означает, что при введении, если это необходимо, на ломаной  $L$  и многоугольнике  $Q$  до-

<sup>10)</sup>Теперь они известны, см. [224]. — Прим. В. А. Залгаллера.

полнительных вершин стороны многоугольника оказываются соответственно равными звеньям ломаной  $L$ . Здесь, как и всюду дальше, под многоугольником мы понимаем развертку, не имеющую вершин внутри и такую, что, будучи склеенной, она превращается в плоский многоугольник, могущий, однако, перекрываться сам с собой.

Отождествляя точки границ многогранника  $P$  и многоугольника  $Q$ , соответствующие друг другу при отображении  $\psi$ , получим гомеоморфную сфере развертку  $P + Q$ ; говоря так, мы не отличаем многогранника  $P$  от какой-либо его развертки. Для того чтобы из развертки  $P + Q$  можно было склеить выпуклый многогранник, необходимо и достаточно, чтобы полные углы, т. е. суммы углов, вокруг всех ее вершин были  $\leq 2\pi$ . Так как это условие для вершин многогранника  $P$  заведомо выполнено, а  $Q$  не имеет внутренних вершин, то остается потребовать, чтобы *суммы углов при отождествляемых точках границ многогранника  $P$  и многоугольника  $Q$  не превосходили  $2\pi$* . Если это «условие об углах» выполнено, то получаем замкнутый многогранник  $\bar{P} = P' \cup Q'$ , где части  $P'$  и  $Q'$  соответственно изометричны многограннику  $P$  и многоугольнику  $Q$ .

Это построение многогранника  $\bar{P}$  мы будем называть *подклеиванием многоугольника  $Q$  к границе данного многогранника  $P$* . Так как замкнутый многогранник  $\bar{P}$  определяется своей разверткой однозначно (с точностью до движения и отражения), то при данном многограннике  $P$  операция подклеивания однозначно определяется заданием многоугольника  $Q$  и отображением  $\psi$  его границ на границу многогранника  $P$ .

*Подклеивание всегда возможно.* Действительно, стоит лишь принять за  $\bar{P}$  границу выпуклой оболочки многогранника  $P$ . Тогда  $\bar{P}$  не имеет других вершин, помимо вершин самого  $P$ ; поэтому дополнение  $\bar{P} \setminus P$  может быть развернуто на плоскость, и, присоединяя к нему его границу, получим многоугольник  $Q$ . Подклеиванием этого многоугольника к многограннику  $P$  и получается  $\bar{P}$ .

Подклеивание, осуществляемое таким построением, можно назвать *тривиальным*.

Подклеивания многоугольников  $Q$  и  $Q'$  с отображениями  $\psi$  и  $\psi'$  их границ на границу многогранника  $P$  считаются одинаковыми тогда и только тогда, когда развертки  $P + Q$  и  $P + Q'$  изометричны и притом так, что изометрическое отображение  $\varphi$  развертки  $P + Q$  на  $P + Q'$  переводит  $P$  в себя, а  $Q$  — в  $Q'$ . Это означает, во-первых, что многоугольники  $Q$  и  $Q'$  изометричны и отображение  $\varphi$  для них можно рассматривать просто как их наложение, а во-вторых, это наложение сохраняет соответствие границ многоугольников  $Q$  и  $Q'$  границе многогранника  $P$ . (Это второе условие существенно потому, что при равенстве многоугольников  $Q$  и  $Q'$  способы их подклеивания к многограннику  $P$  могут быть различными, т. е. наложение

$\varphi$  многоугольника  $Q$  на  $Q'$  может и не приводить в совпадение те точки их границ, которые соответствуют (в силу отображений  $\psi$  и  $\psi'$ ) одной и той же точке  $X$  на границе многогранника  $P$ .)

**Теорема 1.** *Для того чтобы гомеоморфный кругу выпуклый многогранник  $P$  допускал нетривиальное изометрическое отображение, необходимо и достаточно, чтобы он допускал нетривиальное подклеивание. (Речь идет об изометрическом отображении на выпуклый же многогранник, и такое отображение считается тривиальным, если оно сводится к движению или движению и отражению.)*

Условие необходимо. Пусть многогранник  $P$  допускает нетривиальное изометрическое отображение  $\varphi$  на многогранник  $P'$ . Пусть  $\bar{P}$  и  $\bar{P}'$  — границы выпуклых оболочек многогранников  $P$  и  $P'$ , так что  $\bar{P} = P \cup Q$ ,  $\bar{P}' = P' \cup Q'$ , где  $Q$  и  $Q'$  можно развернуть на плоскость.

Вследствие изометрии многогранников  $P$  и  $P'$  многогранник  $\bar{P}'$  можно рассматривать как результат подклеивания к данному многограннику  $P$  многоугольника  $Q'$ . Тем самым мы отождествляем точки многогранников  $P$  и  $\bar{P}'$ , соответствующие при отображении  $\varphi$ , и получаем две развертки  $P+Q$  и  $P+Q'$ , образованные подклеиванием к  $P$  многоугольников  $Q$  и  $Q'$ <sup>11)</sup>.

Допустим вопреки доказываемому, что оба подклеивания одинаковы, так что имеется изометрическое отображение развертки  $P+Q$  на  $P+Q'$ , переводящее  $P$  в себя. Это, очевидно, равносильно тому, что имеется изометрическое отображение многогранника  $\bar{P} = P \cup Q$  на  $\bar{P}' = P \cup Q'$ , переводящее  $P$  в  $P'$ . Так как эти многогранники замкнуты, то такое отображение необходимо оказывается тривиальным, а вместе с ним оказывается тривиальным также отображение  $P$  на  $P'$ . Но, рассматривая  $P$  и  $P'$  как развертки, мы отождествили их точки, соответствующие при данном изометрическом отображении  $\varphi$  многогранника  $P$  на  $P'$ . Поэтому это  $\varphi$  как раз и сводится к полученному тривиальному отображению. Это противоречит исходному предположению, и тем самым необходимость условия теоремы доказана.

Пусть теперь многогранник  $P$  допускает, помимо тривиального, еще другое подклеивание, так что мы имеем два замкнутых многогранника  $\bar{P} = P \cup Q$  и  $\bar{P}' = P' \cup Q'$ , где  $P'$  изометричен  $P$ , а  $Q$  и  $Q'$  разворачиваются на плоскость и  $\bar{P}$  есть граница выпуклой оболочки многогранника  $P$ . Так как  $Q'$  разворачивается на плоскость, то многогранник  $\bar{P}'$  не имеет других вершин, помимо вершин многогранника  $P'$ , и, следовательно, также явля-

<sup>11)</sup>Здесь особенно следует различать нетривиальное отображение многогранников от их неравенства, потому что данный многогранник  $P$  может допускать нетривиальные изометрические отображения на себя; тогда многогранник  $P'$  мог бы просто совпадать с  $P$ , хотя отображение  $\varphi$  не было бы ни тождественным, ни каким-либо другим из тривиальных.

ется границей его выпуклой оболочки. Но ввиду того, что рассматриваемые подклеивания различны, многогранники  $\bar{P}$  и  $\bar{P}'$  не изометричны и тем более не равны. А так как из равенства многогранников  $P$  и  $P'$  следовало бы равенство их выпуклых оболочек, то  $P$  и  $P'$  также не равны, что и требовалось доказать.

**3.** Введем теперь понятие о «деформации подклеивания». Многогранник  $P$  вместе с подклеиваемым многоугольником  $Q$  образуют развертку  $P + Q$ , и под деформацией подклеивания мы понимаем такое непрерывное изменение этой развертки, при котором многогранник  $P$  остается неизменным, многоугольник же  $Q$  меняется (оставаясь, однако, многоугольником) либо сам  $Q$  остается неизменным, но меняется способ его подклеивания к многограннику  $P$ .

В совершенно строгих терминах деформация подклеивания может быть определена следующим образом.

Пусть каждому значению параметра  $t$  в промежутке  $[0, 1]$  сопоставлено подклеивание  $(Q_t, \psi_t)$  многоугольника  $Q_t$  к границе данного многогранника  $P$ , заданное отображением  $\psi_t$  границы  $Q_t$  на границу  $P$ . Пусть при всяком  $t_0$  и  $t \rightarrow t_0$  многоугольники  $Q_t$  сходятся к  $Q_{t_0}$  так, что для всякой точки  $X$  на границе  $P$   $\psi_t^{-1}(X) \rightarrow \psi_{t_0}^{-1}(X)$ , т. е. соответствующие точки на границах многоугольников  $Q_t$  сходятся к соответствующей точке на границе  $Q_{t_0}$ . Если не все подклеивания  $(Q_t, \psi_t)$  одинаковы и подклеивание  $(Q_0, \psi_0)$  тривиально, то мы говорим, что имеется деформация тривиального подклеивания.

**Теорема 2.** *Для того чтобы гомеоморфный кругу выпуклый многогранник  $P$  был изгибаемым, необходимо и достаточно, чтобы существовала деформация соответствующего ему тривиального подклеивания.*

Более того, каждой деформации тривиального подклеивания соответствует определенное изгибание многогранника  $P$ , и обратно.

Доказательство очевидно из теоремы 1, потому что в силу нее деформация подклеивания соответствует деформации многогранника, и обратно. Нужно только доказать, что обе деформации будут одновременно непрерывны. Мы ограничимся доказательством того, что непрерывной деформации подклеивания действительно соответствует изгибание многогранника  $P$  в смысле точного определения, данного в начале этого параграфа. Обратное утверждение представляет собой почти очевидное следствие самих определений; стоит лишь рассмотреть выпуклые оболочки  $\bar{P}_t = P_t \cup Q_t$  многогранников  $P_t$ , полученных из данного  $P$  путем изгибания.

Для того чтобы исключить движение многогранника  $P$ , выберем на нем три вершины  $A, B, C$ , и, закрепив в пространстве оси координат  $x, y, z$ , перенесем многогранник  $P$  так, чтобы вершина  $A$  попала в начало,  $B$  — на положительную полуось  $x$  и  $C$  — на полуплоскость  $y > 0$  плоскости  $x, y$ .

Всякий многогранник  $P'$ , изометричный  $P$ , мы будем считать расположенным так, что положения его соответственных вершин  $A', B', C'$  подчинены тем же условиям.

Для того чтобы исключить отражение, ориентируем многогранник  $P$ , задав на нем направление обхода какого-либо малого контура, и будем рассматривать только такие многогранники  $P'$ , изометричные  $P$ , которые получаются из  $P$  изометрическими отображениями, сохраняющими ориентацию винта, определенную данным направлением обхода и внешней нормалью. Так как при отражении ориентация такого винта меняется на обратную, то данное условие исключает отражение, а если для данного  $P'$  оно не выполнено, то берем вместо него симметричный многогранник. Когда движение и отражение исключены, можно сказать, что изгибание представляет собой только истинную деформацию многогранника. (Именно о таких изгибаниях с исключенным движением утверждается, что они однозначно соответствуют деформациям подклеивания.)

Пусть каждому  $t$  из данного промежутка отвечает подклеивание многоугольника  $Q_t$  к многограннику  $P$ , так что эти подклеивания представляют собой непрерывную деформацию тривиального. Тогда мы имеем непрерывное семейство разверток  $R_t = P + Q_t$  и семейство склеенных из них замкнутых многогранников  $\bar{P}_t = P_t \cup Q_t$ , где  $P_t$  изометричны  $P$ . Докажем, что при  $t \rightarrow t_0$  многогранники  $P_t$  сходятся к  $P_{t_0}$ . Допустим противное, и пусть мы имеем такую последовательность  $t_n \rightarrow t_0$ , что  $P_{t_n}$  не сходятся к  $P_{t_0}$ . Однако ввиду непрерывности семейства разверток  $R_t$  (по лемме 3 § 2 главы IV) из многогранников  $\bar{P}_{t_n}$  можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к многограннику  $\bar{P}$  с предельной разверткой  $R_{t_0}$ . Так как замкнутые выпуклые многогранники с одинаковыми развертками равны, а движение и отражение исключены, то этот многогранник  $\bar{P}$  совпадает с  $\bar{P}_{t_0}$ . Этим доказано, что многогранники  $\bar{P}_{t_n}$  должны сходить к  $\bar{P}_{t_0}$ . Вместе с ними также  $P_{t_n}$  сходятся к  $P_{t_0}$  и, более того, если  $X$  — какая-либо точка многогранника  $P$ , а  $\varphi_t$  — изометрические отображения  $P$  на  $P_t$ , то  $\varphi_{t_n}(X)$  сходятся к  $\varphi_{t_0}(X)$ . Действительно, ввиду наложенного выше на вершины  $A, B, C$  условия и сходимости  $\bar{P}_{t_n}$  к  $\bar{P}_{t_0}$ , точки  $\varphi_{t_n}(A), \varphi_{t_n}(B), \varphi_{t_n}(C)$  заведомо сходятся к  $\varphi_{t_0}(A), \varphi_{t_0}(B), \varphi_{t_0}(C)$ . Но задание трех точек полностью определяет положение всех остальных точек многогранника  $P_{t_0}$ , а потому  $\varphi_{t_n}(X) \rightarrow \varphi_{t_0}(X)$  и при всякой точке  $X$ .

Это согласно определению означает, что семейство многогранников  $P_t$  представляет результат изгибания данного многогранника  $P$ .

Этот вывод вовсе не тривиален, потому что он основан на теореме о равенстве замкнутых выпуклых многогранников с общей разверткой. Без нее нельзя быть уверенным в сходимости  $\bar{P}_{t_n}$  к  $\bar{P}_{t_0}$ , и тем самым в непрерывности полученного семейства многогранников.

4. Теорема 2 сводит вопрос об изгибании выпуклого многогранника к чисто планиметрической задаче о возможности деформации данного многоугольника с сохранением условий подклеивания, т. е. в основном с сохранением данных верхних границ его углов. Для выпуклых многоугольников эта задача решается до конца, что приводит к следующему результату:

**Теорема 3.** Пусть многогранник  $P$  получается из замкнутого выпуклого многогранника  $\bar{P}$  путем удаления некоторой его части, которая может быть развернута на плоскость и превращается тогда в выпуклый многоугольник  $Q$ , если к вырезу  $Q$  присоединить его границу. (Так как  $Q$  разворачивается на плоскость, то внутри него нет вершин.)

1) Если на границе выреза  $\bar{P} \setminus P$  лежат по крайней мере две вершины многогранника  $\bar{P}$ , то многогранник  $P$  изгибаем. (В качестве предельного случая допускается просто надрез многогранника  $\bar{P}$  по геодезической линии, соединяющей две его вершины.)

2) Если на границе выреза  $\bar{P} \setminus P$  лежат только одна вершина  $A$  многогранника  $\bar{P}$  и  $\alpha$ ,  $\alpha_0$  — углы при  $A$  на  $\bar{P} \setminus P$  и на  $P$ , то многогранник  $P$  изгибаем тогда и только тогда, когда  $\alpha \geq \alpha_0$ , или, иными словами, когда вырезаемый вместе с  $\bar{P} \setminus P$  угол  $\alpha$  не меньше половины полного угла  $\alpha_0 + \alpha$  вокруг вершины  $A$ . Более того, при  $\alpha < \alpha_0$  многогранник вообще не допускает нетривиальных изометрических отображений.

3) Если на границе выреза  $\bar{P} \setminus P$  нет вершин многогранника  $\bar{P}$ , то многогранник  $P$  неизгибаем.

Последнее утверждение содержится в теореме 1 §5 главы III, потому что при его условиях кривизна многогранника  $P$  равна  $4\pi$ .

Заметим, что так как  $P$  содержит все вершины многогранника  $\bar{P}$ , то  $\bar{P}$  есть граница выпуклой оболочки многогранника  $P$  и тем самым получается из  $P$  путем тривиального подклеивания многоугольника  $Q$ . В связи с этим многогранник  $P$  можно характеризовать как такой, который допускает тривиальное подклеивание выпуклого многоугольника. Докажем первое утверждение теоремы. Пусть  $A$  и  $B$  — те вершины многоугольника  $Q$ , которые соответствуют вершинам многогранника  $\bar{P}$ , и  $\alpha$ ,  $\beta$  — углы при этих вершинах на  $Q$  (рис. 108, а). Тогда, если  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$  — углы при этих вершинах на многограннике  $P$ , то  $\alpha + \alpha_0 < 2\pi$ ,  $\beta + \beta_0 < 2\pi$ , т. е.

$$\alpha < 2\pi - \alpha_0, \quad \beta < 2\pi - \beta_0. \quad (1)$$

Возьмем на границе многоугольника  $Q$  две точки  $C$  и  $D$ , разделяющие точки  $A$  и  $B$  (рис. 108, б). Построим выпуклый четырехугольник  $ACBD$  и будем вытягивать его диагональ  $CD$ , не меняя его сторон<sup>12)</sup>. При этом

<sup>12)</sup> Не исключается, что этот четырехугольник будет на самом деле треугольником (если  $A$  и  $B$  — соседние вершины и точка  $D$  — на стороне  $AB$ ).



части  $AC$ ,  $CB$ ,  $BD$ ,  $DA$  границы многоугольника  $Q$  будем перемещать без изменения их формы. Тогда углы  $\alpha$ ,  $\beta$  при  $A$  и  $B$  будут увеличиваться, прочие же углы многоугольника  $Q$  будут оставаться неизменными. При достаточно малой деформации неравенства (1) сохраняются, а так как все остальные углы не возрастают, то условие подклеивания не нарушится. Это в соединении с теоремой 2 доказывает первое утверждение.

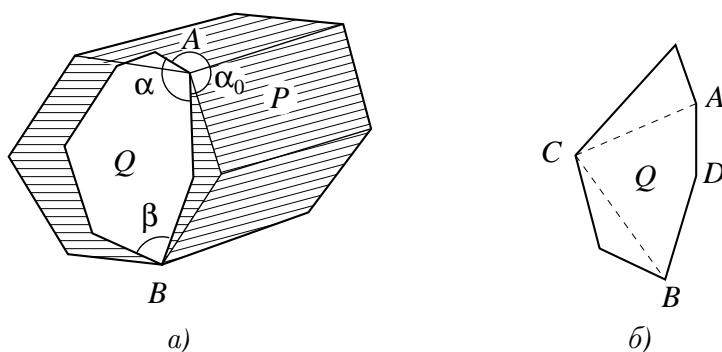


Рис. 108

В предельном случае, когда многоугольник  $Q$  вырождается в отрезок  $AB$ , вывод будет тот же самый; стоит лишь считать этот отрезок дважды покрытым и деформировать его в четырехугольник.

Докажем второе утверждение теоремы. Пусть  $A$  — та вершина многоугольника  $Q$ , которая соответствует вершине многогранника  $\overline{P}$ , и  $\alpha$  — угол в  $Q$  при этой вершине (рис. 109, а, б). Тогда, если  $\alpha_0$  — угол при той же вершине на многограннике  $P$ , то

$$\alpha < 2\pi - \alpha_0, \quad (2)$$

но для угла при любой другой точке  $B$  на границе многоугольника  $Q$  будем иметь соответственно  $\beta = 2\pi - \beta_0$ . Поэтому при деформации многоугольника  $Q$ , не нарушающей условия подклеивания для углов, ни один из углов  $\beta$  не может возрастать. Между тем при деформации выпуклого многоугольника, происходящей без нарушения выпуклости, приращения углов меняют знак не менее четырех раз при обходе вокруг многоугольника, так что должно быть по крайней мере два увеличивающихся угла. (См. лемму 4 §1 главы III, которая вместе с ее доказательством буквально переносится на плоские многоугольники.)

Деформация, нарушающая выпуклость, приводит к вдавливанию хотя бы одной вершины внутрь, и угол при ней увеличивается, так как становится больше  $\pi$ . Поэтому ни для какой вершины, кроме  $A$ , такое продавливание внутрь невозможно.

Взяв на сторонах многоугольника  $Q$ , исходящих из вершины  $A$ , точки  $X$ ,  $Y$  и отразив ломаную  $XAY$  в прямой  $XY$ , получим многоугольник  $Q'$  с входящей внутрь вершиной  $A'$  и двумя новыми выступающими вершинами  $X$ ,  $Y$  (рис. 109, в). Углы при них будут

$$\alpha' = 2\pi - \alpha; \quad \xi, \eta < \pi.$$

Углы  $\xi_0, \eta_0$  на многограннике  $P$  при точках, соответствующих  $X$  и  $Y$ , равны  $\pi$ , так как эти точки не являются вершинами на  $\overline{P}$ . Поэтому  $\xi + \xi_0 < 2\pi$ ,

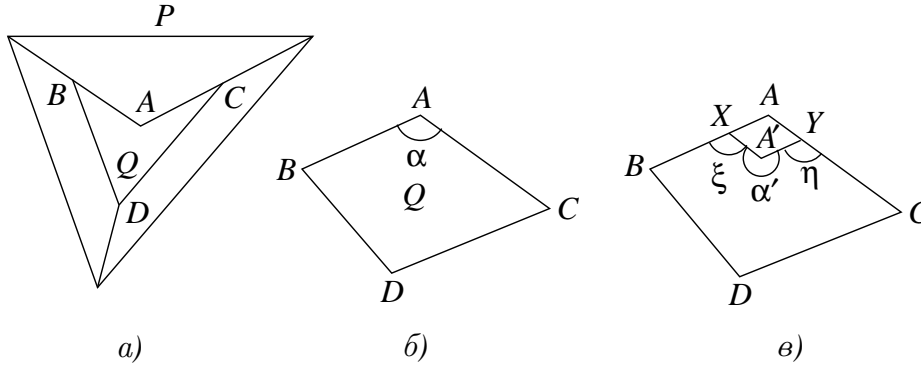


Рис. 109

$\eta + \eta_0 < 2\pi$ , т. е. условие подклеиваемости тут не нарушается. А для точки  $A'$  будем иметь

$$\alpha' + \alpha_0 = 2\pi - \alpha + \alpha_0.$$

Поэтому, если  $\alpha \geq \alpha_0$ , то  $\alpha' + \alpha_0 \leq 2\pi$ , и условие подклеиваемости в точке  $A'$  также не нарушается. Если же  $\alpha < \alpha_0$ , то  $\alpha' + \alpha_0 > 2\pi$ , т. е. это условие нарушается.

Следовательно, если  $\alpha \geq \alpha_0$ , то, непрерывно продавливая вершину  $A$  внутрь многоугольника  $Q$  (чему соответствует непрерывное движение точек  $X, Y$ , начиная от  $A$ ), получим его деформацию, не нарушающую условий подклеивания, и в силу теоремы 2 этому будет соответствовать непрерывное изгибание многогранника  $P$ . При таком изгибании на  $P$  появляются две новые вершины  $X, Y$ , движущиеся от вершины  $A$ . На примере рис. 109 это изгибание состоит в надламывании «козырька»  $ABC$ , которое можно наглядно проследить на рис. 110.

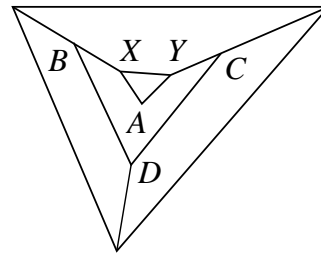


Рис. 110

Если  $\alpha < \alpha_0$ , то условие подклеивания нарушается, и его нельзя восстановить никакой деформацией многоугольника  $Q'$ . Действительно, углы при всех вершинах, кроме  $X$  и  $Y$ , должны при этом не возрастать, а тогда, согласно лемме 3 § 1 главы III, отрезок  $XU$  уменьшается, и потому угол  $\alpha'$  еще более увеличивается. Поэтому в силу теоремы 1 при  $\alpha < \alpha_0$  многогранник  $P$  вообще не допускает нетривиальных изометрических отображений.

**5. Теорема 4.** Пусть многогранник  $P$  получается из замкнутого выпуклого многогранника  $\bar{P}$  путем удаления некоторой его части  $\bar{P} \setminus P$ , которая не содержит вершин внутри и может быть поэтому развернута на плоскость. Пусть получающийся из нее многоугольник  $Q$  — невыпуклый. Пусть  $n$  означает число вершин многогранника  $\bar{P}$ , лежащих на границе выреза  $\bar{P} \setminus P$ , или, что то же самое, на границе многогранника  $P$ .

1) Если  $n \geq 2$ , то многогранник  $P$  может быть как изгибаемым, так и неизгибаемым.

2) Если  $n = 1$ , то  $P$  может быть как изгибаемым, так и неизгибаемым, причем в отличие от случая выпуклого многоугольника  $Q$  многогранник  $P$  может быть изгибаемым и при  $\alpha < \alpha_0$ , где  $\alpha$  и  $\alpha_0$  — углы на  $Q$  и  $P$  при вершинах, соответствующих единственной вершине многогранника  $\bar{P}$ , лежащей на границе  $P$ . При данном полном угле  $\alpha + \alpha_0$   $P$  может быть изгибаемым при сколь угодно малом  $\alpha$ .

3) Если  $n = 0$ , то  $P$  неизгибаем.

Последнее вытекает из неизгибаемости многогранника с кривизной, равной  $4\pi$ .

Рассмотрим первое утверждение теоремы при  $n \geq 3$ . Пусть  $A, B, C$  — вершины многоугольника  $Q$ , соответствующие вершинам многогранника  $\bar{P}$ , лежащим на границе  $P$  (рис. 111, а). Тогда совершенно так же, как в теореме 3, углы  $\alpha, \beta, \gamma$  при этих вершинах могут увеличиваться без нарушения условий подклеивания.

Рассмотрим четырехугольник  $ABCD$  с вершиной  $D$ , лежащей на периметре многоугольника  $Q$  между точками  $A$  и  $C$ . Будем деформировать этот четырехугольник, а вместе с ним многоугольник  $Q$ , перемещая ломаные  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{BC}$ ,  $\widehat{CD}$  и  $\widehat{DA}$  без изменения формы. Тогда все углы многоугольника будут оставаться неизменными, кроме углов  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  при вершинах  $A, B, C, D$ . В известных пределах для углов  $\alpha, \beta, \gamma$  допустимы любые изменения, угол же  $\delta$  может только уменьшаться, чтобы не нарушалось условие подклеивания. Но деформация, уменьшающая угол  $\delta$ , всегда возможна. Так, в случае, изображенном на рис. 111, б, угол  $\delta$  уменьшается, если укорачивать диагональ  $AC$ . При другом строении многоугольника  $Q$  возможно, что укорочение диагонали  $AC$  поведет к увеличению угла  $\delta$ , но тогда, наоборот, нужно удлинять диагональ  $AC$ , и угол  $\delta$  будет опять уменьшаться. (Осо-

бый случай возникает, когда все три точки  $A, B, C$  расположены на одной прямой, так что при неизменных длинах отрезков  $AB$  и  $BC$  «диагональ»  $AC$  может только уменьшаться<sup>13)</sup>.)

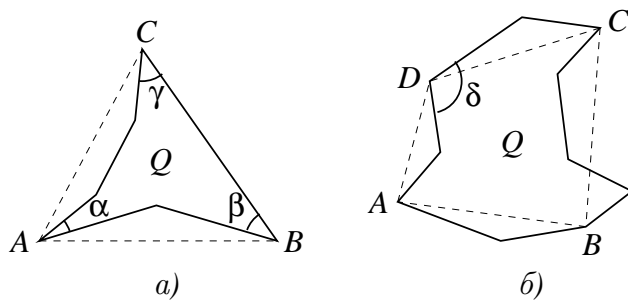


Рис. 111

Во всяком случае, если точки  $A, B, C$  не лежат на одной прямой, доказано, что деформация, не нарушающая условия подклеивания, возможна.

Обратимся теперь к случаю, когда на границе многогранника  $P$  имеется не более двух вершин многогранника  $\bar{P}$ . То, что тогда многогранник  $P$  может быть изгибаемым, доказывается сразу, если углы многоугольника  $Q$

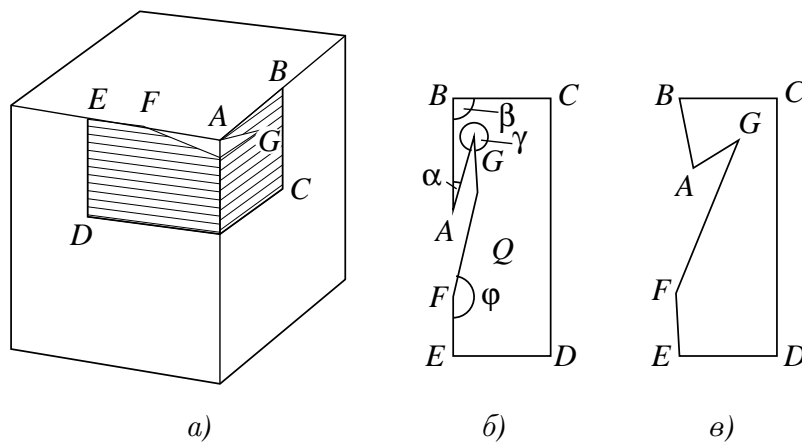


Рис. 112

при соответствующих вершинах столь велики, что продавливание их внутрь не нарушает условия подклеиваемости, так же как в случае выпуклого многоугольника  $Q$ . Поэтому остается указать примеры неизгибаемого многогранника  $P$  или, напротив, изгибаемого, но только тогда, когда угол при

<sup>13)</sup>Здесь и скрывается возможность неизгибаемости, см. [224]. — Прим. В. А. Залгалера.

вершине многоугольника  $Q$ , соответствующей единственной вершине многогранника  $\bar{P}$ , лежащей на границе  $P$ , сколь угодно мал.

Обратимся к рис. 112, а, где изображен куб с вырезанным невыпуклым многоугольником  $Q$ , отдельно изображенным на рис. 112, б. Если, не меняя длин сторон  $Q$ , изменять углы  $\alpha, \beta, \gamma, \varphi$  так, чтобы угол  $\beta$  убывал, то, как легко проверить, углы  $\gamma$  и  $\varphi$  будут также убывать, а угол  $\alpha$  будет увеличиваться. Измененный многоугольник  $Q$  (рис. 112, в) сохраняет условия подклеиваемости, так что куб с указанным вырезом оказывается изгибаемым. Отметим, что многоугольник  $Q$  подходит лишь к одной вершине  $A$  куба и может иметь при ней сколь угодно малый угол  $\alpha$ . Полученное изгибание, конечно, довольно сложно — при нем на кубе появляются три новые вершины  $B, F, G$ .

Предлагаем две задачи, возникающие в связи с теоремой 4. 1) Исследовать условия изгибаемости многогранника, получающегося из замкнутого путем вырезания многоугольника  $Q$  такого вида, как на рис. 113, а, при условии, что вершины  $A, B$  лежат в

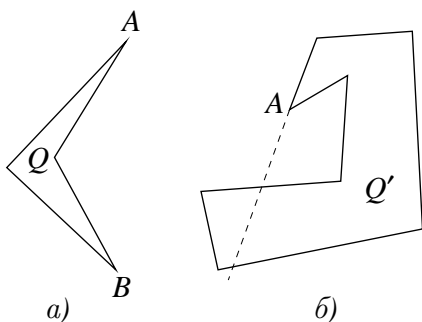


Рис. 113

вершинах замкнутого многогранника. (Более общий случай многоугольника  $Q$  аналогичного строения исследуется так же.) Здесь возможна как изгибаемость, так и неизгибаемость; это может зависеть от разных условий. 2) Доказать, что многогранник, получаемый из замкнутого путем вырезывания многоугольника  $Q$  вида, как на рис. 113, б, изгибаем, если  $A$  — вершина замкнутого многогранника  $\bar{P}$  и продолжение хотя бы одной из сторон угла  $A$  пересекает  $Q$ . Более того, для изгибаемости достаточно, чтобы такое продолжение стороны пересекало  $Q$  после поворота вокруг  $A$  на угол  $\alpha \leq \frac{1}{2} \min\{2\pi - \theta, \pi\}$ , где  $\theta$  — полный угол вокруг вершины  $A$  многогранника  $\bar{P}$ .

**6. Теорема 5.** Если гомеоморфный кругу многогранник  $P$  получается из замкнутого выпуклого многогранника  $P_0$  удалением его части  $P_0 \setminus P$ , содержащей внутри хотя бы одну вершину, то многогранник  $P$  изгибаем.

Пусть многогранник  $P$  получен из  $P_0$  указанным способом и пусть  $\bar{P}$  — граница его выпуклой оболочки. Покажем, что  $\bar{P}$  имеет хотя бы одну грань, не являющуюся продолжением никакой грани многогранника  $P$ .

Допустим противное. Тогда  $\bar{P}$  получается, очевидно, простым продолжением крайних граней многогранника  $P$ . Так как  $P_0$  содержит  $P$  и потому заведомо охватывает  $\bar{P}$ , то всякая грань многогранника  $\bar{P}$ , являющаяся продолжением грани многогранника  $P$ , должна принадлежать также  $P_0$ . Но

продолжение граней многогранника  $P$  однозначно определяет замкнутый выпуклый многогранник  $\overline{P}$ . Таким образом, оказывается, что все грани замкнутого многогранника принадлежат также  $P_0$ , откуда ясно, что  $\overline{P}$  и  $P_0$  совпадают. Однако выпуклая оболочка многогранника  $P$  не имеет других вершин, помимо вершин самого  $P$ , а потому оказывается, что  $P$  и  $P_0$  имеют одни и те же вершины; но это противоречит условию, что  $P$  получается из  $P_0$  удалением области, содержащей внутри хотя бы одну вершину.

Следовательно,  $\overline{P}$  имеет по меньшей мере одну грань, не являющуюся продолжением никакой грани многогранника  $P$ . Так как у  $P$  и  $\overline{P}$  вершины общие, то вершины этой грани лежат на границе многогранника  $P$ . Их, очевидно, не менее трех, а потому  $P$  получается из  $\overline{P}$  удалением части  $\overline{P} \setminus P$ , на границах которой лежат минимум три вершины. А тогда, согласно теореме 4, многогранник  $P$  оказывается изгибаемым, что и требовалось доказать<sup>14)</sup>.

7. Покажем теперь, что рассмотрение одних многогранников, гомеоморфных кругу, по существу не является ограничением.

**Теорема 6.** *Конечный выпуклый многогранник, ограниченный несколькими ломаными, изгибается тогда и только тогда, когда он есть часть изгибаемого выпуклого многогранника, ограниченного только одной из этих ломаных.*

Пусть данный многогранник  $P$ , ограниченный ломаными  $L_1, \dots, L_n$ , неизгибаем. Пусть многогранник  $P_1 = P \cup Q_1 \cup \dots \cup Q_n$  получен из  $P$  заклеиванием всех ломаных  $L_i$  кроме  $L_1$ . Например,  $P_1$  может быть границей выпуклой оболочки многогранника  $P$  за вычетом многоугольника, заклеивающего ломаную  $L_1$ . Однако мы вовсе не требуем, чтобы  $Q_2, \dots, Q_n$  были многоугольниками; важно только, что они суть выпуклые многогранники, ограниченные каждой одной ломаной  $L_i$ .

Так как многогранник  $P$  неизгибаем, то единственно возможные изгибания многогранника  $P_1$  должны сводиться к изгибаниям каждого  $Q_i$  при неизменности его границы  $L_i$ . Однако такое изгибание невозможно, потому что при неизменной границе многоугольник, который можно подклеить к  $Q_i$ , определен однозначно. (Даже более того, теорема 4 § 5 главы III утверждает, что изгибание многогранника  $Q_i$  невозможно, если заданы только углы между его граничными ребрами.)

Этим доказано, что если многогранник  $P$  неизгибаем, то никакой содержащий его многогранник, ограниченный только одной из ломаных  $L_1, L_2, \dots, L_n$ , не может быть изгибаемым.

<sup>14)</sup> Особый случай утверждения 1 теоремы 4, когда три вершины лежат на одной прямой, здесь исключается, так как речь идет о трех вершинах, принадлежащих одной грани на  $\overline{P} \setminus P$ . При развертывании грани на плоскость они не могут оказаться на одной прямой.

Пусть теперь многогранник  $P$  изгибаем. Пусть  $\bar{P} = P \cup Q_1 \cup \dots \cup Q_n$  — граница его выпуклой оболочки. Изгибанию многогранника  $P$  соответствует деформация его выпуклой оболочки и вместе с нею деформация многоугольников  $Q_i$ <sup>15)</sup>. Поэтому, если все ломаные  $L_1, \dots, L_n$ , ограничивающие  $P$ , не имеют общих вершин, то в силу независимости условий подклеивания к каждой ломаной среди многоугольников  $Q_i$  должен быть хотя бы один такой, например  $Q_1$ , который можно деформировать, оставляя другие неизменными. Тогда многогранник  $P_1 = P \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_n$ , ограниченный одной ломаной  $L_1$ , оказывается изгибаемым.

Если некоторые из ломаных  $L_1, \dots, L_n$  имеют общие вершины, то наше рассуждение неприменимо. В этом случае можно иметь две точки зрения. Во-первых, можно считать две ломаные с общей вершиной за одну. Вырезаемый многоугольник «перетянут» в этой вершине, и ее следует считать за две совпадающие вершины. При деформации подклеивания и соответственно при изгибании многогранника допускается раздвижение этих вершин. Во-вторых, можно считать две ломаные с общей вершиной за две различные ломаные. Тогда при изгибании многогранника раздвижение в этой вершине не допускается. Представляется очень вероятным, что в этом случае теорема 6 также имеет место; однако мы не имеем для этого исчерпывающего доказательства. Полное решение этого вопроса представляет интересную задачу<sup>16)</sup>.

**8. Теорема 7.** *Если многогранник  $P$  есть часть изгибаемого конечного выпуклого многогранника  $P_0$ , то многогранник  $P$  также изгибаем.*

(Это утверждение может на первый взгляд показаться совершенно тривиальным. Однако это не совсем так, потому что при данном изгибании многогранника  $P_0$  некоторая его часть  $P$  может оставаться неизменной. Легко подобрать соответствующие примеры.)

Пусть многогранник  $P_0$  изгибаем, так что имеем семейство изометричных ему многогранников  $P_t$ . Допустим, вопреки теореме, что  $P_0$  содержит неизгибаемую часть  $P$ , которая, следовательно, содержится также во всех  $P_t$ . Пусть  $\bar{P}$  и  $\bar{P}_t$  — границы выпуклых оболочек многогранников  $P$  и  $P_t$ . Выпуклая оболочка определяется вершинами; поэтому если бы  $\bar{P}_t$  при каком-либо  $t$  не совпадала с  $\bar{P}$ , то она имела бы вершины, помимо вершин многогранника  $P$ . Но тогда  $P$  получался бы из замкнутого многогранника  $\bar{P}_t$  исключением некоторой области, содержащей вершину внутри, и по теореме 5 многогранник  $P$  оказывался бы изгибаемым (если  $P$  ограничен не одной ломаной, то то же заключение верно в силу теоремы 6). Это

<sup>15)</sup>Здесь и дальше мы для простоты говорим о деформации многоугольника, имея в виду деформацию подклеивания в смысле точного определения, данного выше в п<sup>о</sup> 3.

<sup>16)</sup>См. статью [224] и заметку [227]. — Прим. В. А. Залгаллера.

противоречит условию, а потому  $\overline{P}_t$  и  $\overline{P}$  должны совпадать при всех  $t$ . Следовательно, выпуклая оболочка многогранников  $P_t$  остается неизменной и совпадает с выпуклой оболочкой многогранника  $P_0$ , откуда следует, что сами многогранники  $P_t$  совпадают с  $P_0$ . Это заключение относится к любому изгибанию многогранника  $P_0$ , тем самым, вопреки предположению, он оказывается неизгибаемым, и теорема доказана.

Полученный результат в соединении с первым утверждением теоремы 3 приводит к заключению, что если из замкнутого многогранника  $P_0$  вырезана часть  $Q$ , разворачиваемая в многоугольник, то оставшийся многогранник будет заведомо изгибаем, если  $Q$  содержит отрезок (геодезическую), соединяющую две вершины многогранника  $P_0$ . Следовательно, при удалении невыпуклого многоугольника  $Q$  оставшийся многогранник может быть неизгибаемым только тогда, когда  $Q$  не содержит никакого такого отрезка.

Вследствие теорем 3–7 остается только исследовать вопрос об изгибаемости или неизгибаемости многогранника, полученного из замкнутого  $P_0$  удалением части, разворачиваемой в невыпуклый многоугольник  $Q$  и содержащей на границе не более двух вершин многогранника  $P_0$ , причем в последнем случае нужно рассматривать лишь такие вырезы, которые не содержат геодезической, соединяющей эти вершины. На основании теоремы 2 задача сводится к вопросу о возможности деформации многоугольника  $Q$  с сохранением условия подклеиваемости<sup>17)</sup>.

**9.** Обратимся к изгибаниям бесконечных выпуклых многогранников.

Как доказано в §3 и 5 главы III, бесконечный многогранник с кривизной  $2\pi$  неизгибаем, даже если он имеет границу. Поэтому речь должна идти о многогранниках с кривизной  $< 2\pi$ . При этом нужно различать две возможности:

- 1) бесконечный многогранник  $P$  есть часть многогранника с кривизной  $2\pi$ ;
- 2) бесконечный многогранник  $P$  есть бесконечный полный многогранник с кривизной, меньшей  $2\pi$ , или часть такого полного многогранника.

Так как бесконечный многогранник с кривизной  $2\pi$ , подобно замкнутому, неизгибаем, то к многогранникам первого типа приложимы методы и выводы предыдущих пунктов. Несколько новым будет случай, когда данный бесконечный многогранник получается из полного с кривизной, равной  $2\pi$ , путем исключения какого-то бесконечного куска.

Как крайний случай можно рассматривать многогранники, получаемые из полных с помощью бесконечных разрезов. Если разрезать многогранник по бесконечному лучу, исходящему из вершины, то он становится изгибаемым. Если же разрез достаточно сильно искривлен в начале и лишь потом

<sup>17)</sup>Теперь этот вопрос полностью решен, см. [224]. — Прим. В. А. Залгаллера.



распрямляется, уходя в бесконечность, то многогранник может быть неизгибаемым<sup>18)</sup>.

Мы не будем, однако, останавливаться на исследовании этого случая. Понятие деформации подклеивания естественно обобщается на бесконечные многоугольники, а вместе с ним на указанный случай переносится также основанный на этой деформации метод.

Рассматривая бесконечные многогранники, получаемые из полных с кривизной  $2\pi$  удалением конечных или бесконечных кусков, применяя соображения, вполне аналогичные примененным выше к конечным многогранникам, читатель сам сможет сформулировать и доказать теоремы об изгибании таких многогранников, подобные теоремам 1–7. В частности, подобно сказанному в теоремах 3 и 4, такие многогранники могут быть как изгибаемыми, так и неизгибаемыми.

Для многогранников второго типа вопрос решается однозначно: все они изгибаемы. Для полных многогранников все возможные их изгибания определяются теоремой, вытекающей из теоремы Оловянишникова, доказанной в § 5 главы IV.

**Теорема 8.** Пусть  $P_0$  — бесконечный полный выпуклый многогранник с кривизной  $< 2\pi$ ,  $V_0$  — его предельный угол и  $G_0$  — образующая угла  $V_0$ , предельная для некоторого данного луча  $L_0$  на  $P_0$ . Пусть  $V_1$  — многогранный угол, изометричный  $V_0$ , и  $G_1$  — его образующая. Тогда

1) угол  $V_0$  может быть изогнут в  $V_1$  так, что образующая  $G_0$  перейдет в  $G_1$ ;

2) это изгибание угла  $V_0$  однозначно определяет изгибание многогранника  $P_0$  в многогранник  $P_1$  с предельным углом  $V_1$ , причем образующая  $G_1$  будет предельной для луча на  $P_1$ , соответствующего по изометрии лучу  $L_0$ .

Других изгибаний многогранника  $P_0$  нет.

То, что изгибание  $V_0$  в  $V_1$  однозначно определяет изгибание  $P_0$  в  $P_1$ , означает, что семейству углов  $V_t$  с образующими  $G_t$  отвечает определенное семейство многогранников  $P_t$ , если пренебрегать переносом, который не меняет ни предельного угла, ни предельной образующей.

Первое утверждение об изгибаемости многогранного угла достаточно очевидно и его строгое доказательство не представляет труда. Докажем второе утверждение.

Пусть семейство многогранных углов  $V_t$  с отмеченными образующими  $G_t$  осуществляет изгибание угла  $V_0$  с образующей  $G_0$  в  $V_1, G_1$ <sup>19)</sup>. По теореме

<sup>18)</sup> Результаты о многогранниках с разрезом получены в [228]. — Прим. В. А. Залгаллера.

<sup>19)</sup> Не исключается, что углы  $V_0, V_1$  равны, но образующие  $G_0, G_1$  занимают на них разное положение. Тогда, считая  $V_1$  совпадающим с  $V_0$ , сводим изгибание  $V_0$  в  $V_1$  к такому изгибанию  $V_0$  самого в себя, при котором образующая  $G_0$  переходит в  $G_1$ .

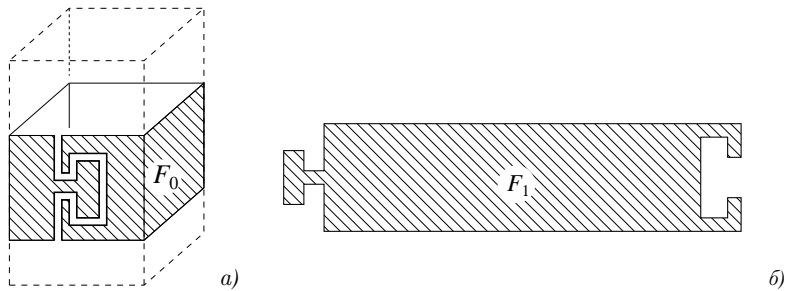
Оловянишникова (теорема § 5 главы IV и теорема 3 § 4 главы III) каждому  $V_t$  с отмеченной образующей  $G_t$  отвечает и притом единственный многогранник  $P_t$ , изометричный  $P_0$ , с условием соответствия луча  $L_0$  образующей  $G_t$  и так же ориентированный, как  $P_0$ . (Ориентация при непрерывном изгибании должна, конечно, сохраняться.) То, что многогранники  $P_t$  образуют непрерывное семейство, доказывается так же, как аналогичное утверждение в теореме 2, на основании теоремы единственности (§ 4 главы III).

Так как, обратно, всякое изгибание многогранника порождает изгибание его предельного угла, то никаких других изгибаний многогранник  $P_0$  не допускает.

**10.** Отметим еще два вопроса. Можно дать простые примеры изометричных выпуклых многогранников с краем, не допускающих изгибания друг в друга с сохранением выпуклости (найдите такие примеры)<sup>20)</sup>. Тем не менее можно рассчитывать, что верна следующая теорема: два достаточно близких изометричных многогранника изгибаемы один в другой. Точнее, если выпуклые многогранники  $P_i$ , изометричные многограннику  $P$ , сходятся к  $P$ , то  $P$  изгибаем в любой из многогранников  $P_i$  с достаточно большим номером<sup>21)</sup>.

Второй вопрос относится к невыпуклым многогранникам. Не известно ни одного примера замкнутого многогранника, допускающего непрерывные изгибания без переламывания граней. (Известные примеры представляют многогранники с самопересечениями; они, очевидно, не допускают изгиба-

<sup>20)</sup>Рассмотрим на боковой поверхности призмы, изображенной на рис. а, пояс  $F_0$  с «застегнутой пряжкой». Этот пояс как выпуклый многогранник с краем изометричен плоскому многограннику  $F_1$  (рис. б). Однако нельзя перевести  $F_0$  в  $F_1$  путем непрерывного изгибания в классе выпуклых многогранников с краем. (Но это можно сделать в



классе «локально выпуклых» многогранников с краем: достаточно непрерывно увеличивать поперечное сечение призмы, разрешая расходящимся частям «пряжки» в ходе изгибания налегать друг на друга.) — Прим. В. А. Залгаллера.

<sup>21)</sup>Для многогранников это, вероятно, верное утверждение остается недоказанным. Но для выпуклых поверхностей с краем аналогичное утверждение неверно, см. [225]. — Прим. В. А. Залгаллера.

ний, реально осуществимых на моделях.) Наиболее интересной проблемой теории многогранников представляется решение вопроса: все ли замкнутые многогранники неизгибаемы без переламывания граней или можно указать примеры изгибаемых<sup>22)</sup>?

### § 3. ОБОБЩЕНИЯ К ГЛАВАМ IV и V

1. При перенесении теорем глав IV и V на неевклидовы трехмерные пространства Лобачевского и сферическое речь должна идти о развертках, образованных из многоугольников в смысле геометрии соответствующего пространства. Так, в сферическом пространстве это будут обычные сферические многоугольники на сфере, радиус которой равен радиусу данного сферического пространства.

Имея в виду это условие, *теорему существования замкнутого выпуклого многогранника с данной разверткой можно сформулировать в пространстве Лобачевского или в сферическом без каких бы то ни было изменений.* Доказательство ее также остается почти неизменным, потому что по существу оно не связано с аксиомой параллельности. Изменения, которые нужно внести в доказательство, изложенное в § 1–3 главы IV, мы предоставляем сделать читателю. Здесь же мы лишь укажем те пункты доказательства, которые нуждаются в таком изменении.

Прежде всего отметим, что доказательство значительно проще переносится в пространство Лобачевского, чем в сферическое. Глубокая причина этого состоит в том, что аксиоматика сферической геометрии отличается от евклидовой не только отсутствием аксиомы параллельности, но также аксиомами сочетания и порядка; например, в двухмерном сферическом пространстве или, попросту, на сфере две диаметрально противоположные точки соединимы бесконечным числом различных «прямых», роль которых играют дуги больших кругов. Последнее приводит, в частности, к тому, что в сферическом пространстве неверно утверждение о разбиваемости всякого многоугольника диагоналями на треугольники (в этом нетрудно убедиться на примере).

Обращаясь к лемме 1 § 1 главы IV, замечаем следующее. Утверждение, что число вершин развертки не менее трех, верно и в пространстве Лобачевского. Действительно, так как пространство Лобачевского имеет отрицательную кривизну, то полная (или интегральная) кривизна развертки, равная по-прежнему  $4\pi$  (тот факт, что полная кривизна развертки, гомеоморфной сфере, равна  $4\pi$ , вовсе не зависит от кривизны пространства), складывается из положительных кривизн вершин и отрицательных кривизн многоугольников развертки. Поэтому сумма кривизн вершин больше  $4\pi$ , а так как кривизна каждой вершины меньше  $2\pi$ , то вершин не меньше трех. В случае сферического пространства то же рассуждение показывает, что сумма кривизн вершин меньше  $4\pi$ . В этом случае существуют развертки, вовсе не имеющие вершин (многогранник с такой разверткой есть просто сфера), а также развертки с двумя вершинами (всякую такую развертку можно представить в виде двуугольника, склеенного по сторонам); разверток с одной вершиной, как можно показать, не существует. Теперь, чтобы получить в неевклидовом пространстве утверждение, заменяющее лемму 1, достаточно непосредственно убедиться в том, что все развертки с числом вершин, не большим трех, реализуемы.

При доказательстве леммы 2 следует также различать два случая. В пространстве Лобачевского доказательство повторяется дословно. В сферическом пространстве, как уже упоминалось, неверна теорема о триангулируемости многоугольника. Однако, несмотря

<sup>22)</sup>См. примечание <sup>19)</sup> к § 6 гл. III на с. 184. — Прим. В. А. Залгаллера.

на это, лемма 2 оказывается справедливой, но для ее доказательства нужно привлечь некоторые дополнительные соображения. Подробно разобраться во всем этом — интересная задача, которая предлагается читателю.

Доказательство леммы 3 требует лишь незначительных изменений. Доказательство леммы 4 основано на том факте, что угол треугольника является существенно монотонной функцией противоположащей стороны, что верно и в неевклидовых пространствах. Наконец, применение теоремы о единственности многогранника с данной разверткой не вызывает сомнений, поскольку в п<sup>о</sup> 4 § 6 главы III объяснено, что доказательство этой теоремы переносится в неевклидовы пространства дословно, если из рассмотрения исключаются «двухвершинники». Но они нас не интересуют потому, что теорема единственности применяется лишь к многогранникам, имеющим не менее трех вершин.

Таким образом, проследивая доказательство от начала до конца и внося соответствующие изменения, читатель докажет существование многогранника с данной разверткой и для неевклидовых пространств.

Вместе с указанной теоремой на эти пространства обобщаются ее следствия, полученные в § 1 настоящей главы относительно склеивания конечных многогранников с границей (общие теоремы 1 и 7 § 1, теорема 2 о шапочке) и в § 2 относительно изгибаний конечных многогранников (теоремы 1–7 § 2). Здесь уже ничего не нужно менять в доказательствах.

В сферическом пространстве нет бесконечных многоугольников, а потому там не может стоять вопрос о склеивании бесконечных многогранников.

В пространстве же Лобачевского, напротив, этот вопрос оказывается бесконечно богаче по содержанию, чем в евклидовом пространстве. В этом последнем, не считая бесконечных призм, всякий полный бесконечный выпуклый многогранник гомеоморфен плоскости. В пространстве же Лобачевского, как уже было указано в § 6 главы III, существуют бесконечные выпуклые многогранники, гомеоморфные любой плоской области, ограниченной конечным числом кривых.

В связи с этим теорема о существовании бесконечного многогранника с данной разверткой выглядит в пространстве Лобачевского следующим образом: *Из всякой развертки, составленной из конечных и бесконечных многоугольников на плоскости Лобачевского, не имеющей границы и гомеоморфной любой плоской области<sup>23)</sup>, можно склеить выпуклый многогранник в соответствующем<sup>24)</sup> пространстве Лобачевского.*

Доказательство этой теоремы осуществляется на основании теоремы о замкнутом многограннике. Именно, из развертки  $R$  вырезается конечная часть  $R'$  так, что из нее можно склеить замкнутый многогранник, после чего, расширяя эту часть  $R'$  на всю развертку  $R$ , получаем в пределе бесконечный многогранник, склеенный из развертки  $R$ <sup>25)</sup>.

Теорема Оловянишникова не может быть распространена в пространство Лобачевского, пока остается неизученным понятие предельного угла многогранника в этом пространстве. Об этой задаче мы говорили уже в § 6 главы III. Ее решение и тем более полное исследование изгибаний всех бесконечных многогранников любого топологического строения в пространстве Лобачевского представляют достаточно интересную проблему<sup>26)</sup>.

<sup>23)</sup> То, что область ограничена конечным числом кривых, добавлять не нужно: это уже следует из того, что развертка по определению содержит лишь конечное число многоугольников.

<sup>24)</sup> Здесь нужно помнить, что пространства Лобачевского различаются своей кривизной.

<sup>25)</sup> В [14] этот прием применен к общему случаю не обязательно многогранной метрики.

<sup>26)</sup> Задачи об изгибании и жесткости бесконечных многогранников в пространстве Лобачевского пока еще не решены до конца. Частные результаты см. в [51, 52, 75, 89, 95]. — Прим. В. А. Залгаллера.

2. К обобщению теорем о существовании многогранника с данной разверткой на кривые поверхности можно подходить с двух точек зрения.

Первая, более конкретная, но зато и менее общая, точка зрения состоит в том, что вместо развертки, составленной из плоских многоугольников, можно рассматривать «развертку», образованную конечным числом кусков произвольных выпуклых поверхностей. Под «разверткой» понимается тогда совокупность кусков  $G_1, \dots, G_n$  выпуклых поверхностей со следующими свойствами:

1) Каждый кусок  $G_i$  гомеоморфен многоугольнику, конечному или бесконечному, и ограничен спрямляемыми кривыми.

Граница каждого куска произвольно разбивается на отрезки — стороны, точки деления считаются вершинами.

2) Стороны кусков  $G_i$  «склеиваются», т. е. отождествляются друг с другом попарно так, что отождествляемые отрезки всегда имеют равные длины. Некоторые стороны могут не склеиваться с другими, и тогда они образуют границу «развертки».

В частном случае эти  $G_i$  могут быть кусками плоскости.

Мы говорим, что поверхность  $F$  склеена из кусков  $G_i$ , если она может быть разбита на части  $F_i$  так, что

1) каждый кусок  $G_i$  может быть изометрически отображен на соответствующую часть  $F_i$  поверхности  $F$  (т. е. так, что при этом каждой кривой на  $G_i$  отвечает на  $F$  кривая той же длины);

2) при таких отображениях отождествляемые отрезки границ кусков  $G_i$  переходят в общие отрезки границ частей  $F_i$ .

Склеивание многогранника из развертки представляет лишь частный случай склеивания в смысле данного сейчас общего определения. Другими примерами могут служить склеивания цилиндров и конусов из известных кусков плоскости или склеивание веретенообразной поверхности из полусферы.

Задача состоит в отыскании тех условий, при которых из данной «развертки» можно склеить выпуклую поверхность того или иного вида, например замкнутую. Решение этой задачи дается теоремой, которую я называю «теоремой о склеивании». Точная общая формулировка этой теоремы потребовала бы введения ряда определений. Мы этого делать не будем, а формулируем теорему в предположении, что кривые, ограничивающие куски  $G_i$ , — кусочно-гладкие и имеют кусочно-непрерывную геодезическую кривизну.

Последняя есть не что иное, как кривизна (как функция множества), измеренная на самом куске  $G_i$ . Она считается положительной, если в данной точке граница обращена выпуклостью наружу от  $G_i$ , и отрицательной — в противном случае.

*Для того чтобы из «развертки»  $R$ , гомеоморфной сфере, можно было склеить замкнутую выпуклую поверхность, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1) сумма углов кусков  $G_i$ , сходящихся при отождествлении границ в одной точке — вершине, должна быть  $\leq 2\pi$  для каждой вершины;

2) сумма геодезических кривизн в отождествляемых точках границ кусков  $G_i$  должна быть всюду  $\geq 0$ .

Если стороны кусков  $G_i$  — геодезические, то геодезическая кривизна их всюду равна нулю. Условие 2 выполняется тогда автоматически и остается только первое условие.

Таким образом, условие склеиваемости целой выпуклой поверхности из геодезических многоугольников, вырезанных из каких-то выпуклых поверхностей, ничем не отличается от условия склеиваемости выпуклого многогранника из плоских многоугольников.

Аналогичные теоремы могут быть сформулированы для «разверток» другого топологического строения; условия 1, 2 остаются неизменными.

Эта теорема о склеивании представляет собой очень сильный инструмент исследования выпуклых поверхностей, особенно их изгибания<sup>27)</sup>. Она доказывается, однако, на основе обобщения теорем о многогранниках в другом, более абстрактном направлении.

**3.** Эта вторая, более абстрактная, но зато и более общая точка зрения состоит в следующем. Как выяснено в § 6 главы I, задание развертки эквивалентно заданию внутренней метрики многогранника. Метрика определяет расстояния между его точками, измеренные на самом многограннике. Если, например, развертка  $R$  гомеоморфна сфере, то, отображая ее на сферу  $S$ , мы переносим на  $S$  метрику  $\rho$ , заданную разверткой  $R$ . Склеиванию многогранника  $P$  из развертки  $R$  соответствует в этом смысле изометрическое отображение сферы  $S$  с метрикой  $\rho$  на многогранник  $P$ .

В связи с этим для любых поверхностей речь также может идти о существовании поверхности с заданной метрикой.

Пусть  $F$  — поверхность и  $X, Y$  — две ее точки. За расстояние  $\rho_F(X, Y)$  точек  $X, Y$  на  $F$  принимаем точную нижнюю границу длин кривых, лежащих на  $F$  и соединяющих точки  $X, Y$ . Это расстояние, рассматриваемое как функция пары точек  $X, Y$ , и есть внутренняя метрика поверхности  $F$ <sup>28)</sup>.

В этих терминах задача обобщения теоремы существования многогранника с данной разверткой может быть поставлена следующим образом.

Пусть на сфере  $S$  задана непрерывная функция пары точек  $\rho(X, Y)$  — абстрактная метрика, удовлетворяющая трем необходимым для всякой метрики условиям<sup>29)</sup>. Спрашивается, каковы те дополнительные, необходимые и достаточные условия, при которых сфера  $S$  с метрикой  $\rho$  может быть изометрически отображена на какую-либо замкнутую выпуклую поверхность  $F$ . То есть, когда существует такое отображение  $\varphi$  сферы  $S$  на какую-либо поверхность  $F$ , что  $\rho(X, Y) = \rho_F(\varphi(X), \varphi(Y))$ , где  $\rho_F$  — внутренняя метрика поверхности  $F$ ?

Аналогичный вопрос можно ставить для бесконечных поверхностей  $F$ , задавая при этом метрику  $\rho$  на плоскости.

Эти вопросы полностью решены для общих выпуклых поверхностей как в евклидовом пространстве, так и в пространствах Лобачевского и сферическом. Я не буду, однако, излагать здесь соответствующие результаты, отсылая читателя к моей книге [18].

Если ограничиваться регулярными поверхностями, то их метрику можно задавать линейным элементом с определенной гауссовой кривизной  $K$ . В таком плане теорема существования замкнутой выпуклой поверхности с данным линейным элементом положительной кривизны была указана еще в 1917 г. Г. Вейлем и доказательство ее было завершено Г. Леви в 1938 г.<sup>30)</sup> Эта специальная проблема известна поэтому под именем проблемы Вейля. О поверхности, имеющей данную метрику, говорят, что она реализует эту метрику.

Сформулируем общую теорему о реализуемости метрики, заданной линейным элементом, посредством выпуклой поверхности в пространстве постоянной кривизны  $K_0$  (т. е. в евклидовом при  $K_0 = 0$ , Лобачевского, если  $K_0 < 0$ , и сферическом, если  $K_0 > 0$ ).

<sup>27)</sup> См. [16], [18, гл. VIII, § 1 и гл. IX, § 3].

<sup>28)</sup> У негладкой выпуклой поверхности внутренняя метрика не является римановой. Геометрические, а затем и аналитические приемы исследования многообразий с негладкой метрикой, начиная с книги [18], получали далеко идущее развитие, см. [42, 64, 180, 184]. — Прим. В. А. Залгаллера.

<sup>29)</sup> Легко проверяется, что  $\rho_F$  удовлетворяет этим трем условиям: 1)  $\rho(X, Y) = 0$  тогда и только тогда, когда  $X = Y$ , 2)  $\rho(X, Y) = \rho(Y, X)$  и 3)  $\rho(X, Y) + \rho(Y, Z) \geq \rho(X, Z)$ .

<sup>30)</sup> См. книгу [104], где дан обзор этих работ. — Прим. В. А. Залгаллера.

Пусть в области  $G$  на сфере задана метрика, определяемая линейным элементом, гауссова кривизна которого всюду  $\geq K_0$ . Пусть каждые две точки области  $G$  соединимы кратчайшей линией в смысле данной метрики. (В частности, это условие заведомо выполнено, если  $G$  есть вся сфера.) Тогда в пространстве постоянной кривизны  $K_0$  существует выпуклая поверхность  $F$ , реализующая данную метрику, т. е. область  $G$  с данной метрикой допускает изометрическое отображение на поверхность  $F$ . (Полное доказательство этой теоремы пока не опубликовано.)

Доказательства теорем существования выпуклой поверхности с данной метрикой основаны прежде всего на приближении данной метрики «многогранными метриками»  $S_n$ , т. е. метриками, задаваемыми развертками из плоских треугольников.

В силу теорем существования многогранников с данной разверткой — метрикой  $\rho_n$  — мы утверждаем существование многогранников  $P_n$  с метриками  $\rho_n$ . Предел сходящейся последовательности, выбранной из этих многогранников, дает поверхность, имеющую предельную, т. е. как раз заданную метрику  $\rho$ <sup>31)</sup>.

Однако в случае метрики, задаваемой линейным элементом с достаточно регулярными коэффициентами, проблема существования поверхности с такой метрикой может быть сформулирована как проблема существования решения некоторого дифференциального уравнения в частных производных<sup>32)</sup>. Именно в этом плане проблема рассматривается у Г. Вейля [362] и Г. Леви [310].

4. Об изгибаниях выпуклых поверхностей можно доказать ряд теорем, аналогичных теоремам § 2 настоящей главы. Прежде всего укажем, что теорема Оловянишникова § 5 главы IV о бесконечных многогранниках обобщается на произвольные бесконечные выпуклые поверхности в следующем виде:

Пусть  $F$  — бесконечная полная выпуклая поверхность с полной кривизной  $\omega(F) < 2\pi$ . Пусть  $L$  — луч на  $F$ , т. е. бесконечная в одну сторону кривая, являющаяся кратчайшей между любыми двумя своими точками. Пусть поверхность  $F$  ориентирована указанием обхода некоторого контура.

Задаем произвольный выпуклый конус  $K$  с единственным условием, чтобы его кривизна (площадь сферического изображения) равнялась  $\omega(F)$ . На конусе  $K$  задаем произвольную образующую  $G$ .

<sup>31)</sup> В применении к простейшему случаю поверхностей в евклидовом пространстве и метрики, заданной линейным элементом, этот метод во всех деталях изложен в работе [12]; для общего случая см. [18, гл. VII].

<sup>32)</sup> У Г. Вейля проблема сводилась к существованию решения уравнения Дарбу на сфере, которое представляет собой уравнение Монжа — Ампера эллиптического типа. Согласно методу продолжения по параметру [66], для доказательства разрешимости этого уравнения требуются априорные оценки решения в классе  $C^2$ . Они были получены Г. Вейлем [362] и в окончательном виде Г. Леви [310]; см. также [326]. А. В. Погорелов доказал регулярность выпуклой поверхности с регулярной метрикой [173, гл. 2]. В сочетании с теоремой Александрова это решает и аналитическую проблему Вейля. Подробнее о степени гладкости выпуклой поверхности при гладкости ее метрики или кривизны см. обзор [68, гл. 2, § 3]. (Наиболее законченные результаты содержатся в работах [154, 173, 188, 202, 222].) Теоремы существования выпуклых поверхностей с заданной метрикой в пространствах постоянной кривизны и в римановых многообразиях см. в [173, гл. 5, 6]. Интересный вопрос реализации в виде выпуклой поверхности заданной двумерной римановой метрики в римановом многообразии (произвольного топологического строения) постоянной кривизны  $-1$  см. в [306]. — Прим. В. А. Залгаллера.

Утверждается, что существует выпуклая поверхность  $F'$ , изометричная  $F$  и такая, что 1)  $K$  есть ее предельный конус, 2)  $G$  есть предельная образующая луча  $L'$  на  $F'$ , отвечающего по изометрии лучу  $L$ , 3) при сжатии поверхности  $F'$  в конус  $K$  ориентация, индуцированная на ней в силу изометрического отображения исходной поверхности  $F$ , дает ориентацию, заданную на конусе  $K$ .

Эта теорема доказана С. П. Оловянишниковым [156] путем предельного перехода от многогранников. В ней заключается утверждение, что всякая бесконечная выпуклая поверхность с кривизной  $< 2\pi$  допускает нетривиальные изометрические отображения. Однако вопрос о возможности ее непрерывного изгибания остается пока нерешенным в общем случае. А. В. Погорелов доказал, что если поверхность  $F$  имеет ограниченную удельную кривизну (см. п<sup>о</sup> 3 § 6 гл. III), то она допускает непрерывные изгибания и все они определяются изгибаниями конуса  $K$  с отмеченной образующей  $G$ . Это полный аналог теоремы 8 § 2. Нужно думать, что тот же результат верен и без предположения об ограниченности удельной кривизны<sup>33)</sup>.

Из теорем об изгибаниях конечных выпуклых поверхностей укажем:

Если выпуклая поверхность, гомеоморфная кругу, такова, что каждые две ее точки соединимы на ней кратчайшей линией, то такая поверхность изометрична шапочке [18, гл. IX, § 4 и гл. VIII, § 2]. (Определение шапочки см. в § 6 гл. III.)

Вероятно, такая поверхность всегда может быть непрерывно изогнута в шапочку. Однако это не доказано даже для сколь угодно регулярных поверхностей<sup>34)</sup>.

Если из замкнутой выпуклой поверхности вырезать геодезический многоугольник, внутренность которого имеет интегральную кривизну, отличную от нуля, то оставшаяся поверхность допускает нетривиальные изометрические отображения.

Вероятно, такая поверхность всегда допускает непрерывные изгибания, даже если у нее вырезается не многоугольник, а какая угодно область ненулевой кривизны. Однако это доказано пока лишь для трижды непрерывно дифференцируемых поверхностей<sup>35)</sup>.

Доказательства приведенных теорем основаны на теореме о склеивании, т. е. по существу, на том же методе подклеивания, который применялся для многогранников в § 2.

**5.** Теперь рассмотрим вопрос об обобщении наших теорем на пространства с числом измерений больше трех. Для определенности будем говорить о трехмерных многогранниках в четырехмерном евклидовом пространстве.

Соответственно развертка должна слагаться из трехмерных многогранников  $Q_i$  с отождествляемыми («склеиваемыми») гранями. В ребрах такой развертки сходится по нескольку многогранников  $Q_i$ , и для того, чтобы речь могла идти о развертке именно выпуклого многогранника, необходимо, чтобы сумма двугранных углов этих многогранников  $Q_i$  вокруг каждого ребра не превосходила  $2\pi$ .

Это условие, однако, *вовсе не достаточно* для того, например, чтобы из удовлетворяющей ему развертки (гомеоморфной сфере) можно было склеить замкнутый выпуклый многогранник. Причину этого мы сейчас выясним.

<sup>33)</sup> Теперь это доказано. См. [173, гл. 3, § 9]. — Прим. В. А. Залгаллера.

<sup>34)</sup> Теперь это доказано. См. [145]. Отметим еще, что в [122, 123] аналитическими средствами доказана возможность непрерывно переходить от одной к другой из двух изометричных гомеоморфных кругу строго выпуклых  $C^{4,\alpha}$ -гладких поверхностей, оставаясь в классе изометричных им локально выпуклых поверхностей. Но это не означает непрерывного изгибания в классе выпуклых поверхностей. Об изгибаниях см. также обзоры [191, 208], работы [128, 220, 221] и др. — Прим. В. А. Залгаллера.

<sup>35)</sup> Теперь это доказано [129] в общем случае. См. [173, гл. 3, § 6]. — Прим. В. А. Залгаллера.



Пусть  $A$  — вершина развертки  $R$ ; она должна быть вершиной многогранника  $P$ , склеенного из  $R$ . Точки на  $P$ , равноудаленные от  $A$ , образуют на трехмерной сфере с центром  $A$  замкнутый выпуклый многогранник  $Q_A$ . Этот многогранник определяет многогранный угол при вершине  $A$  многогранника  $P$ . Развертка этого многогранника  $Q_A$  образуется в развертке  $R$  точками, равноудаленными от ее точки  $A$ . Но замкнутый выпуклый многогранник  $Q_A$  определяется своей разверткой однозначно. Поэтому мы приходим к следующему результату: одни сколь угодно малые окрестности вершин развертки полностью определяют многогранные углы многогранника, который из нее можно склеить. Если вершины  $A$  и  $B$  соединены по ребрам, то многогранные углы при них имеют общие грани вокруг этого ребра. Соответственно сферические многогранники  $Q_A$ ,  $Q_B$  должны иметь равные плоские и двугранные углы при их вершинах, отвечающих ребру  $AB$ . Между тем двугранные углы многогранника определяются его разверткой в целом и они будут, вообще говоря, меняться, если изменять ее даже в той части, которая, так сказать, не имеет никакого отношения к ребру  $AB$ .

Это приводит к заключению, что даже развертка с границей, имеющая всего лишь две вершины, может не реализоваться в виде многогранника. В этом можно непосредственно убедиться на простых примерах. Развертка с двумя вершинами получается, если из любой развертки вырезать окрестность ребра. Следовательно, *даже в окрестности ребра трехмерная развертка может не склеиваться в четырехмерном пространстве*. Тем более то же верно в случае большего числа измерений.

С другой стороны, легко доказывается теорема:

*Для того чтобы развертка, гомеоморфная трехмерной сфере и составленная из тетраэдров (что есть, очевидно, общий случай) склеивалась в выпуклый многогранник, достаточно, чтобы она склеивалась в окрестности каждого своего ребра.*

Таким образом, весь вопрос сводится к условиям склеиваемости развертки в окрестность ребра. Нахождение таких условий представляется трудным, если не безнадежным делом.

**6.** Для регулярных  $(n - 1)$ -мерных поверхностей в  $n$ -мерном пространстве дело обстоит проще. Условия реализуемости малой области  $(n - 1)$ -мерного абстрактного риманова многообразия в виде поверхности в  $n$ -мерном пространстве рассматривались давно и исчерпывающее их исследование было дано Ниной Аркадьевной Розенсон [185–187]<sup>36)</sup>. Известно, далее, что, вообще говоря, при  $n > 3$   $(n - 1)$ -мерная поверхность в  $n$ -мерном пространстве вовсе не изгибаема даже в малых частях. Отсюда можно вывести:

Для того чтобы риманова метрика со всюду положительной кривизной, заданная на  $(n - 1)$ -мерной сфере, в целом реализовалась поверхностью в  $n$ -мерном пространстве, необходимо и достаточно, чтобы она реализовалась в каждой сколь угодно малой области. Условия же реализуемости в малом известны, и тем самым вопрос решается полностью. Для многообразия, отличного от сферы, такой результат может и не иметь места, потому что его вывод основан на односвязности сферы.

<sup>36)</sup> Начальные сведения можно найти в книге [230].

---

---

## Глава VI

### Условия равенства многогранников с параллельными гранями

---

---

#### § 1. ЛЕММЫ О ВЫПУКЛЫХ МНОГОУГОЛЬНИКАХ

**1.** Будем говорить, что многоугольник  $P_1$  помещается в многоугольнике  $P_2$ , если все точки многоугольника  $P_1$  лежат в  $P_2$ . Если же, кроме того, многоугольник  $P_2$  не совпадает с  $P_1$ , то мы будем говорить, что многоугольник  $P_1$  помещается внутри  $P_2$ . Под многоугольником всюду будет пониматься конечный плоский выпуклый многоугольник, кроме леммы 4а, где речь идет о бесконечных выпуклых многоугольниках. Мы будем рассматривать пары выпуклых многоугольников и сравнивать длины их сторон с параллельными внешними нормальными. Для краткости эти стороны будем называть просто параллельными. При этом, если для стороны  $l$  одного многоугольника нет параллельной ей стороны другого многоугольника, то мы будем считать, что она есть, но имеет нулевую длину: она вырождается в ту вершину, где опорная прямая параллельна  $l$ .

Так как мы будем сравнивать только параллельные стороны многоугольников, то часто будем опускать указание на это. Наконец, мы будем еще говорить, что стороны  $l_1, \dots, l_n$  больше сторон  $l'_1, \dots, l'_n$ , если  $l_1 \geq l'_1, \dots, l_n \geq l'_n$  и хотя бы для одной пары  $l_i > l'_i$ . При аналогичных условиях будем говорить, что стороны  $l'_1, \dots, l'_n$  меньше сторон  $l_1, \dots, l_n$ .

Все перечисленные условия будут использоваться во всех параграфах данной главы.

**2. Лемма 1.** *Если у многоугольника  $P_1$  все стороны, кроме, быть может, одной  $l_0$ , меньше, чем у  $P_2$ , то  $P_1$  можно параллельным переносом поместить внутри  $P_2$ .*

Возьмем на  $P_1$  и  $P_2$  вершины  $A_1$  и  $A_2$ , через которые проходят опорные прямые с внешними нормальными, антипараллельными нормальными к  $l_0$ , и пере-

несем  $P_1$  параллельно так, чтобы вершина  $A_1$  совпала с  $A_2$ <sup>1)</sup>. Покажем, что тогда  $P_1$  окажется внутри  $P_2$ .

Вершина  $A = A_1 = A_2$  и сторона  $l_0$  делит границу многоугольника  $P_1$  на две ломаные  $AB_1$  и  $AC_1$  (рис. 114). Им отвечают на границе многоугольника  $P_2$  две ломаные  $AB_2$  и  $AC_2$ . Докажем, что ломаная  $AB_1$  не может выходить из многоугольника  $P_2$ , пересекая ломаную  $AB_2$ .

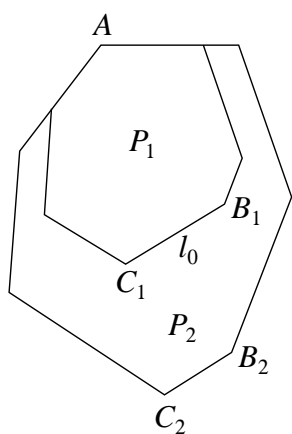


Рис. 114

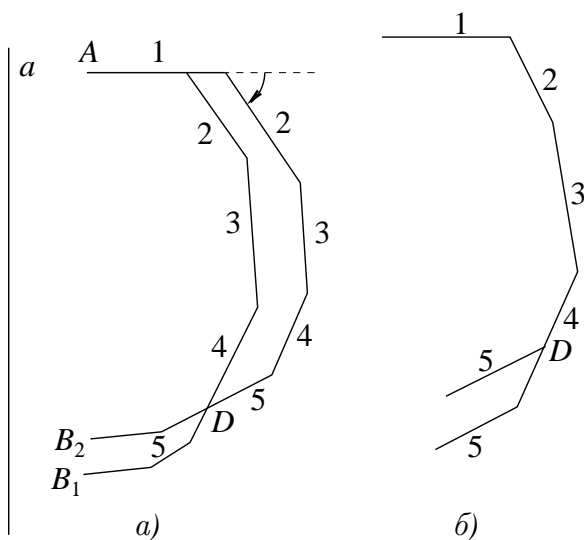


Рис. 115

Пусть  $l_1^{(1)}, l_2^{(1)}, \dots$  и  $l_1^{(2)}, l_2^{(2)}, \dots$  — последовательные стороны ломаных  $AB_1$  и  $AB_2$  начиная от вершины  $A$ . Так как  $l_1^{(1)} \leq l_1^{(2)}$  и т. д., то во всяком случае первый отрезок ломаной  $AB_1$  проходит в  $P_2$ . Допустим, что ломаная  $AB_1$  выходит из  $P_2$ , пересекая  $AB_2$  в точке  $D$  (рис. 115, а). Пусть эта точка принадлежит сторонам  $l_h^{(1)}$  и  $l_k^{(2)}$ . Стороны  $l_i^{(1)}$  и  $l_i^{(2)}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) параллельны, и переход от  $l_i$  к  $l_{i+1}$  связан с поворотом на некоторый угол. Поэтому  $l_h^{(1)}$  может пересечь  $l_k^{(2)}$  только в том случае, если угол ее поворота меньше, т. е. если  $h < k$ .

Спроектируем теперь ломаные  $AB_1$  и  $AB_2$  на прямую  $a$ , перпендикулярную к стороне  $l_0$ . Так как эти ломаные пересекаются в точке  $D$ , то проекции их отрезков  $AD$  равны. Вместе с тем  $h < k$ , и потому проекция отрезка ломаной  $AB_1$ , составленного из сторон  $l_1^{(1)}, l_2^{(1)}, \dots, l_k^{(1)}$ , будет

<sup>1)</sup> Если такие опорные прямые проходят вдоль сторон, то берем любую пару соответственных их вершин.

больше проекции соответствующего отрезка ломаной  $AB_2$ . Так как стороны обеих ломаных параллельны, то это возможно только в том случае, когда среди сторон  $l_i^{(1)}$  имеются большие, чем  $l_i^{(2)}$ . А это противоречит условию леммы. Следовательно, ломаная  $AB_1$  не может пересекать  $AB_2$ .

Особый случай изображен на рис. 115, б. Все стороны  $l_i^{(1)}$  и  $l_i^{(2)}$  совпадают вплоть до  $i = k - 1$ , а сторона  $l_k^{(1)}$  выходит из  $P_2$ . Этот случай приводит к тому же противоречию:  $l_k^{(1)}$  оказывается больше  $l_k^{(2)}$ .

Таким образом, ломаная  $AB_1$  не может выходить из  $P_2$ , пересекая  $AB_2$ . Точно так же, конечно, ломаная  $AC_1$  не может выходить из  $P_2$ , пересекая  $AC_2$ . Но сторону  $B_2C_2$  (параллельную  $l_0$ ) они также не могут пересекать. Иначе, например, проекция ломаной  $AB_1$  на прямую  $a$  была бы больше проекции ломаной  $AB_2$ , вопреки тому, что стороны у  $AB_1$  меньше сторон у  $AB_2$ . Итак, ломаные  $AB_1$  и  $AC_1$  лежат в  $P_2$ , а следовательно, и вся граница многоугольника  $P_1$  лежит в  $P_2$ . Границы многоугольников  $P_1$  и  $P_2$  не могут совпадать, потому что у  $P_1$  имеются меньшие стороны. Поэтому  $P_1$  лежит внутри  $P_2$ , что и требовалось доказать.

**Лемма 2.** Пусть две выпуклые ломаные  $Q_1$  и  $Q_2$  лежат в угле с вершиной  $O$ , имеют концы на его сторонах и обращены выпуклостью к  $O$  (рис. 116). Тогда, если какой-нибудь луч из  $O$  встречает  $Q_1$  раньше  $Q_2$ , то у  $Q_1$  есть сторона, меньшая, чем у  $Q_2$ . (Речь идет о параллельных сторонах, причем читатель должен помнить условие о сторонах нулевой длины.)

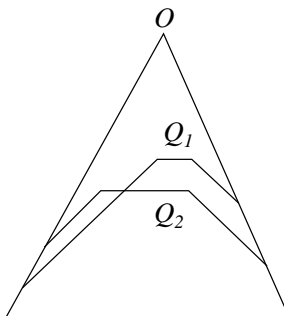


Рис. 116

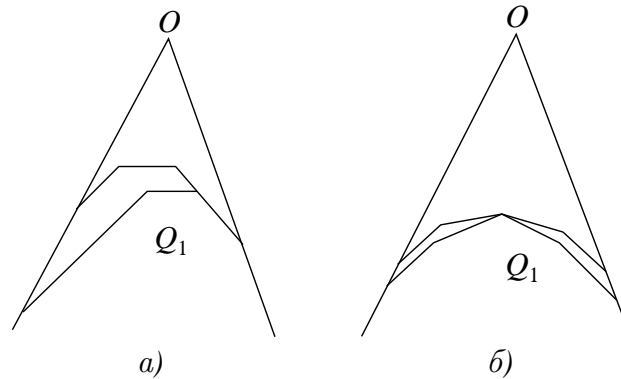


Рис. 117

Для доказательства будем подобно сжимать  $Q_2$  к точке  $O$ . Стороны ломаной  $Q_2$  будут при этом уменьшаться. В тот момент, когда  $Q_2$  окажется в части угла, ограниченной ломаной  $Q_1$ , но будет еще соприкасаться с  $Q_1$ , любая сторона, по которой касаются  $Q_1$  и  $Q_2$ , будет у  $Q_2$  не меньше, чем у  $Q_1$  (рис. 117, а). Поэтому до подобного сжатия эта сторона ломаной  $Q_2$  была больше, чем у  $Q_1$ , что и требовалось доказать.

Может случиться, что в указанный момент  $Q_1$  и  $Q_2$  соприкасаются только в одной вершине (рис. 117, б). Но тогда, как очевидно из рисунка, в этой вершине сходятся такие стороны ломаной  $Q_2$ , которым нет параллельных у  $Q_1$ , т. е. этим сторонам соответствуют на  $Q_1$  стороны нулевой длины. Следовательно, эти стороны у  $Q_2$  больше параллельных им сторон у  $Q_1$ .

**3.** Следующая лемма будет непосредственно использована при установлении условий равенства многогранников в § 3 и 4.

**Лемма 3.** Если два выпуклых многоугольника нельзя поместить один в другом путем параллельного переноса, то разности длин их параллельных сторон меняют знак не менее четырех раз при обходе вокруг любого из этих многоугольников.

Пусть наши многоугольники будут  $P_1$  и  $P_2$  (рис. 118). Отнесем стороне многоугольника  $P_1$  знак плюс, если она больше соответствующей стороны многоугольника  $P_2$ , и минус — в обратном случае (помня условие о сторонах нулевой длины), а в случае равенства обеих сторон оставим сторону  $P_1$  неотмеченной. Сторонам многоугольника  $P_2$  сопоставим противоположные знаки. Нужно доказать, что при обходе вокруг  $P_1$  (или  $P_2$ ) будет не менее четырех перемен знака.

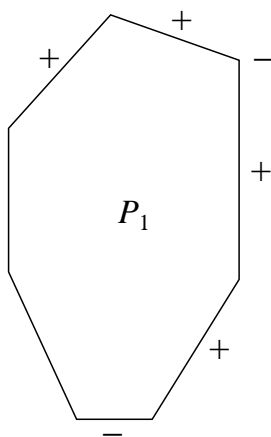


Рис. 118

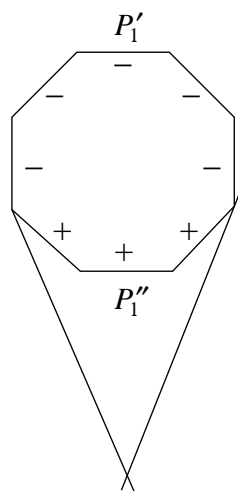
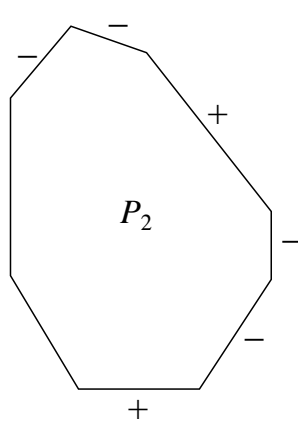


Рис. 119

Допустим, что перемен знака нет вовсе. Тогда, скажем, все стороны многоугольника  $P_1$  меньше или равны сторонам многоугольника  $P_2$ <sup>2)</sup> и по лемме 1  $P_1$  можно поместить в  $P_2$ . Это, однако, противоречит условию, а

<sup>2)</sup>Помним, что сравниваются только стороны с параллельными внешними нормальными и что мы считаем стороны  $l_1, \dots, l_n$  меньше сторон  $l'_1, \dots, l'_n$ , если  $l_1 \leq l'_1, \dots, l_n \leq l'_n$  и хотя бы для одной пары  $l_i < l'_i$ .

потому перемены знака должны быть. Так как число их, очевидно, четное, то достаточно доказать, что не может быть только двух перемен знака.

Допустим, однако, что имеется только две перемены знака. Тогда границы многоугольников  $P_1$  и  $P_2$  разбиваются каждая на две ломаные  $P'_1, P''_1$  и  $P'_2, P''_2$ : у  $P'_1$  стороны меньше, чем у  $P'_2$ , а у  $P''_1$  стороны больше, чем у  $P''_2$ , т. е. сторонам  $P'_1$  отнесены минусы, а сторонам  $P''_1$  — плюсы (рис. 119).

Сумма углов между внешними нормальными к смежным сторонам выпуклого многоугольника равна  $360^\circ$ . Когда  $P_1$  разбивается на две ломаные  $P'_1$  и  $P''_1$ , то исключаются углы между нормальными к сторонам, смежным у этих ломаных. Поэтому по крайней мере для одной из ломаных  $P'_1$  и  $P''_1$  сумма углов между внешними нормальными меньше  $180^\circ$ . Допустим, что это имеет место для  $P'_1$ , а следовательно, и для  $P''_2$ , так как их стороны имеют параллельные внешние нормали. В таком случае, если провести две опорные прямые к  $P'_1$ , то  $P'_1$  будет обращена выпуклостью к вершине угла, образованного этими прямыми (рис. 119).

Если бы сумма углов между внешними нормальными к сторонам ломаной  $P'_1$  была больше  $180^\circ$ , то она была бы меньше  $180^\circ$  для  $P''_1$ . Тогда, переименовав обозначения многоугольников, мы получили бы все-таки, что сумма углов между внешними нормальными у  $P''_1$  меньше  $180^\circ$ . Следовательно, можно считать, что эта сумма углов меньше  $180^\circ$  именно у  $P''_1$ . Нам важно здесь, что стороны у  $P''_1$  больше, чем у  $P''_2$ .

Стороны у  $P'_1$  меньше, чем у  $P'_2$ . Соединив прямолинейным отрезком концы ломаной  $P'_1$  и точно так же концы ломаной  $P'_2$ , получим два выпуклых многоугольника. По лемме 1 первый из них можно поместить во втором. Следовательно, можно так параллельно перенести  $P_1$ , что ломаная  $P'_1$  окажется внутри  $P_2$ . Тогда ломаная  $P''_1$  должна будет выступать из  $P_2$ , так как по условию  $P_1$  нельзя поместить в  $P_2$ . Теперь на  $P''_1$  найдется точка  $A$ , через которую проходит опорная прямая  $a$  к  $P_1$ , не пересекающая  $P_2$ <sup>3)</sup>. Перемещая эту точку по  $P''_1$  сначала в одну, а потом в другую сторону и вращая вместе с тем опорную прямую, мы получим две прямые  $b$  и  $c$ , опорные как для  $P_1$ , так и для  $P_2$  (рис. 120). Эти прямые касаются  $P_1$  в вершинах  $B_1, C_1$ , принадлежащих  $P''_1$ , потому что  $P'_1$  лежит внутри  $P_2$ . А так как стороны, а тем самым и опорные прямые к  $P'_1$  и  $P''_2$  соответственно параллельны, то  $b$  и  $c$  касаются  $P_2$  в вершинах  $B_2, C_2$ , принадлежащих  $P'_2$ .

Итак, мы имеем следующее положение: ломаные  $B_1C_1$  и  $B_2C_2$ , являющиеся частями ломаных  $P''_1$  и  $P'_2$ , лежат концами на прямых  $b$  и  $c$ , образующих угол с вершиной  $O$ . Обе ломаные обращены выпуклостью к  $O$ , так как суммы углов между внешними нормальными к  $P''_1$ , а также к  $P'_2$  меньше  $180^\circ$ ,

<sup>3)</sup> Так как  $P_1$  выступает из  $P_2$ , то найдется прямая  $d$ , опорная к  $P_2$  и пересекающая  $P_1$ . Проведем прямую  $a$ , опорную к  $P_1$ , параллельную  $d$  и лежащую по ту сторону от  $d$ , по которую не лежит  $P_2$ . Эта прямая  $a$  и будет такая, какая нам нужна.

и потому угол поворота опорной прямой  $a$  от положения  $b$  до положения  $c$  меньше  $180^\circ$ .

На ломаной  $B_1C_1$  есть точка  $A$ , через которую проходит опорная прямая  $a$ , не пересекающая  $P_2$ . Поэтому луч, идущий из  $O$  в точку  $A$ , встречает  $B_1C_1$  раньше, чем  $B_2C_2$ .

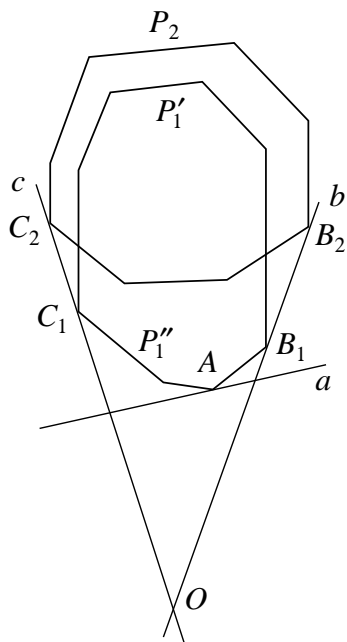


Рис. 120

Применяя теперь лемму 2, заключаем, что у ломаной  $B_1C_1$  имеются стороны, меньшие, чем у  $B_2C_2$ . Значит, у  $P_1''$  имеются стороны, меньшие, чем у  $P_2''$ . Это, однако, противоречит предположению о том, что стороны ломаной  $P_1''$  больше сторон ломаной  $P_2''$ . Следовательно, предположение о том, что на многоугольнике  $P_1$  имеются только две переменны знака, невозможно, и лемма доказана.

4. Следующая лемма понадобится нам в § 4 при рассмотрении бесконечных многогранников.

**Лемма 4.** Пусть две выпуклые ломаные имеют общие концы и пусть внешние нормали к их сторонам направлены в одну полуплоскость<sup>4)</sup> (рис. 121). Тогда, если эти ломаные не совпадают, то при прохождении от одного конца ломаных к другому разности длин их параллельных сторон меняют знак не менее двух раз, кроме одного исключительного случая, когда крайние стороны параллельны,

а прочие стороны ломаных соответственно равны (рис. 121, в).

(Здесь, как и раньше, подразумевается условие: если на одной ломаной нет стороны, параллельной стороне другой ломаной, то считается, что она есть, но имеет длину нуль; параллельными на двух ломаных считаются стороны с параллельными внешними нормальями.)

Рассмотрим две несовпадающие ломаные  $L_1, L_2$ , удовлетворяющие условиям леммы. Проведя отрезок  $AB$ , соединяющий их концы, получим два выпуклых многоугольника  $P_1, P_2$  с общей стороной  $AB$ . Поскольку ломаные  $L_1, L_2$  не совпадают, для этих многоугольников имеются только две возможности:

- 1) ни один из них не помещается в другом (рис. 121, а);
- 2) один из них помещается внутри другого (рис. 121, б, в).

<sup>4)</sup>Полуплоскость содержит ограничивающую прямую. Ломаные могут иметь стороны с антипараллельными нормальями, направленными как раз вдоль этой прямой.

В первом случае, как очевидно, никакой параллельный перенос не позволит поместить один многоугольник внутри другого. Поэтому согласно лемме 3 разности длин сторон этих многоугольников меняют знак не менее четырех раз. Сторона  $AB$  у них общая и ей не соответствует никакой знак. Поэтому, исключив ее, мы исключим самое большее одну переменную знака, могущую иметь место при переходе через эту сторону. Останется по крайней мере три переменные знака, относящиеся уже к самим данным ломаным.

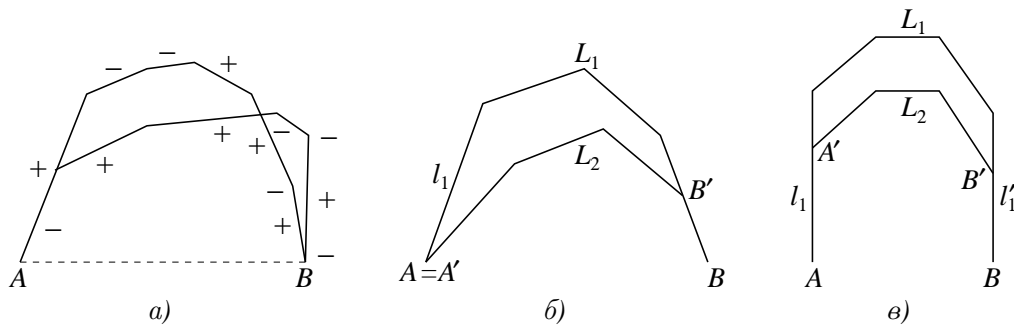


Рис. 121

Допустим теперь, что один из многоугольников, скажем многоугольник, ограниченный ломаной  $L_2$ , помещается внутри другого —  $P_1$ . Тогда, идя по ломаной  $L_2$  начиная с ее конца  $A$ , мы найдем такую ее точку  $A'$ , где она входит внутрь многоугольника  $P_1$  (рис. 121, в). Не исключено, конечно, что это происходит в самой точке  $A$ , так что  $A' = A$  (рис. 121, б). На ломаной  $L_1$  точка  $A'$  либо лежит внутри некоторой стороны  $l_1$ , либо является началом некоторой стороны  $l_1$ . В первом случае соответствующая сторона  $l_2$  ломаной  $L_2$  короче  $l_1$ . Во втором случае на ломаной  $L_2$  вовсе нет стороны, параллельной  $l_1$ ; но тогда мы считаем, что она есть, но имеет нулевую длину. Следовательно, так или иначе  $l_1 > l_2$ .

Проходя ломаную  $L_2$  начиная с другого ее конца  $B$ , мы точно так же найдем точку  $B'$  и пару параллельных сторон, из которых сторона ломаной  $L_1$  больше стороны ломаной  $L_2$ :  $l'_1 > l'_2$ .

Следовательно, с обоих концов ломаной  $L_2$  мы прежде всего подходим к сторонам, отмеченным на ней знаком минус, согласно знаку разности  $l_2 - l_1$  и  $l'_2 - l'_1$ . Стороны  $l_1, l'_1$  (а значит, и  $l_2, l'_2$ ) различны; иначе точки  $A', B'$  принадлежали бы одной стороне, и ломаная  $L_2$  никак не могла бы заходить внутрь многоугольника  $P_1$  в обеих этих точках, будучи вместе с тем выпуклой.

Теперь будем различать два случая:

- 1) стороны  $l_1, l'_1$ , а значит, и  $l_2, l'_2$  не параллельны;



2) эти стороны параллельны, т. е. их внешние нормали антипараллельны.

В первом случае продолжаем стороны  $l_1, l'_1$  до их пересечения (рис. 122).

Тогда отрезки  $\widehat{A'B'}$  наших ломаных  $L_1, L_2$  окажутся лежащими в угле с вершиной  $O$ , причем ломаная  $L_1$  будет проходить ближе к вершине  $O$ , чем ломаная  $L_2$ . В таком случае, согласно лемме 2,

на отрезке  $\widehat{A'B'}$  ломаной  $L_2$  имеются стороны более длинные, чем параллельные им стороны на  $L_1$ . Этим сторонам на  $L_2$ , согласно нашему правилу, относится знак плюс. Итак, оказывается, что на ломаной  $L_2$  между крайними сторонами  $l_2, l'_2$ , отмеченными минусами, имеется по крайней мере одна сторона, отмеченная плюсом, что дает не менее двух перемен знака.

Теперь остается рассмотреть тот случай, когда стороны  $l_1, l'_1$ , а вместе с ними и  $l_2, l'_2$  параллельны. Тогда, так как внешние нормали к сторонам наших ломаных идут по условию в одну полуплоскость, то стороны  $l_1, l'_1$  ( $l_2, l'_2$ ) являются крайними сторонами ломаной  $L_1$  ( $L_2$ ). Стороны  $l_1, l_2$  исходят из общей

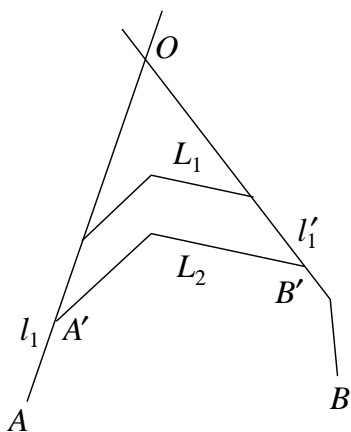


Рис. 122

точки  $A$ , но так как  $l_1 > l_2$ , то  $l_2$  составляет лишь часть  $l_1$ . Аналогичное положение имеем для сторон  $l'_1, l'_2$ .

Прибавим к сторонам  $l_2, l'_2$  меньшую из разностей  $l_1 - l_2, l'_1 - l'_2$ . Тогда ломаная  $L_2$  заменится новой  $\overline{L}_2$ , у которой хотя бы одна крайняя сторона совпадает с крайней стороной ломаной  $L_1$ . Число перемен знаков разностей сторон ломаных  $L_1, \overline{L}_2$  при этом, очевидно, не увеличится. После этого остаются две возможности:

1) ломаные  $L_1, \overline{L}_2$  совпадут, а это и будет тот исключительный случай, который оговорен в лемме;

2) ломаные  $L_1, \overline{L}_2$  не совпадут. Но в таком случае, исключая их совпавшие крайние стороны, мы получим две ломаные, у которых крайние стороны не параллельны. А тогда можно применить все предыдущие рассуждения, так что число перемен знака для ломаных  $L_1, \overline{L}_2$  оказывается не меньше двух<sup>5)</sup>. А так как для ломаных  $L_1, L_2$  число перемен знака не меньше, чем для  $L_1, \overline{L}_2$ , то оно тем более не меньше двух. Таким образом, лемма доказана.

<sup>5)</sup> Для многоугольников, ограниченных ломаными  $L_1, \overline{L}_2$  и отрезком, соединяющим их концы, рассматриваем те же два случая, что и выше: 1) многоугольники не умещаются один в другом, 2) один многоугольник лежит внутри другого.

Этой лемме мы придадим еще другую формулировку, как раз ту, в которой она будет применена при рассмотрении бесконечных многогранников. Здесь речь будет идти о бесконечных многоугольниках с налегающими бесконечными сторонами. При этом мы будем считать одну бесконечную сторону короче другой, если она является только ее частью (рис. 123). В соответствии с этим определяется знак разности бесконечных сторон.

**Лемма 4а.** Пусть у двух бесконечных выпуклых многоугольников бесконечные стороны соответственно налегают друг на друга так, что в далеких частях многоугольники полностью налегают один на другой (рис. 123). Тогда, если эти многоугольники не совпадают, то разности их параллельных сторон меняют знак не менее двух раз, кроме одного исключительного случая, когда бесконечные стороны параллельны, а прочие стороны соответственно равны; в этом случае многоугольники совмещаются параллельным переносом вдоль бесконечных сторон.

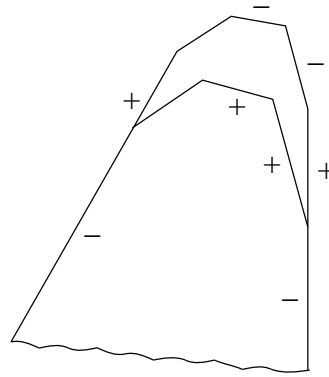


Рис. 123

Чтобы свести эту лемму к предыдущей, достаточно взять на бесконечных сторонах какие-нибудь точки  $A, B$  и принять их за концы ломаных  $L_1, L_2$ .

(Легко заметить, что, и обратно, лемма 4 следует из леммы 4а: стоит лишь продолжить до бесконечности крайние стороны ломаных  $L_1, L_2$ .)

Заметим еще, что если бесконечные стороны одного многоугольника не параллельны друг другу, но параллельны бесконечным сторонам другого, то их всегда можно наложить путем параллельного переноса. Если же бесконечные стороны параллельны, то для возможности их наложения нужно, чтобы расстояния между ними были равны в обоих многоугольниках. Соответственно с этим можно сформулировать лемму 4а, требуя, чтобы стороны многоугольников не налегали, а только допускали наложение путем параллельного переноса.)

**5. Замечание.** Лемма 3 вместе с ее доказательством легко обобщается на произвольные замкнутые выпуклые кривые. Пусть  $P$  — замкнутая выпуклая кривая и  $l(\varphi)$  — длина дуги кривой  $P$ , состоящей из точек, через которые проходят опорные прямые с внешними нормальными, направленными в дугу  $\varphi$  единичной окружности  $E$ , если их отложить из центра последней.  $l(\varphi)$  есть функция дуги на  $E$ . Теорема, обобщающая лемму 3, гласит:

Если две замкнутые выпуклые кривые  $P_1$  и  $P_2$  не могут быть помещены одна внутри другой параллельными переносами, то единичную окружность можно разбить минимум на четыре такие дуги  $\varphi_k$ , что  $l_1(\varphi_k) - l_2(\varphi_k)$  меняет знак при переходе от одной дуги к соседней.

В случае дважды дифференцируемых кривых  $l(\varphi)$  есть интеграл от радиуса кривизны по  $d\varphi$ . Поэтому из указанной теоремы сразу следует известная «теорема о четырех вершинах овала»: на всяком овале (т. е. на замкнутой дважды непрерывно дифференцируемой выпуклой кривой) имеются по крайней мере два максимума и два минимума кривизны. Для доказательства достаточно за  $P_1$  взять овал, а за  $P_2$  — окружность той же длины<sup>6)</sup>.

Аналогично лемме 3 можно доказать теорему о  $2n$  вершинах овала: если овал  $P$  пересекается окружностью в  $2n$  точках, то на нем имеется  $2n$  «вершин», т. е.  $2n$  точек, где кривизна имеет экстремум.

Точно так же, пользуясь функцией  $l(\varphi)$ , можно получить теоремы о выпуклых кривых, вполне аналогичные остальным доказанным выше леммам. Для бесконечных кривых (в аналоге леммы 4а) нет надобности требовать совпадения их бесконечных дуг. Более слабое необходимое условие мы предоставим найти читателю.

## § 2. О ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ МНОГОГРАННИКОВ

1. Выберем в пространстве начало координат  $O$  и будем определять положение любой точки  $X$  вектором  $\mathbf{x} = \overrightarrow{OX}$ , проведенным в нее из начала  $O$ .

Любое множество точек  $M$  задается как множество концов векторов  $\mathbf{x} = \overrightarrow{OX}$ , идущих из  $O$  в его точки  $X$ . Если ко всем векторам  $\mathbf{x}$  прибавить один и тот же вектор  $\mathbf{a}$ , то множество  $M$  претерпит перенос на этот вектор. Если все векторы  $\mathbf{x}$  умножить на одно и то же положительное число  $\lambda$ , то они удлинятся в  $\lambda$  раз. В результате множество  $M$  подвергнется подобному преобразованию с коэффициентом подобия  $\lambda$  и с центром подобия  $O$ . Новое множество мы обозначим  $\lambda M$ .

Пусть теперь  $M_1, M_2$  — два каких-либо множества точек, а  $\lambda_1, \lambda_2$  — два любых данных положительных числа. Будем проводить векторы  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  из начала в точки множеств  $M_1, M_2$  и образовывать каждый раз вектор

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2.$$

Когда концы векторов  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  будут пробегать независимо друг от друга множества  $M_1, M_2$ , то конец вектора  $\mathbf{x}$  будет зачерчивать некоторое множество точек  $M$ . Это множество называется *линейной комбинацией множеств*  $M_1, M_2$  с коэффициентами  $\lambda_1, \lambda_2$  и обозначается

$$M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2.$$

<sup>6)</sup>См. книгу В. Бляшке [245, § 12]. Там же указана литература об этой теореме, занимавшей в свое время многих геометров.

Особенно простой случай получается, если  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ . Тогда, как известно из аналитической геометрии, конец вектора  $\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 = (1 - \lambda_2) \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2$  делит отрезок между концами векторов  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  в отношении  $\lambda_2 : (1 - \lambda_2)$ . Следовательно, множество образуется точками, делящими в данном отношении  $\lambda : (1 - \lambda)$  отрезки, концы которых лежат в множествах  $M_1, M_2$ . В частности, при  $\lambda = 1/2$  получаем «полусумму» множеств  $M_1, M_2$ ; она образуется серединами отрезков, концы которых лежат в  $M_1$  и  $M_2$  (см. ниже рис. 125).

В следующих параграфах этой главы нам понадобятся только «полусуммы» выпуклых (телесных) многогранников; как будет показано, такая полусумма сама есть выпуклый многогранник. Общие линейные комбинации будут применяться в §3 главы VIII. Линейные комбинации любых выпуклых тел были введены в рассмотрение и исследованы Г. Брунном и Г. Минковским около пятидесяти лет назад; учение о них выросло в обширную теорию. Основные ее элементы составляют содержание данного параграфа и §3 главы VIII.

Совершенно аналогично линейной комбинации двух множеств можно определить линейную комбинацию любого числа множеств  $M_i$  с коэффициентами  $\lambda_i$ :

$$M = \lambda_1 M_1 + \dots + \lambda_n M_n.$$

Это  $M$  есть множество концов векторов  $\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n$ , получающихся, когда концы векторов  $\mathbf{x}_i$  зачерчивают независимо каждый свое множество  $M_i$ . Ввиду ассоциативности сложения векторов множество  $M$  можно получить последовательно, образуя линейную комбинацию  $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 = M'$ , потом  $M' + \lambda_3 M_3$  и т. д. Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением комбинации двух множеств <sup>7)</sup>.

**2. Лемма 1.** *При переносе начала и при параллельных переносах множеств  $M_1, M_2$  их линейная комбинация испытывает только параллельный перенос.*

Если перенести начало из  $O$  в  $O'$ , то ко всем векторам  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  прибавится один и тот же вектор  $\mathbf{a} = \overrightarrow{O'O}$ . Поэтому к вектору  $\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2$  прибавится вектор  $(\lambda_1 + \lambda_2) \mathbf{a}$ . Но теперь вектор  $\mathbf{x} + (\lambda_1 + \lambda_2) \mathbf{a}$  откладывается из нового начала  $O'$ , а в ту же точку из старого начала  $O$  будет идти вектор  $\mathbf{x} + (\lambda_1 + \lambda_2) \mathbf{a} - \mathbf{a}$ . Поэтому все множество  $M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$ , образованное концами этих векторов, переносится на вектор  $(\lambda_1 + \lambda_2 - 1) \mathbf{a}$ .

<sup>7)</sup> Можно рассматривать линейные комбинации, допуская отрицательные  $\lambda_i$ . Множество  $-M$  заполняется концами векторов  $-\mathbf{x}$ , обратных векторам  $\mathbf{x}$ , идущим из  $O$  в точки множества  $M$ . Поэтому  $-M$  симметрично  $M$  относительно начала. Умножение на отрицательное  $\lambda_i$  состоит в подобном изменении в  $|\lambda_i|$  раз и отражении в начале  $O$ . Линейная комбинация с отрицательными  $\lambda_i$  сводится к линейной комбинации с коэффициентами  $|\lambda_i|$ , но для множеств, симметричных данным относительно начала.

В частности, если  $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ , то  $M$  вовсе не меняется. (Это, впрочем, очевидно из того, что, как было выяснено выше, оно образуется в этом случае точками, делящими в данном отношении отрезки с концами в  $M_1$  и  $M_2$ .)

Если множество  $M_1$  переносится на вектор  $\mathbf{a}_1$ , то ко всем векторам  $\mathbf{x}_1$  прибавляется вектор  $\mathbf{a}_1$ , а ко всем векторам  $\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2$  прибавляется вектор  $\lambda_1 \mathbf{a}_1$ . Поэтому множество  $M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$  переносится на вектор  $\lambda_1 \mathbf{a}_1$ . При переносах множеств  $M_1$  и  $M_2$  на векторы  $\mathbf{a}_1$  и  $\mathbf{a}_2$  множество  $M$  переносится на вектор  $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2$ .

(Те же результаты верны, конечно, для линейной комбинации любого числа множеств  $M_i$ .)

При рассмотрении линейных комбинаций множества, получаемые друг из друга параллельным переносом, можно не считать существенно различными. Поэтому как «слагаемые»  $M_1, M_2$ , так и их комбинацию  $M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$  можно рассматривать с точностью до любых переносов. Лемма 1 как раз показывает, что переносы начала и «слагаемых» не влияют на множество  $M$ , если пренебрегать переносом.

Это замечание приводит к следующему наглядному пониманию линейной комбинации  $M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$ .

Подвергнув множества  $M_1, M_2$  подобным преобразованиям, получим множества  $\lambda_1 M_1, \lambda_2 M_2$ . Затем возьмем в множестве  $\lambda_2 M_2$  любую точку  $A$  и

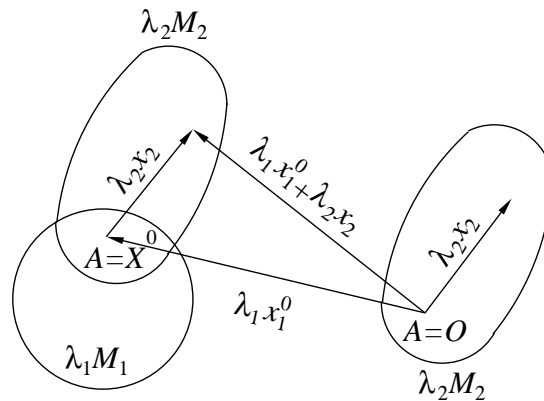


Рис. 124

путем параллельного переноса множества  $\lambda_2 M_2$  будем помещать точку  $A$  во все точки множества  $\lambda_1 M_1$ . Тогда множество  $M$ , зачерченное множеством  $\lambda_2 M_2$ , и будет  $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$  (рис. 124). Действительно, мы можем принять точку  $A$  за начало. Тогда, если перенести точку  $A$  в точку  $X^0$

множества  $\lambda_1 M_1$ , то перенесенное множество  $\lambda_2 M_2$  будет заполняться концами векторов  $\lambda_1 \mathbf{x}_1^0 + \lambda_2 \mathbf{x}_2^0$ . Перемещая точку  $A = X_0$  по множеству  $\lambda_1 M_1$ , получим все множество  $M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$ .

В определении линейной комбинации порядок слагаемых не играет роли (ввиду переместительного закона сложения векторов). Поэтому в изложенном построении множества  $M_1$  и  $M_2$  можно поменять ролями. (Это может привести только к переносу построенной таким путем их комбинации.)

На основании данного построения легко получить следующий простой вывод.

**Лемма 2.** Если  $M_1$  и  $M_2$  — непараллельные отрезки, то  $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$  есть параллелограмм со сторонами, равными и параллельными отрезкам  $\lambda_1 M_1$  и  $\lambda_2 M_2$ .

Если  $M_1$  и  $M_2$  — параллельные отрезки, то  $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$  есть параллельный им отрезок; длина его есть такая же линейная комбинация их длин:  $l = \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2$ .

Для доказательства достаточно подобно преобразовать отрезки  $M_1$ ,  $M_2$  и перенести отрезок  $\lambda_1 M_1$  его концом по отрезку  $\lambda_2 M_2$ .

**3. Лемма 3.** Линейная комбинация выпуклых множеств есть выпуклое множество (рис. 125).

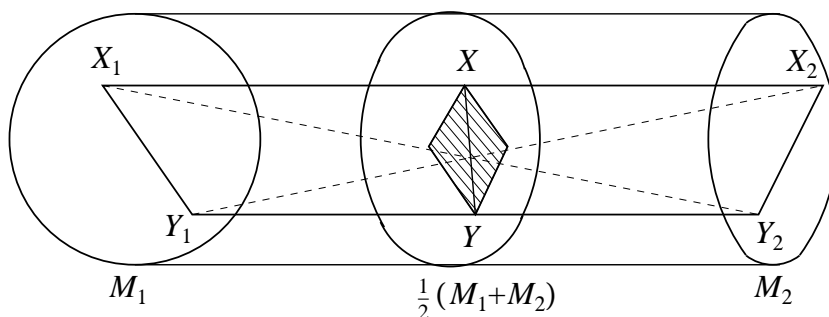


Рис. 125

Действительно, пусть  $X$  и  $Y$  — две точки множества  $M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$ . Они получаются как комбинации некоторых точек  $X_1, X_2$  и  $Y_1, Y_2$  из множества  $M_1$  и  $M_2$  (т. е.  $\overrightarrow{OX} = \lambda_1 \overrightarrow{OX_1} + \lambda_2 \overrightarrow{OX_2}$  и то же для  $Y$ ).

Если множества  $M_1$  и  $M_2$  выпуклы, то они содержат отрезки  $X_1 Y_1$  и  $X_2 Y_2$ . Тогда множество  $M$  содержит, очевидно, комбинацию этих отрезков, а сама эта комбинация содержит точки  $X$  и  $Y$ . Но, согласно лемме 2, комбинация отрезков есть параллелограмм или отрезок, а потому она вместе с точками  $X$  и  $Y$  содержит и соединяющий их отрезок.

Следовательно, при выпуклых  $M_1, M_2$  множество  $M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$  содержит вместе с любой парой точек  $X, Y$  также соединяющий их отрезок, т. е. оно также выпукло.

(Строя последовательно линейную комбинацию любого числа выпуклых множеств, придем к тому же выводу о выпуклости линейной комбинации  $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \dots + \lambda_n M_n$ .)

4. Будем называть «гранью» (в кавычках) множества  $M$  общую часть его с опорной плоскостью. Например, у выпуклого многогранника она может быть гранью в обычном смысле, ребром или вершиной.

**Лемма 4.** Пусть  $Q_1$  и  $Q_2$  — опорные плоскости множеств  $M_1$  и  $M_2$  с параллельными внешними нормальными, а  $G_1$  и  $G_2$  — соответствующие «грани» этих множеств. Тогда  $Q = \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2$  есть опорная плоскость множества  $M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$  с той же внешней нормалью, а соответствующая ей «грань»  $G$  множества  $M$  есть такая же комбинация «граней»  $G_1$  и  $G_2$ , т. е.  $G = \lambda_1 G_1 + \lambda_2 G_2$ . Обратное, всякая опорная плоскость и «грань» множества получается именно таким образом. (Строго говоря, нужно добавить, что имеются в виду замкнутые множества.)

Так как при переносах множеств  $M_1$  и  $M_2$  множество  $M$  испытывает лишь параллельный перенос, то можно перенести  $M_1$  в  $M_2$  так, чтобы плоскости  $Q_1$  и  $Q_2$  совпали. Кроме того, начало можно перенести на плоскость  $Q = Q_1 = Q_2$ . Тогда первое утверждение леммы становится очевидным. Множество  $M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$  будет лежать по ту же сторону от плоскости  $Q$ , что и сами множества  $M_1$  и  $M_2$ . Общая часть множества  $M$  с плоскостью  $Q$ , т. е. «грань»  $G$ , будет получаться как комбинация «граней»  $G_1$  и  $G_2$ . Например, на рис. 127 (с. 282) нижняя грань среднего многогранника есть полусумма нижних ребер «слагаемых» многогранников. (Если же перенести множества  $M_1$  и  $M_2$  на исходные места, то и множество  $M$ , и плоскость  $Q$ , и «грань»  $G$  испытают только соответствующий перенос.)

Для доказательства обратного утверждения возьмем какую-либо опорную плоскость  $Q$  множества  $M$  и опорные плоскости  $Q_1, Q_2$  множеств  $M_1$  и  $M_2$  с параллельными внешними нормальными<sup>8)</sup>. Перенесем  $M_1$  и  $M_2$  так, чтобы плоскости  $Q, Q_1$  и  $Q_2$  совпали. Тогда совершенно так же ясно, что плоскость  $Q$  и соответствующая ей «грань»  $G$  будут комбинациями плоскостей  $Q_1$  и  $Q_2$  и соответствующих им граней  $G_1$  и  $G_2$ .

Совершенно тот же вывод применим к плоским фигурам с заменой опорной плоскости на опорную прямую и «грани» — на «сторону», т. е. общую

<sup>8)</sup> У  $M_1$  и  $M_2$  имеются такие опорные плоскости. Если бы, например, у  $M_1$  не было такой опорной плоскости, то  $M_1$  содержало бы точки, сколь угодно далекие от плоскости  $Q$  в направлении ее внешней нормали. Но тогда очевидно, что и в множестве  $M$  были бы такие сколь угодно далекие точки, вопреки тому, что оно имеет опорную плоскость  $Q$ .

часть фигуры с ее опорной прямой. (Например, на рис. 126 сторона  $a'$  есть комбинация вершины  $A$  и стороны  $a$ .)

**5. Лемма 5.** *Линейная комбинация многоугольников, лежащих в параллельных плоскостях, есть многоугольник, лежащий в параллельной плоскости.* (В частности, один из многоугольников может вырождаться в отрезок или даже точку.)

Можно считать, что многоугольники лежат в одной плоскости, так как их перенос может вызвать лишь перенос их линейной комбинации.

Пусть даны два треугольника  $T_1, T_2$ . Фигуры  $\lambda_1 T_1, \lambda_2 T_2$  будут подобными им треугольниками. Их комбинацию  $\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2$  можно строить, обнося какую-либо вершину треугольника  $\lambda_1 T_1$  по всем точкам треугольника  $\lambda_2 T_2$ .

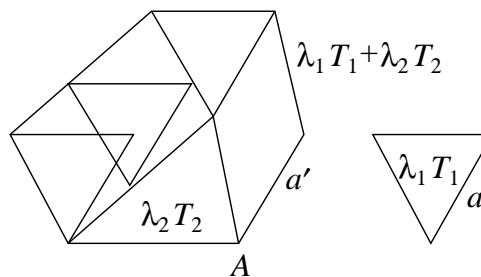


Рис. 126

Непосредственно из рис. 126 очевидно, что в результате зачертится шестиугольник. В частных случаях он может вырождаться в пятиугольник, четырехугольник или треугольник (последнее — если  $T_1$  и  $T_2$  подобны и параллельно расположены). Доказательство можно обосновать на последнем замечании в предыдущем пункте. «Стороны» множества  $\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2$  будут комбинациями сторон или вершин треугольников  $T_1$  и  $T_2$ . Так как тех и других — лишь конечное число, то у множества  $\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2$  будет лишь конечное число «сторон», так что оно представляет собой многоугольник. Так как настоящая сторона может получиться лишь от комбинирования стороны с вершиной или со стороной, лежащей в параллельной опорной прямой, то имеется максимум шесть возможных комбинаций, приводящих к сторонам на  $\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2$ .

Пусть теперь  $M_1$  и  $M_2$  — любые два многоугольника. Разобьем их на треугольники  $T_1^i$  и  $T_2^j$ . Комбинация  $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$  будет, очевидно, слагаться из комбинаций всех возможных пар треугольников:  $\lambda_1 T_1^i + \lambda_2 T_2^j$ . (Эти комбинации, конечно, перекрываются.) По доказанному эти комбинации суть многоугольники. Поэтому  $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$  слагается из конечного числа многоугольников и, следовательно, также является многоугольником, что и требовалось доказать.

**Лемма 6.** *Линейная комбинация телесных многогранников есть телесный многогранник.*

Доказательство — то же, что для леммы 5. Сначала убеждаемся, что комбинация тетраэдров есть многогранник (рис. 127). После этого, разбивая любые данные многогранники на тетраэдры, видим, что их комбинация



слагается из комбинаций этих тетраэдров и, следовательно, также является многогранником.

Наглядное рассмотрение комбинации двух тетраэдров представляет некоторое затруднение. Поэтому можно прибегнуть к лемме 4, так же как это сделано в выводе леммы 5. Если  $T_1$  и  $T_2$  — два тетраэдра, то множество  $\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2$  будет выпуклым согласно лемме 3. По лемме 4 его «грани»

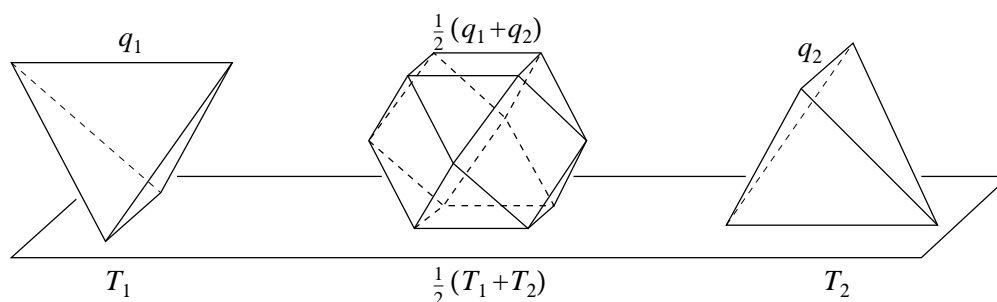


Рис. 127

будут комбинациями «граней» тетраэдров  $T_1$  и  $T_2$ , т. е. их настоящих граней, ребер и вершин. Так как всех этих элементов — лишь конечное число, то и их комбинаций — конечное число. Поэтому  $\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2$  имеет конечное число «граней» и, значит, оказывается многогранником.

(Настоящая грань у  $\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2$  может получаться как комбинация грани на  $T_1$  (или  $T_2$ ) с гранью, ребром или вершиной на  $T_2$  (или  $T_1$ ) либо как комбинация двух непараллельных ребер, лежащих в параллельных опорных плоскостях. В последнем случае, согласно лемме 2, она будет параллелограммом. При «общем» расположении тетраэдров  $T_1$  и  $T_2$  грани одного не параллельны ни граням, ни ребрам другого; ребра, лежащие в параллельных опорных плоскостях, также не параллельны. Поэтому грани на  $\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2$  получаются от комбинирования граней с вершинами и ребер с ребрами (см. рис. 127). Рассмотрение комбинации  $\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2$  в этом общем случае и исследование всех возможных ее вырождений может служить хорошим упражнением в наглядной геометрии.)

**6.** Теперь можно получить результат, являющийся конечной целью выводов этого параграфа.

**Теорема.** *Линейная комбинация телесных выпуклых многогранников есть телесный выпуклый многогранник:  $P = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2$ .*

Если  $Q$  есть «грань» многогранника  $P$  (т. е. грань, ребро или вершина), то  $Q = \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2$ , где  $Q_1$  и  $Q_2$  — «грани» на  $P_1$  и  $P_2$ , лежащие в опорных плоскостях с параллельными внешними нормальными.  $Q$  будет настоящей гранью, когда  $Q_1$  и  $Q_2$  суть: 1) две грани, либо 2) грань и ребро, либо 3)

грань и вершина, либо 4) пара непараллельных ребер.  $Q$  будет ребром, если  $Q_1$  и  $Q_2$  — параллельные ребра либо ребро и вершина.

Доказательство непосредственно следует из предыдущих лемм. По лемме 6  $P$  будет многогранником, а по лемме 3 — выпуклым. Далее, по лемме 4 каждая «грань»  $Q$  многогранника  $P$  будет комбинацией «граней»  $Q_1$  и  $Q_2$ , лежащих на  $P_1$  и  $P_2$  в опорных плоскостях с параллельными нормальными. Если при этом  $Q_1$  и  $Q_2$  — параллельные ребра или ребро и вершина, то они дают в комбинации параллельное ребро  $\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2$ . Если  $Q_1$  и  $Q_2$  — вершины, то они дают вершину  $\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2$ . Во всех остальных случаях  $\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2$  будет настоящей гранью (как видно из лемм 2 и 5). Эти остальные случаи исчерпаны четырьмя возможностями, указанными в теореме. (На рис. 127 треугольные грани среднего многогранника суть комбинации граней и вершин тетраэдров  $T_1$  и  $T_2$ , а четырехугольные грани — комбинации ребер.)

Строя последовательно линейную комбинацию нескольких многогранников, получим аналогичный результат для любого числа их.

### § 3. УСЛОВИЕ РАВЕНСТВА ЗАМКНУТЫХ МНОГОГРАННИКОВ

1. Мы будем рассматривать пары замкнутых выпуклых многогранников или, что равносильно, пары конечных телесных выпуклых многогранников. (В этом параграфе «выпуклый многогранник» всегда будет означать именно телесный конечный выпуклый многогранник.) Опорные плоскости к ним мы будем называть параллельными только тогда, когда внешние нормали к этим плоскостям параллельны.

Пусть  $P_1$  и  $P_2$  — два выпуклых многогранника. Пусть  $Q_1$  — грань многогранника  $P_1$ , а  $Q_2$  — «грань», т. е. грань, ребро или вершина многогранника  $P_2$ , лежащая в опорной плоскости, параллельной плоскости  $Q_1$ . Эту «грань»  $Q_2$  мы будем называть гранью многогранника  $P_2$ , параллельной грани  $Q_1$ . Соответственно определяются грани многогранника  $P_1$ , параллельные граням  $P_2$ . Таким образом, две «параллельные грани» лежат в опорных плоскостях с параллельными внешними нормальными и хотя бы одна из них является действительно гранью, другая же может быть ребром или вершиной.

**Теорема 1.** *Если у двух выпуклых многогранников все пары параллельных граней таковы, что ни одну грань нельзя поместить внутри другой параллельным перенесением, то такие многогранники равны и параллельно расположены. (Иными словами, невозможно, чтобы параллельные грани нельзя было совместить параллельным переносом, если ни для одной пары их нельзя поместить одну внутри другой.)*

Так как вершину всегда можно поместить внутри грани, то при условиях теоремы параллельные грани могут быть либо обе действительно гранями, либо одна — действительно гранью, а другая — ребром.

Пусть многогранники  $P_1$  и  $P_2$  удовлетворяют условиям теоремы; рассмотрим их полусумму

$$P = \frac{1}{2}(P_1 + P_2).$$

По доказанному в предыдущем параграфе  $P$  будет выпуклым многогранником, грани которого представляют собой одно из трех:

- 1) полусумму параллельных действительных граней многогранников  $P_1$  и  $P_2$ ;
- 2) полусумму параллельных граней, из которых одна — действительная грань, а другая — ребро;
- 3) полусумму непараллельных ребер.

(Полусумма грани и вершины отсутствует, как это только что было отмечено, в силу условий теоремы.)

Каждое ребро многогранника  $P$  есть полусумма параллельных ребер, лежащих на  $P_1$  и  $P_2$  в параллельных опорных плоскостях, либо полусумма ребра и вершины. В этом случае мы считаем, что оно также есть полусумма ребер, но одно из которых имеет нулевую длину. (Это условие о ребрах нулевой длины соответствует аналогичному условию о сторонах многоугольника, принятому в § 1.) Таким образом, каждому ребру многогранника  $P$  отвечает по ребру на  $P_1$  и  $P_2$ .

Отнесем ребру многогранника  $P$  знак плюс или минус в зависимости от того, длиннее или короче соответствующее ребро на  $P_1$ , чем на  $P_2$ ; в случае равенства ребер на  $P_1$  и  $P_2$  оставляем ребро на  $P$  неотмеченным.

Докажем, что в таком случае при обходе вокруг каждой грани  $Q$  многогранника  $P$  должно быть не менее четырех перемен знака, если только на этой грани имеются отмеченные ребра. Рассмотрим последовательно каждый из трех типов граней, указанных выше.

1) Грань  $Q$  есть полусумма двух действительных граней  $Q_1$  и  $Q_2$ . По условию теоремы  $Q_1$  и  $Q_2$  непомещаемы одна внутри другой. Поэтому на основании леммы 3 § 1 число перемен знака при обходе вокруг любой из них, а значит, и вокруг  $Q$ , должно быть не меньше четырех. Исключение составляет случай, когда стороны граней  $Q_1$  и  $Q_2$  равны, т. е.  $Q_1$  и  $Q_2$  равны и параллельно расположены.

2) Грань  $Q$  есть полусумма действительной грани  $Q_1$  и ребра  $Q_2$  (или наоборот). Так как по условию  $Q_2$  нельзя поместить в  $Q_1$ , то на  $Q_1$  стороны, параллельные  $Q_2$ , должны быть короче  $Q_2$ . Вместе с тем на  $Q_1$  имеются, конечно, стороны, не параллельные  $Q_2$ : им на  $Q_2$  соответствуют «стороны» нулевой длины.

Отсюда очевидно, что при обходе вокруг  $Q$  будет ровно четыре переменны знака.

3) Грань  $Q$  есть полусумма непараллельных ребер  $Q_1$  и  $Q_2$ . Тогда  $Q$  есть параллелограмм со сторонами, равными  $\frac{1}{2} Q_1$  и  $\frac{1}{2} Q_2$ . Стороне  $\frac{1}{2} Q_1$  соответствуют  $Q_1$  и конец  $Q_2$ , т. е. «сторона» нулевой длины. Аналогичное верно для  $\frac{1}{2} Q_2$ . Следовательно, стороны параллелограмма  $Q$  отмечены попеременно плюсами и минусами, что дает четыре переменны знака.

Итак, при обходе вокруг каждой грани многогранника  $P$ , имеющей отмеченные ребра, получается не менее четырех перемен знака. Возьмем внутри каждой грани по точке и соединим эти точки линиями, если они принадлежат граням, смежным по ребру. Тогда получим сеть  $\bar{P}$ , двойственную многограннику  $P$  (рис. 128). Грани  $Q$  на  $P$  отвечает вершина  $\bar{Q}$  на  $\bar{P}$ ; ребру на  $P$ , по которому смежны грани  $Q'$  и  $Q''$ , отвечает на  $\bar{P}$  ребро  $\bar{Q}'\bar{Q}''$ ; вершине  $A$  на  $P$  отвечает грань на  $\bar{P}$ , ограниченная ребрами на  $P$ , соответствующими ребрам на  $P$ , сходящимся в  $A$ . Ребрам многогранника  $P$ , принадлежащим одной грани, соответствуют ребра сети  $\bar{P}$ , сходящиеся в вершине. Отнеся этим ребрам те же знаки, получим, что вокруг каждой вершины сети  $\bar{P}$  имеется не менее четырех перемен знака, если только к этой вершине подходит хотя бы одно отмеченное ребро. Но в таком случае из леммы Коши вытекает, что отмеченных ребер не может быть вовсе<sup>9)</sup>. Следовательно, и на многограннике  $P$  нет отмеченных ребер.

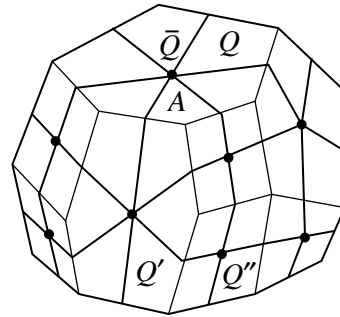


Рис. 128

Отсюда следует:

Если грань  $Q$  на  $P$  есть полусумма двух действительных граней, то эти грани равны и параллельны; граней на  $P$ , являющихся полусуммами грани и ребра или двух ребер, нет вовсе, потому что, как было показано, вокруг такой грани должно быть ровно четыре переменны знака.

Следовательно, многогранники  $P_1$  и  $P_2$  имеют попарно равные и параллельные грани, так что они равны и параллельно расположены.

2. Из теоремы 1 можно вывести такое следствие:

**Теорема 2.** Пусть  $f(Q)$  — монотонная функция выпуклого многоугольника  $Q$ , т. е.  $f(Q)$  есть такое число, что  $f(Q_1) > f(Q_2)$ , если  $Q_2$  можно поместить внутри  $Q_1$ . Тогда, если у двух выпуклых многогранников  $f(Q_1) = f(Q_2)$  для каждой пары параллельных граней  $Q_1$  и  $Q_2$ , то такие многогранники равны и параллельно расположены. Или в еще более общей форме:

<sup>9)</sup>Условия леммы Коши (§1 гл. II) здесь выполнены, потому что в сети  $\bar{P}$  нет двугольных областей, поскольку на многограннике  $P$  нет вершин, где сходится только два ребра.

Пусть выпуклые многогранники  $P_1$  и  $P_2$  имеют попарно параллельные грани  $Q_1^1, Q_2^1; \dots; Q_1^n, Q_2^n$ . Если  $f_1, \dots, f_n$  — монотонные функции многоугольника и  $f_i(Q_1^i) = f_i(Q_2^i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), то многогранники  $P_1$  и  $P_2$  равны и параллельно расположены.

Действительно, в силу монотонности функций  $f_i$  грани  $Q_1^i$  и  $Q_2^i$  непомещаемы одна в другой; поэтому данная теорема непосредственно вытекает из теоремы 1.

Примерами монотонных функций могут служить площадь, периметр, момент инерции относительно центра тяжести и т. д. и т. п. В частности, если  $f(Q)$  — площадь, то получаем теорему Минковского:

*Два выпуклых многогранника с попарно параллельными и равновеликими гранями равны и параллельно расположены.*

Еще в п<sup>о</sup> 5 § 4 главы II на простом примере было показано, что наша теорема 1, а следовательно, и теорема 2 не обобщаются в более чем трехмерное пространство<sup>10)</sup>. Это — пример четырехмерного куба с ребром 2 и четырехмерного прямоугольного параллелепипеда с ребрами 1, 1, 3, 3. Между тем Минковский доказал свою теорему в пространстве любого числа измерений. Это доказательство Минковского основано на совершенно иных соображениях и будет изложено в § 2 главы VII.

Заметим еще, что вследствие «запаса», равного 8, имеющегося в оценке числа перемен знаков по лемме Коши, в теореме 1 достаточно требовать выполнения ее условий для всех пар параллельных граней, кроме одной. Отсюда легко заключить, что теореме 1 можно высказать в следующей несколько усиленной форме.

Для любых двух замкнутых выпуклых многогранников имеются лишь две возможности: либо они равны и параллельно расположены, либо на них есть по крайней мере две пары таких параллельных граней, что одна из граней помещается внутри другой параллельным переносом. При этом одна из граней всегда есть настоящая грань, другая же может быть настоящей гранью, ребром или вершиной.

#### § 4. УСЛОВИЯ РАВЕНСТВА БЕСКОНЕЧНЫХ МНОГОГРАННИКОВ

1. Условие равенства замкнутых многогранников, установленное в предыдущем параграфе, для бесконечных многогранников лишается смысла. В применении к их бесконечным граням оно, вообще говоря, просто не может быть выполнено, потому что из двух бесконечных выпуклых многоугольников один всегда может быть помещен внутри другого, как в этом легко убедиться. Тем не менее, применяя это условие лишь к конечным граням,

<sup>10)</sup> О равенстве  $n$ -мерных выпуклых многогранников при невмещаемости их параллельных *двумерных* граней см. [139]. — Прим. В. А. Залгаллера.

можно ввести такое условие для бесконечных граней, что оба эти условия вместе обеспечат равенство бесконечных многогранников.

Это дополнительное условие состоит в следующем:

*Бесконечные многогранники должны иметь равные и параллельные бесконечные части*<sup>11)</sup>, т. е. от каждого из них можно отрезать конечную часть так, что оставшиеся бесконечные части будут совмещаться параллельным переносом. Это равносильно тому, что путем параллельного переноса можно привести в совпадение плоскости бесконечных граней обоих многогранников.

Относительно конечных граней мы будем иметь в виду те же условия, что и в предыдущем параграфе. Две грани считаются параллельными тогда и только тогда, когда параллельны их внешние нормали. Если на одном многограннике нет грани, параллельной грани другого, то мы считаем, что она есть, но только вырождается в ребро или вершину, лежащие в опорной плоскости с той же внешней нормалью.

Термин «параллельные грани» понимается дальше именно в этом смысле.

**2.** Теперь сформулируем теорему о равенстве бесконечных многогранников.

**Теорема 1.** *Пусть у двух бесконечных выпуклых многогранников бесконечные части равны и параллельны, а все пары конечных параллельных граней таковы, что ни одну грань нельзя поместить внутри другой путем параллельного переноса. Тогда эти многогранники равны и параллельно расположены.*

Термин «поместить внутри» понимается так же, как в § 1 и 3, т. е. так, что один многоугольник содержится в другом и с ним не совпадает.

Так как точку всегда можно поместить внутри грани, то при условиях теоремы параллельные грани могут быть либо обе действительно гранями, либо одна — действительно гранью, а другая — ребром.

Пусть многогранники  $P_1$  и  $P_2$  удовлетворяют условиям теоремы. В силу первого из этих условий можно считать, что бесконечные части этих многогранников совпадают. Следовательно, их бесконечные ребра и грани налегают соответственно друг на друга.

Представляя себе  $P_1$  и  $P_2$  как телесные многогранники, построим их полусумму

$$P = \frac{1}{2}(P_1 + P_2).$$

---

<sup>11)</sup>Как указывалось еще в § 1 гл. I, рассмотрение бесконечных многогранников равносильно рассмотрению конечных многогранников, крайние грани которых допускают бесконечное продолжение без появления новых пересечений. Поэтому данное условие и вместе с ним следующая далее теорема 1 легко пересказываются для таких конечных многогранников.

Так как бесконечные части многогранников  $P_1$  и  $P_2$  совпадают, то их полу-сумма  $P$  имеет ту же бесконечную часть; никаких новых бесконечных граней и ребер здесь не появляется, и форма граней может измениться только в конечной части. К конечной же части многогранника  $P$  применимы все те же соображения, какие были использованы в предыдущем параграфе. Поэтому мы сразу можем сформулировать их результат.

Если ребру многогранника  $P$  приписывать знак разности  $l_1 - l_2$  соответствующих ребер  $l_1$  и  $l_2$  многогранников  $P_1$  и  $P_2$ , то при обходе вокруг каждой конечной грани многогранника  $P$  будет не менее четырех перемен знака, если только хотя бы одно ребро этой грани не остается неотмеченным (неотмеченные ребра — те, для которых  $l_1 - l_2 = 0$ ).

**3.** Обратимся теперь к бесконечным граням. По условию расположения многогранников  $P_1$  и  $P_2$  их бесконечные ребра соответственно налегают друг на друга. Мы будем считать бесконечное ребро  $l_1$  многогранника  $P_1$  длиннее соответствующего ребра  $l_2$  многогранника  $P_2$ , если  $l_2$  есть только часть  $l_1$ . Аналогично определяется обратное неравенство, равными же эти ребра считаются тогда, когда они совпадают. Согласно этому условию определяется знак разности бесконечных ребер  $l_1 - l_2$  и этот знак приписывается соответствующему ребру «среднего» многогранника  $P$ . Неотмеченными останутся только ребра, которым отвечают совпадающие бесконечные ребра на  $P_1$  и  $P_2$ .

Принятое условие о знаке разности бесконечных ребер совпадает с условием о знаке разности бесконечных сторон многоугольников, принятым в лемме 4а § 1. Так как, кроме того, у налегающих бесконечных граней многогранников  $P_1$  и  $P_2$  бесконечные ребра налегают, то мы находимся как раз в условиях этой леммы. Поэтому, применяя ее, мы приходим к следующему заключению относительно возможных расстановок знаков на контуре любой бесконечной грани  $Q$  среднего многогранника  $P$ :

- 1) ни одно ребро этой грани не отмечено, и тогда соответствующие ей грани  $Q_1$  и  $Q_2$  на  $P_1$  и  $P_2$  совпадают;
- 2) на контуре грани  $Q$  имеются минимум две переменны знака;
- 3) бесконечные ребра граней  $Q_1$  и  $Q_2$  параллельны, а конечные их ребра соответственно равны. Это соответствует исключительному случаю, оговоренному в лемме 4а § 1.

**4.** Рассмотрим ближе этот исключительный случай. Пусть он имеет место для пары граней  $Q_1, Q_2$  многогранников  $P_1, P_2$ . Грани  $Q_1, Q_2$  равны и параллельны, потому что равны и параллельны их ребра. Поэтому для этих граней имеются только две возможности:

- За) грани  $Q_1, Q_2$  совпадают, т. е. имеет место первый из трех указанных только что случаев;
- Зб) одна из этих граней, скажем  $Q_1$ , смещена внутрь другой.

Покажем, что если грани  $Q_1$  и  $Q_2$  не имеют общих ребер с конечными гранями своих многогранников, то они совпадают. Действительно, общие ребра бесконечных граней лежат в пересечениях плоскостей этих граней. У многогранников  $P_1, P_2$  по условию их расположения бесконечные грани соответственно налегают, а следовательно, совпадают и пересечения плоскостей этих граней. Поэтому если грани  $Q_1, Q_2$  ограничены только пересечениями с плоскостями других бесконечных граней, то они необходимо совпадают.

Таким образом, исключив из рассмотрения случай совпадения граней  $Q_1$  и  $Q_2$ , мы имеем для них следующее положение: одна из них, скажем  $Q_1$ , сдвинута внутрь другой и хотя бы одна из этих граней имеет общие ребра с конечными гранями своего многогранника.

Соответствующая грань  $Q$  среднего многогранника  $P$  есть полусумма граней  $Q_1, Q_2$  (теорема п<sup>о</sup> 6 § 2), и так как  $Q_1, Q_2$  равны и параллельны, то  $Q$  тоже равна и параллельна им. Так как грань  $Q_1$  сдвинута внутрь  $Q_2$ , то, согласно условию, ее бесконечные ребра считаются короче ребер грани  $Q_2$ , и потому обоим бесконечным ребрам грани  $Q$  отнесен знак минус. Вместе с тем ни одно конечное ребро грани  $Q$  не отмечено, потому что конечные ребра граней  $Q_1, Q_2$  равны. По условию хотя бы у одной из граней  $Q_1, Q_2$ , скажем у  $Q_1$ , есть ребро  $l_1$ , принадлежащее также конечной грани  $R_1$ . Тогда соответствующее ребро  $l$  грани  $Q$  также принадлежит конечной грани, именно той грани  $R$ , которая является «полусуммой» грани  $R_1$  и параллельной ей грани  $R_2$  многогранника  $P_2$ . Ребро  $l$  не отмечено, и мы отнесем ему знак плюс. Тогда так как бесконечные ребра грани  $Q$  отмечены минусами, то на ее контуре получится две перемены знака. Число же перемен знаков на конечных гранях, очевидно, не уменьшится<sup>12)</sup>.

Таким образом, в исключительном третьем случае (если он не сводится к первому) всегда можно ввести еще лишние знаки так, что на контуре бесконечной грани будет две перемены знака. Мы примем такую расстановку знаков на всех бесконечных гранях, где это нужно.

**5.** Теперь, суммируя все наши выводы относительно расстановки знаков на конечных и бесконечных гранях, мы приходим к следующему результату:

Если на многограннике  $P$  конечная грань имеет отмеченные ребра, то на ее контуре имеется не менее четырех перемен знака; если же бесконечная грань имеет отмеченные ребра, то на ее контуре имеется не менее двух перемен знака.

Допустим, что на многограннике  $P$  имеются отмеченные ребра. Проведем на бесконечных его гранях замкнутую ломаную с вершинами внутри

<sup>12)</sup> Оговорка, что грань  $R$ , смежная с  $Q$  по ребру  $l$ , — конечная, существенна, потому что иначе могло бы оказаться, что, применяя к бесконечной грани  $R$  те же рассуждения, мы должны были бы отнести ребру  $l$  знак минус.



бесконечных ребер, отделяющую бесконечную часть многогранника. Останется конечный многогранник  $P'$ . Возьмем второй экземпляр  $P''$  того же многогранника  $P'$  с той же расстановкой знаков на его ребрах и отождествим соответствующие стороны и вершины ломаных, ограничивающих  $P'$  и  $P''$ <sup>13)</sup>. После этого исключим эти ломаные и также исключим их вершины. Тогда получим абстрактный многогранник  $P' + P''$ , который, очевидно, гомеоморфен сфере и не имеет вершин, общих только двум ребрам. На этом многограннике имеются отмеченные ребра и если какая-то его грань имеет отмеченное ребро, то число перемен знака вокруг нее не меньше четырех. Действительно, для граней, соответствующих конечным граням многогранника  $P$ , это очевидно из предыдущего. Если же грань соответствует бесконечной грани многогранника  $P$ , то ее контур складывается из двух одинаковых частей, на каждой из которых имеется не менее двух перемен знака. В сумме это дает не менее четырех перемен знака.

Но точно так же, как в § 3, переходя к двойственному многограннику, мы убеждаемся, что такая расстановка знаков противоречит лемме Коши. Поэтому допущение о наличии у среднего многогранника  $P$  отмеченных ребер невозможно: все его ребра должны быть неотмеченными. Так же, как в § 3, отсюда следует, что грани наших исходных многогранников  $P_1$  и  $P_2$  не только параллельны, но и равны, т. е. сами многогранники равны и параллельны, что и требовалось доказать.

**6.** Из доказанной теоремы, подобно теореме 2 § 3, немедленно вытекает такое следствие:

**Теорема 2.** Пусть  $f_1(Q), f_2(Q), \dots$  — такие функции конечного выпуклого многоугольника, что  $f_i(Q') > f_i(Q'')$ , если  $Q''$  помещается внутри  $Q'$ . Тогда если у двух бесконечных выпуклых многогранников  $Q'_i, Q''_i$  бесконечные части равны и параллельны, а для каждой пары их конечных параллельных граней  $Q'_i, Q''_i$   $f_i(Q'_i) = f_i(Q''_i)$ , то такие многогранники равны и параллельно расположены.

В частности, например, принимая в качестве всех  $f_i$  площадь, получим:

*Если у двух бесконечных выпуклых многогранников бесконечные части равны и параллельны, а конечные грани попарно параллельны и равновелики, то такие многогранники равны и параллельно расположены.*

Но можно для одних граней требовать равенства площадей, для других — равенства периметров и т. д.

<sup>13)</sup> Это отождествление мыслится абстрактно. Однако легко видеть, что многогранник  $P'$  можно отсечь от  $P$  некоторой плоскостью и тогда  $P''$  получается из  $P'$  простым отражением в этой плоскости.

§ 5. ДРУГОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО И ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ  
О БЕСКОНЕЧНЫХ МНОГОГРАННИКАХ. О МНОГОГРАННИКАХ С ГРАНИЦЕЙ

1. А. В. Погорелов [164] предложил другое доказательство теоремы 1 предыдущего параграфа, обладающее важными преимуществами. Оно распространяется на пространство любого числа измерений и позволяет получить более общий результат:

**Теорема 1.** *Пусть у двух бесконечных многогранников плоскости бесконечных граней совпадают, а каждая пара их параллельных конечных граней обладает по крайней мере одним из двух свойств: либо их плоскости совпадают, либо ни одну из этих граней нельзя поместить внутри другой параллельным переносом. При этих условиях многогранники совпадают.*

(Если речь идет о  $n$ -мерных многогранниках, то, говоря о паре параллельных граней, мы имеем в виду, что хотя бы одна из них  $(n - 1)$ -мерная, другая же может быть и меньшего числа измерений, но лежит в параллельной опорной  $(n - 1)$ -мерной плоскости. В  $n$ -мерном случае термин «поместить внутри» понимается так же, как и раньше.)

Обобщение в сравнении с теоремой 1 предыдущего параграфа состоит не только в переходе в пространство любого числа измерений, но еще в том, что для конечных граней допускаются два предположения. В связи с этим ту же теорему можно пересказать для многогранников с границей.

**Теорема 1а.** *Пусть два конечных выпуклых многогранника, ограниченные каждой одной замкнутой ломаной, имеют сферические изображения, содержащиеся в полусфере. Пусть плоскости их крайних граней совпадают, а для пар параллельных внутренних, т. е. не подходящих к краю, граней имеет место хотя бы одно из двух: либо их плоскости совпадают, либо ни одну из этих граней нельзя поместить внутри другой параллельным переносом.*

*Тогда плоскости всех граней совпадают, и следовательно, внутренние грани совпадают полностью, а крайние грани могут быть продолжены до совпадения.*

Теорема 1 о бесконечных многогранниках, очевидно, содержится в данном утверждении; стоит лишь, отрезав от бесконечных многогранников достаточно далекие части, перейти к многогранникам с границей.

Для того чтобы убедиться, что, и обратно, данное утверждение вытекает из теоремы 1, достаточно продолжить крайние грани многогранников так, что получатся бесконечные многогранники. Это возможно потому, что их сферические изображения содержатся в полусфере. Бесконечное продолжение может оказаться возможным не для всех крайних граней; но это не играет никакой роли. Очевидно, для полученных бесконечных многогранников условия предыдущей теоремы будут выполнены.

Заметим, что, как можно убедиться на простых примерах, указанный результат не распространяется на такие конечные многогранники с границей, у которых сферические изображения не помещаются в полусфере. Поэтому сущность результата состоит в теореме 1 о бесконечных многогранниках.

**2.** Мы докажем теорему 1 для многогранников, у которых сферическое изображение содержится внутри полусферы. (Этим в трехмерном случае исключаются не только многогранники, у которых все бесконечные ребра параллельны, но и такие, которые имеют параллельные бесконечные грани.) В этом предположении доказательство оказывается особенно простым. Общий случай будет коротко рассмотрен дополнительно.

Допустим, вопреки доказываемому, что имеются два несовпадающих бесконечных многогранника  $P_1$  и  $P_2$  со сферическими изображениями внутри полусферы, удовлетворяющие условиям теоремы. Из этих условий вытекает, что их сферические изображения совпадают и нормали к их опорным плоскостям, будучи отложены из одной точки, заполняют выпуклый телесный угол  $V$ .

Обозначим  $h_1(\mathbf{n})$ ,  $h_2(\mathbf{n})$  опорные функции многогранников  $P_1$ ,  $P_2$ , т. е. расстояния их опорных плоскостей от начала, взятые с соответствующим знаком, как функции единичного вектора внешней нормали  $\mathbf{n}$ .

Если бы было  $h_1(\mathbf{n}) = h_2(\mathbf{n})$  при всех  $\mathbf{n}$ , то многогранники совпадали бы. Поэтому имеется множество  $W$  векторов  $\mathbf{n}$  из угла  $V$ , для которых  $h_1(\mathbf{n}) - h_2(\mathbf{n}) > 0$  (или  $< 0$ ). Не ограничивая общности, можно считать, что в угле  $V$  найдутся единичные векторы, для которых  $h_1(\mathbf{n}) - h_2(\mathbf{n}) > 0$ . Рассмотрим функцию  $\varphi(\mathbf{n})$ , определенную для векторов  $\mathbf{n}$  из  $W$  равенством

$$\varphi(\mathbf{n}) = \frac{1}{h_1(\mathbf{n}) - h_2(\mathbf{n})}. \quad (1)$$

Интерпретируем эту функцию геометрически, поставив в соответствие каждому  $\mathbf{n}$  конец вектора  $\varphi(\mathbf{n})\mathbf{n}$ , отложенного из начала. Геометрическое место этих точек есть некоторый многогранник  $R$  с краем в бесконечности, расположенный внутри угла  $V$  вне шара радиуса

$$r = \frac{1}{\sup_{\mathbf{n} \in W} [h_1(\mathbf{n}) - h_2(\mathbf{n})]}.$$

Для доказательства заметим, что если  $A$  — вершина многогранника  $P_1$  (или  $P_2$ ) и  $\mathbf{a}$  — идущий в нее вектор, то для нормалей  $\mathbf{n}$  к опорным плоскостям в вершине  $A$   $h_1(\mathbf{n}) = \mathbf{a}\mathbf{n}$ . Нормали в вершине образуют выпуклый телесный угол. Весь угол  $V$  разбивается на такие углы  $V_1^i$  для многогранника  $P_1$  и  $V_2^i$  для  $P_2$ . Рассмотрим разбиение угла  $V$  на углы  $V^k$ , являющиеся

пересечениями углов  $V_1^i$  и  $V_2^j$ . В каждом угле  $V_1^i$   $h_1(\mathbf{n}) = \mathbf{a}_1^i \mathbf{n}$  и в угле  $V_2^j$   $h_2(\mathbf{n}) = \mathbf{a}_2^j \mathbf{n}$ . Поэтому в  $V^k = V_1^i \cap V_2^j$   $h_1(\mathbf{n}) - h_2(\mathbf{n}) = \mathbf{a}^k \mathbf{n}$ , где  $\mathbf{a}^k = \mathbf{a}_1^i - \mathbf{a}_2^j$ . Если  $h_1(\mathbf{n}) - h_2(\mathbf{n}) \neq 0$ , то соответственно  $\varphi(\mathbf{n}) = 1/(\mathbf{a}^k \mathbf{n})$  и  $\mathbf{a}^k \mathbf{n} \varphi(\mathbf{n}) = 1$ , т. е. концы векторов  $\varphi(\mathbf{n})\mathbf{n}$ , идущих в угле  $V^k$ , принадлежат плоскости

$$\mathbf{a}^k \mathbf{x} = 1. \tag{*}$$

Следовательно, множество концов всех этих векторов есть многогранник с гранями на плоскостях (\*). Мы ограничиваемся его частью  $R$ , лежащей в угле  $W$ , где  $h_1(\mathbf{n}) - h_2(\mathbf{n}) = 0$ . На границе угла  $W$  имеем  $h_1(\mathbf{n}) - h_2(\mathbf{n}) = 0$  (на границе угла  $V$  это равенство вытекает из условия совпадения плоскостей бесконечных граней). Поэтому при приближении к границе угла  $W$   $\varphi(\mathbf{n}) \rightarrow \infty$ , т. е. край многогранника  $R$  лежит в бесконечности. То, что  $R$  лежит вне некоторого шара, ясно из того, что ввиду ограниченности функций  $h_1(\mathbf{n})$  и  $h_2(\mathbf{n})$  функция  $\varphi(\mathbf{n}) = 1/(h_1(\mathbf{n}) - h_2(\mathbf{n}))$  при  $h_1 - h_2 > 0$  ограничена снизу положительным числом.

Благодаря такому расположению многогранника  $R$  существует плоскость  $T$ , не проходящая через начало, содержащая только одну вершину многогранника, причем весь многогранник лежит по одну сторону от этой плоскости, а именно — по ту, где не лежит начало координат (рис. 129).

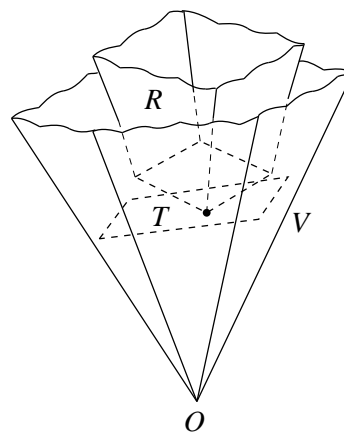


Рис. 129

(Такая плоскость заведомо существует. Действительно, согласно сделанному вначале предположению, сферические изображения многогранников  $P_1$  и  $P_2$  содержатся внутри полусферы. Поэтому телесный угол  $V$ , образованный нормальными, имеет опорные плоскости, проходящие только через его вершину. Плоскость, параллельная такой плоскости и упирающаяся в многогранник  $R$ , касается его по конечной «границе». Если эта «граница» не сводится к вершине, то малым поворотом плоскости можно добиться того, что она будет касаться  $R$  уже только в вершине.)

Пусть  $\mathbf{m}$  — нормаль к плоскости  $T$ , а  $p$  — расстояние этой плоскости от начала. Тогда расстояние от начала до плоскости  $T$  в направлении данного вектора  $\mathbf{n}$  будет

$$r(\mathbf{n}) = \frac{p}{\mathbf{n}\mathbf{m}}. \tag{2}$$

Так как многогранник  $R$  лежит за плоскостью  $T$ , то  $\varphi(\mathbf{n}) \geq r(\mathbf{n})$  или вследствие (1) и (2)

$$h_1(\mathbf{n}) - h_2(\mathbf{n}) \leq \mathbf{n} \frac{\mathbf{m}}{p}. \quad (3)$$

А так как только одна вершина многогранника лежит в плоскости  $T$ , то равенство достигается здесь только для единичного вектора  $\mathbf{n}_0$ , направленного в эту вершину.

Параллельным переносом многогранника  $P_2$  можно добиться того, что неравенство (3) перейдет в

$$h_1(\mathbf{n}) - h'_2(\mathbf{n}) \leq 0, \quad (4)$$

где  $h'_2(\mathbf{n})$  — опорная функция многогранника  $P_2$  после переноса<sup>14)</sup>.

Так как для  $\mathbf{n}_0$  достигается равенство  $h_1(\mathbf{n}) = h'_2(\mathbf{n})$ , то опорные плоскости с нормалью  $\mathbf{n}_0$  у многогранников  $P_1$  и  $P_2$  теперь совпадают.

Пусть  $G_1, G_2$  — грани многогранников  $P_1, P_2$ , лежащие в этой общей опорной плоскости; заранее не исключено, что они могут быть любого числа измерений от 0 до  $n - 1$ .

По неравенству (4)  $h_1(\mathbf{n}) < h'_2(\mathbf{n})$  при  $\mathbf{n} \neq \mathbf{n}_0$ , т. е. опорные плоскости многогранника  $P_1$  сдвинуты внутрь  $P_2$ <sup>15)</sup>. Отсюда, очевидно, следует, во-первых, что грань  $G_1$  содержится внутри  $G_2$ . Во-вторых, отсюда следует, что грань  $G_2$  должна быть  $(n - 1)$ -мерной: иначе, сдвигая внутрь многогранника  $P_2$  все подходящие к ней опорные плоскости, мы немедленно привели бы ее к исчезновению. А сдвигаются все эти опорные плоскости потому, что  $h_1(\mathbf{n}) < h'_2(\mathbf{n})$  для всех  $\mathbf{n} \neq \mathbf{n}_0$  (и близких  $\mathbf{n}_0$ , поскольку все  $\mathbf{n}$ , для которых верно (4), лежат внутри угла  $W$ ).

Однако условие теоремы состоит в том, что никакая  $(n - 1)$ -мерная грань  $G_2$  не может содержать внутри себя грань  $G_1$ , лежащую в параллельной опорной плоскости. Полученное противоречие показывает, что таких векторов  $\mathbf{n}$ , для которых  $h_1(\mathbf{n}) \neq h_2(\mathbf{n})$ , нет. Поэтому все опорные плоскости многогранников  $P_1$  и  $P_2$  должны совпадать, т. е. совпадают сами многогранники. Тем самым теорема доказана.

<sup>14)</sup> Действительно, как известно из аналитической геометрии и легко убедиться непосредственно, опорное число плоскости с нормалью  $\mathbf{n}$  есть  $h(\mathbf{n}) = \mathbf{n}\mathbf{x}$ , где  $\mathbf{x}$  — вектор из начала координат в любую точку данной плоскости. Поэтому, если плоскость переносится на вектор  $\mathbf{a}$ , то новое опорное число будет  $h'(\mathbf{n}) = \mathbf{n}\mathbf{x} + \mathbf{n}\mathbf{a}$ . Переноса многогранник  $P_2$  параллельно на вектор  $p^{-1}\mathbf{m}$ , получим  $h'_2(\mathbf{n}) = h_2(\mathbf{n}) + p^{-1}\mathbf{n}\mathbf{m}$  и, следовательно,  $h_1(\mathbf{n}) - h'_2(\mathbf{n}) = h_1(\mathbf{n}) - h_2(\mathbf{n}) - p^{-1}\mathbf{n}\mathbf{m} \leq 0$  (в силу неравенства (3)).

<sup>15)</sup> Здесь, конечно,  $\mathbf{n}$  входит в  $W$ . Важно, что  $\mathbf{n}_0$  — внутри  $W$ , и потому наше заключение верно для всех опорных плоскостей, близких к плоскости с нормалью  $\mathbf{n}_0$ .

**3.** Теперь дадим доказательство теоремы 1 для общего случая в трехмерном пространстве. Снова допустим, что существуют два различных бесконечных многогранника  $P_1$  и  $P_2$ , удовлетворяющие условиям теоремы. Тогда их опорные функции не совпадают, и мы рассмотрим те векторы  $\mathbf{n}$ , для которых  $h_1(\mathbf{n}) - h_2(\mathbf{n}) > 0$  (или  $h_1 - h_2 < 0$ , если векторов с  $h_1 - h_2 > 0$  нет). Опять строим геометрическое место  $R$  концов векторов  $\varphi(\mathbf{n})\mathbf{n}$ , где

$$\varphi(\mathbf{n}) = \frac{1}{h_1(\mathbf{n}) - h_2(\mathbf{n})}.$$

Это будет многогранник, что доказывается, как и выше.

Так как  $h_1 - h_2 > 0$  и векторы  $\mathbf{n}$  идут в одно (замкнутое) полупространство, то многогранник  $R$  расположен по одну сторону от плоскости  $T_0$ , проходящей через начало и параллельной плоскости, ограничивающей названное полупространство. Поэтому многогранник  $R$  имеет опорную плоскость  $T$ , параллельную  $T_0$ . Пусть  $H$  — общая часть многогранника  $R$  и плоскости  $T$ .

Рассуждая, как и раньше (формулы (2) – (4)), приходим к тому, что для векторов  $\mathbf{n}$ , близких к векторам, направленным в  $H$

$$h_1(\mathbf{n}) - h'_2(\mathbf{n}) \leq 0, \quad (4')$$

где  $h'_2(\mathbf{n})$  — опорная функция многогранника  $P_2$ , перенесенного соответствующим образом, причем равенство достигается только для векторов, направленных в  $H$ .

Если  $H$  — точка (или хотя бы содержит изолированную точку), то повторяется предыдущее рассуждение, и мы приходим к противоречию.

Допустим поэтому, что  $H$  содержит ребро или грань многогранника  $R$ . Область  $H$  не может простирается на всю плоскость  $T$ , потому что тогда для всех  $\mathbf{n}$  было бы  $h_1(\mathbf{n}) = h'_2(\mathbf{n})$ <sup>16)</sup>, т. е. многогранники  $P_1$  и  $P_2$  совпадали бы, вопреки предположению. Следовательно, область  $H$  имеет границу. Дальнейшее состоит в том, чтобы это также привести к противоречию.

Пусть  $A$  — точка на границе области  $H$  и  $\mathbf{n}_0$  — вектор, направленный в эту точку.

Пусть  $L_1, L_2$  — опорные плоскости многогранников  $P_1, P_2$  с одной и той же нормалью  $\mathbf{n}_0$ . Тогда могут представиться следующие возможности:

<sup>16)</sup> Действительно, если бы было  $H = T$ , то весь многогранник  $R$  сводился бы к плоскости  $T$ , и тогда функция  $\mathbf{n}\varphi(\mathbf{n})$  удовлетворяла бы уравнению плоскости  $\mathbf{a}\mathbf{a}(h_1(\mathbf{n}) - h_2(\mathbf{n}))^{-1} = p$ , где  $\mathbf{a}$  — некоторый вектор, а  $p$  — некоторое постоянное число. Иначе говоря, функция  $h_1(\mathbf{n}) - h_2(\mathbf{n})$ , а следовательно, и  $h_1(\mathbf{n}) - h'_2(\mathbf{n})$  была бы линейной. Но при наличии неравенства  $h_1(\mathbf{n}) - h'_2(\mathbf{n}) \leq 0$  это возможно лишь в том случае, когда  $h_1(\mathbf{n}) = h'_2(\mathbf{n})$ .

а) плоскости  $L_1, L_2$  содержат только вершины  $B_1, B_2$  многогранников  $P_1, P_2$ ;

б) плоскость  $L_1$  содержит ребро  $K_1$  многогранника  $P_1$ , а  $L_2$  — ребро  $K_2$  (или вершину) многогранника  $P_2$ ;

с) плоскость  $L_1$  содержит грань  $G_1$  многогранника  $P_1$ , а  $L_2$  — грань  $G_2$  (или ребро или вершину) многогранника  $P_2$ .

Все другие возможности получаются из  $b$  и  $c$ , если поменять ролями многогранники  $P_1$  и  $P_2$ .

А) В случае  $a$  окрестность точки на многограннике  $R$  будет плоской. (Действительно, если в вершину  $B_1$  идет вектор  $\mathbf{a}_1$ , то в этой вершине  $h_1(\mathbf{n}) = \mathbf{a}_1\mathbf{n}$ . Поэтому  $h_1(\mathbf{n}) - h_2(\mathbf{n}) = (\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2)\mathbf{n} = \mathbf{a}\mathbf{n}$  и  $\mathbf{a}\mathbf{n}\varphi(\mathbf{n}) = 1$ , т. е. концы векторов  $\varphi(\mathbf{n})\mathbf{n}$  лежат в плоскости.)

Так как точка  $A$  лежит на границе области  $H$ , то, следовательно, случай  $a$  исключается.

С) В случае  $c$  замечаем, что неравенство (4) означает, что опорные плоскости многогранника  $P_2$  или совпадают с опорными плоскостями  $P_1$  или сдвинуты внутрь  $P_1$ , а потому грань  $G_2$  содержится в  $G_1$ . Но (так как мы рассматриваем векторы  $\mathbf{n}$ , для которых  $h_1(\mathbf{n}) \neq h_2(\mathbf{n})$ ) по условию теоремы это возможно лишь в том случае, если грани  $G_1$  и  $G_2$  совпадают. Тогда, очевидно, для векторов, близких к  $\mathbf{n}_0$ ,  $h_1(\mathbf{n}) = h'_2(\mathbf{n})$ . А так как  $h'_2(\mathbf{n})$  отличается от  $h_2(\mathbf{n})$  на слагаемое вида  $\mathbf{a}\mathbf{n}$ , соответствующее произведенному переносу многогранника  $P_2$ , то  $h_1(\mathbf{n}) - h_2(\mathbf{n}) = \mathbf{a}\mathbf{n}$ .

Это, так же как в случае А, означает, что окрестность точки  $A$  многогранника  $R$  — плоская, вопреки предположению, что  $A$  лежит на границе области  $H$ .

В) Случай  $b$  возможен лишь тогда, когда ребра  $K_1, K_2$  параллельны либо одно из них есть точка.

Действительно, так как  $h_1(\mathbf{n}_0) - h'_2(\mathbf{n}_0) = 0$ , то ребра  $K_1, K_2$  лежат в общей опорной плоскости. Если они не параллельны, то многогранники  $P_1, P_2$  пересекаются и разность  $h_1(\mathbf{n}) - h_2(\mathbf{n})$ , очевидно, меняет знак для векторов  $\mathbf{n}$ , сколь угодно близких к  $\mathbf{n}_0$ . Поэтому неравенство (4) оказывается невозможным.

Но если ребра  $K_1, K_2$  параллельны (или одно из них есть точка), то они имеют общий пучок опорных плоскостей. Нормали  $\mathbf{n}$  к этим плоскостям лежат в одной плоскости. Соответственно и концы векторов  $\varphi(\mathbf{n})\mathbf{n}$ , идущих в точки многогранника  $R$ , лежат в такой же плоскости  $S$ . Пересечение плоскостей  $S$  и  $T$  есть прямая, и потому на многограннике  $R$  мы имеем ребро  $r$ . Таким образом, точка  $A$  на границе области  $H$  должна лежать внутри ребра  $r$  многогранника  $R$ .

Но  $A$  — любая точка на границе области  $H$ , и потому оказывается, что на этой границе вовсе не может быть вершин. Граница эта состоит из прямых.

Иными словами, ребро  $r$  многогранника  $R$  должно быть бесконечным в обе стороны. Векторы  $\mathbf{n}$ , направленные в его точки, описывают полуокружность. Это означает, что нормали  $\mathbf{n}$  к опорным плоскостям многогранников  $P_1, P_2$ , проходящим через их ребра  $K_1, K_2$ , описывают полуокружность. Но в таком случае многогранники вырождаются в плоские фигуры.

Следовательно, и здесь приходим к противоречию. Тем самым теорема доказана.

В  $n$ -мерном пространстве нужно, пользуясь аналогичными соображениями, рассматривать  $n$  возможностей, аналогичных случаям  $a, b, c$ .

4. В §3 на простом примере было показано, что многомерное обобщение доказанной там теоремы о замкнутых многогранниках невозможно. Поэтому и доказательство, аналогичное только что изложенному, не может быть проведено для указанной теоремы, если только не привлечь каких-то дополнительных соображений, действительных лишь для трехмерного пространства. В изложенном доказательстве было существенно, что векторы  $\mathbf{n}$ , для которых  $h_1(\mathbf{n}) - h_2(\mathbf{n}) > 0$  (или  $< 0$ ), идут в одно полупространство и потому многогранник  $R$  заведомо имел опорную плоскость. В случае же замкнутых многогранников  $P_1, P_2$  векторы  $\mathbf{n}$  с  $h_1(\mathbf{n}) - h_2(\mathbf{n}) > 0$  могут не идти в одно полупространство, и рассуждение отпадает в самом начале.

Тем не менее можно быть уверенным, что доказательство, основанное на рассмотрении разности опорных функций  $h_1(\mathbf{n}) - h_2(\mathbf{n})$ , возможно и для теоремы о замкнутых многогранниках. Эта уверенность основана, между прочим, на том, что именно таким путем доказывается аналогичная теорема для кривых поверхностей. Сама эта теорема формулируется в §6. Осуществление такого доказательства теоремы о замкнутых многогранниках представляет интересную задачу.

Интерес ее состоит в усовершенствовании метода. Общая его идея: по двум данным поверхностям образовать третью, изображающую в некотором смысле их разность, и, установив у этой поверхности существование опорных плоскостей, привести это обстоятельство к противоречию. В этом общем виде метод применяется также в доказательствах теорем о неизгибаемости поверхностей, начиная с первой работы Г. Либмана 1900 г. [311], где была впервые доказана неизгибаемость сферы.

Особой силы этот метод достиг в руках А.В. Погорелова: именно этим методом он доказал свои теоремы о неизгибаемости выпуклых поверхностей, упомянутые в §6 главы III. В этой связи представляло бы также значительный интерес найти доказательство теоремы единственности замкнутого выпуклого многогранника с данной разверткой, аналогичное доказательству, данному А.В. Погореловым для соответствующей теоремы о кривых поверхностях с ограниченной кривизной.



5. Приведем еще одну теорему о конечных многогранниках с границей при условии, что граница многогранника представляет собой одну замкнутую ломаную без кратных точек.

**Теорема 2.** Пусть даны два конечных выпуклых многогранника, ограниченных каждый одной замкнутой ломаной. Пусть они удовлетворяют следующим условиям: 1) каждой грани одного из них соответствует параллельная грань другого, и обратно, причем ни одну из этих граней нельзя поместить внутри другой параллельным переносом, 2) у каждой крайней грани  $Q$  любого из данных многогранников все ее граничные ребра образуют одну ломаную, а на параллельной ей грани  $Q'$  другого многогранника либо вовсе нет граничных ребер, либо все они соответственно параллельны граничным ребрам грани  $Q$ . При этом все граничные ребра грани  $Q$  не больше или, напротив, не меньше параллельных им ребер грани  $Q'$ .

При этих условиях многогранники равны и параллельно расположены.

Здесь, как всегда, параллельными считаются грани с параллельными внешними нормальными, и одна из параллельных друг другу граней может вырождаться в ребро. Вырождение в вершину исключено, так как одну

точку всегда можно поместить внутри грани. Во втором условии под параллельными ребрами понимаются ребра также с параллельными внешними нормальными, но речь идет о нормалях в плоскостях граней  $Q, Q'$ . При этом, как и всюду выше, считается, что если на грани  $Q'$  (или  $Q$ ) нет ребра, параллельного данному

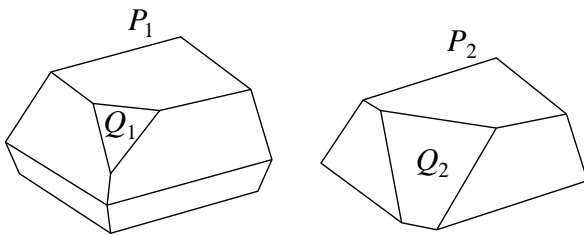


Рис. 130

ребру грани  $Q$  (или  $Q'$ ), то оно есть, но имеет нулевую длину. Во втором условии также допускается, что грань  $Q'$ , параллельная грани  $Q$ , может вырождаться в ребро. На рис. 130 все грани многогранника  $P_2$ , параллельные крайним граням многогранника  $P_1$ , вырождаются в ребра. Грань  $Q_1$  многогранника  $P_1$ , параллельная крайней грани  $Q_2$  многогранника  $P_2$ , не имеет с границей  $P_1$  общих точек. На этом рисунке второе условие теоремы выполнено; не выполнено, очевидно, первое условие.

В простейшем случае крайние грани многогранников соответственно параллельны, не вырождаются и имеют соответственно параллельные граничные ребра. Важно, что на одной грани все эти ребра не больше (или не меньше), чем на другой. В частности, это условие заведомо выполнено, если на каждой крайней грани есть только одно граничное ребро и на параллельных крайних гранях эти ребра параллельны.

**6.** Наметим доказательство сформулированной теоремы, опуская его детали, которые, впрочем, можно восполнить без особого труда.

Пусть  $P_1, P_2$  — многогранники, удовлетворяющие условиям теоремы. Построим их выпуклые оболочки  $\overline{P}_1, \overline{P}_2$ . Это будут телесные выпуклые многогранники и  $P_1, P_2$  будут частями их границ. Построим полусумму  $\overline{P}$  многогранников  $\overline{P}_1$  и  $\overline{P}_2$ :

$$\overline{P} = \frac{1}{2}(\overline{P}_1 + \overline{P}_2).$$

Нас будет занимать не весь многогранник  $\overline{P}$ , а только часть  $P$  его поверхности, составленная гранями, которые являются полусуммами граней или ребер исходных многогранников  $P_1, P_2$ . Можно убедиться, что  $P$  есть выпуклый многогранник, также ограниченный одной замкнутой ломаной. Все его граничные ребра суть полусуммы параллельных граничных ребер (или ребер и вершин) многогранников  $P_1, P_2$ . Грани многогранника  $P$  могут быть тех же трех типов, что в случае теоремы 1 §3:

- 1) полусуммы параллельных настоящих граней многогранников  $P_1$  и  $P_2$ ;
- 2) полусуммы настоящей грани  $Q$  одного из них и ребра другого, причем это ребро лежит в опорной плоскости, параллельной грани  $Q$ ;
- 3) полусуммы непараллельных ребер, лежащих в параллельных опорных плоскостях (например, ребер  $q_1, q_2$  рис. 127, с. 282). Эти грани суть параллелограммы.

Каждое ребро  $p$  многогранника  $P$  есть полусумма параллельных ребер  $p_1$  и  $p_2$  многогранников  $P_1$  и  $P_2$ , причем одно из этих ребер может вырождаться в вершину.

Отнесем каждому ребру  $p$  многогранника  $P$  знак разности  $p_1 - p_2$ ; если же  $p_1 - p_2 = 0$ , то оставим ребро  $p$  неотмеченным. Тогда, используя лемму 3 §1 буквально так же, как в доказательстве теоремы 1 §3, убеждаемся, что если какая-нибудь грань на  $P$  имеет отмеченные ребра, то число перемен их знаков при обходе этой грани не меньше четырех. В частности, вокруг каждой грани третьего типа всегда имеются четыре перемены знака.

Вследствие условия 2 теоремы граничные ребра любой крайней грани  $Q$  многогранника  $P$  образуют одну ломаную. По тому же условию все граничные ребра одной крайней грани многогранника  $P_1$  не больше или не меньше ребер параллельной крайней грани многогранника  $P_2$ . Поэтому в последовательности граничных ребер грани  $Q$  нет перемен знака. Это тем более верно, если  $Q$  есть грань третьего типа: в этом случае она — параллелограмм и имеет только одно граничное ребро.

Возьмем теперь второй экземпляр  $P'$  того же многогранника  $P$ , с той же расстановкой знаков на его ребрах. отождествим его граничные ребра с соответствующими граничными ребрами многогранника  $P$ . После этого

исключим отождествленные граничные ребра, а также их концы, так что пары ребер многогранников  $P$  и  $P'$ , подходивших к их границам, сольются в одно ребро, если только их концы — свободные, т. е. принадлежат лишь одному неограниченному ребру. Полученный таким образом абстрактный многогранник  $P + P'$ , очевидно, гомеоморфен сфере и не имеет вершин, в которых сходилось бы только по два ребра.

У многогранника  $P + P'$  имеются грани двух видов: одни соответствуют граням на  $P$  или  $P'$ , не имевшим граничных ребер; другие образованы каждая из двух экземпляров одной и той же граничной грани многогранника  $P$ : один экземпляр принадлежит  $P$ , другой —  $P'$ ; они слились в одну грань вследствие отождествления и последующего исключения граничных ребер.

Допустим, что на  $P + P'$  есть грань с отмеченными ребрами. Если это — грань первого вида, то вокруг нее имеется не менее четырех перемен знака.

Пусть теперь она будет гранью второго вида; тогда ее можно обозначить  $Q + Q'$ , где  $Q$  и  $Q'$  — образующие ее граничные грани многогранников  $P$  и  $P'$ . При образовании  $Q + Q'$  были исключены граничные ребра грани  $Q$ . Но, как было отмечено, на этих ребрах нет перемен знака, а потому, исключив их, мы исключили самое большее две переменные знака: одну при переходе к этим ребрам, другую — при переходе от них к следующим. Следовательно, в остающейся части контура грани  $Q$  остается не менее двух перемен знака. А так как грань  $Q'$  есть лишь второй экземпляр той же грани  $Q$ , то для нее верно то же самое. В результате при обходе вокруг  $Q + Q'$  мы будем иметь не менее четырех перемен знака.

Таким образом, вокруг каждой грани многогранника  $P + P'$ , имеющей отмеченные ребра, должно быть не менее четырех перемен знака. Но так же как в доказательстве теоремы 1 § 3, переходя к двойственному многограннику, убедимся, что вследствие леммы Коши отмеченных ребер не должно быть вовсе, т. е. все ребра исходных многогранников  $P_1$  и  $P_2$  должны быть соответственно равны. (В частности, граней третьего типа, образованных полусуммой непараллельных ребер, нет вовсе.) Отсюда немедленно следует, что многогранники  $P_1$  и  $P_2$  равны и параллельно расположены, что и требовалось доказать.

Никакие другие теоремы подобного рода для многогранников с границей, кроме теорем 1а, 2, нам не известны.

## § 6. ОБОБЩЕНИЯ

1. Теореме § 3 о замкнутых многогранниках соответствует в случае гладких поверхностей следующая теорема:

*Если две аналитические замкнутые поверхности со всюду положительной кривизной обладают тем свойством, что их индикатрисы Дюпена в любой паре точек с параллельными внешними нормальными нельзя поместить одну внутри другой путем параллельного переноса, то поверхности равны и параллельно расположены.*

Иначе говоря, две аналитические замкнутые поверхности со всюду положительной кривизной либо равны и параллельно расположены, либо содержат такие точки с параллельными нормальными, в которых индикатрисы Дюпена могут быть помещены одна внутри другой параллельным переносом.

Индикатриса Дюпена в точке  $A$  поверхности  $F$  есть, говоря несколько неточно, фигура, получаемая в сечении поверхности  $F$  плоскостью, параллельной и бесконечно близкой к касательной плоскости в точке  $A$ . Сечение многогранника плоскостью, параллельной и бесконечно близкой к плоскости грани, есть, очевидно, сама эта грань. Из этого сопоставления аналогия теоремы о поверхностях с теоремой о многогранниках становится особенно ясной.

Доказательство теоремы исходит из рассмотрения разности опорных функций двух поверхностей и основано, по существу, на простых геометрических соображениях, которые, однако, приводят к результату только благодаря предположению аналитичности поверхностей<sup>17)</sup>. Задача освобождения от этого тяжелого требования представляется важной, но и трудной<sup>18)</sup>. Тем более было бы замечательно сформулировать и доказать такую теорему, которая, будучи верной для любых замкнутых выпуклых поверхностей без каких бы то ни было условий регулярности, содержала бы как частные случаи данную теорему об аналитических поверхностях, и теорему § 3 о многогранниках.

Теореме о поверхностях можно дать несколько более слабую аналитическую формулировку.

Пусть  $f(x, y; \mathbf{n})$  — функция единичного вектора  $\mathbf{n}$  и двух численных переменных, определенная в области  $x \geq y$  и монотонная, т. е. при всяком  $\mathbf{n}$   $f(x_1, y_1; \mathbf{n}) > f(x_2, y_2; \mathbf{n})$ , если  $x_1 > x_2$ ,  $y_1 \geq y_2$  или  $x_1 \geq x_2$ ,  $y_1 > y_2$ . Пусть  $F_1, F_2$  — две регулярные замкнутые выпуклые поверхности и  $R_1 \geq R'_1, R_2 \geq R'_2$  — их главные радиусы кривизны в точках с параллельными внешними нормальными  $\mathbf{n}$ . Если при всяком  $\mathbf{n}$ , т. е. для каждой пары таких точек,  $f(R_1, R'_1; \mathbf{n}) = f(R_2, R'_2; \mathbf{n})$ , то поверхности равны и параллельно расположены<sup>19)</sup>. Иными словами, поверхность определяется заданием  $f(R, R'; \mathbf{n})$  как функции нормали (т. е.  $f = g(\mathbf{n})$ , однозначно с точностью до переноса).

Связь этой формулировки с первоначальной геометрической выясняется из следующего соображения. Если  $f(R_1, R'_1; \mathbf{n}) = f(R_2, R'_2; \mathbf{n})$  и, скажем,  $R_1 > R_2$ , то ввиду монотон-

<sup>17)</sup>См. [11]. В этой работе теорема доказывается в иной формулировке, эквивалентной, однако, данной здесь.

<sup>18)</sup>А. В. Погорелов пытался снять условие аналитичности. Он даже думал, что ему это удалось и опубликовал две заметки [176, 177], ошибочность которых была замечена не сразу. Ничего не зная об этих заметках, И. Мартинес-Мор построил  $C^2$ -гладкий контрпример [318]. Г. Ю. Панина [329], работая со специальными многогранниками и их сглаживаниями, построила  $C^\infty$ -гладкие контрпримеры и нашла ошибку в рассуждениях А. В. Погорелова, пропустившего возможную особенность при исследовании пересечения вспомогательной седловой поверхности с ее касательной плоскостью. Работы Г. Ю. Паниной привели к созданию понятия «виртуального многогранника», объединившего подходы различных авторов к задаче превращения полугруппы выпуклых многогранников со сложением по Минковскому в группу. — Прим. ред.

<sup>19)</sup>Здесь можно рассматривать и не выпуклые поверхности, но такие, что каждая из них есть огибающая семейства плоскостей  $\mathbf{n}x = h(\mathbf{n})$ , где  $h(\mathbf{n})$  есть функция единичного вектора  $\mathbf{n}$ , определенная для всех  $\mathbf{n}$ , однозначная и аналитическая. У такой поверхности нормали  $\mathbf{n}$  к ее касательным плоскостям однозначно покрывают всю сферу. Поэтому, если она — не выпуклая, то имеет ребра возврата. Это не исключается; в соответствующих точках радиусы кривизны существуют, но хотя бы один из них обращается в нуль.

ности функции  $f$  должно быть  $R'_1 < R'_2$ . Но, как известно, главные радиусы кривизны равны квадратам полуосей того эллипса, каким является индикатриса Дюпена. Если же у двух эллипсов разности осей — разных знаков, то эти эллипсы непомещаемы один в другом путем переноса. (Важно, что сравниваются большая ось с большой и малая ось с малой, потому что по условию  $R \geq R'$ .) Обратное заключение, вообще говоря, неверно, и потому геометрическая формулировка — существенно более общая, чем аналитическая.

Данная теорема содержит неограниченное множество частных теорем, получающихся при специальном выборе функции  $f(x, y; \mathbf{n})$ . Первая из таких частных теорем была доказана Э. Б. Кристоффелем в 1865 г. [256]; в ней  $f = x + y$ , т. е. речь идет о равенстве поверхностей с равными суммами главных радиусов кривизны. Следующий результат — теорема Минковского 1899 г., где  $f = xy$ , т. е. речь идет о равенстве поверхностей с равными произведениями главных радиусов кривизны, или, что равносильно, с равными гауссовыми кривизнами. Эта теорема примыкает к теореме Минковского о равенстве многогранников с равновеликими гранями, потому что гауссова кривизна равна отношению бесконечно малых площадок на сферическом изображении и на поверхности, т. е. она определяет зависимость площадей на поверхности от сферического изображения; этим ее задание выполняет ту же роль, какую играет задание площади грани как функции нормали.

Можно назвать еще некоторые более поздние частные результаты, так сказать поглощенные нашей теоремой.

Данная аналитическая формулировка допускает ряд вариантов в зависимости от условий регулярности, налагаемых на функцию  $f$  и поверхности  $F_1, F_2$ .

Если требовать аналитичность поверхностей  $F_1, F_2$ , то функция  $f(x, y; \mathbf{n})$  может быть совершенно произвольной, не считая, конечно, обязательного условия монотонности по  $x, y$ ; например, она может быть даже неизмеримой по  $\mathbf{n}$ .

Если потребовать, чтобы функция  $f$  была трижды непрерывно дифференцируемой и удовлетворяла требованию «существенной» монотонности:  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} > 0$ , то от поверхностей  $F_1, F_2$  достаточно требовать четырехкратной дифференцируемости<sup>20)</sup>.

Я сохраняю убеждение, что функция  $f$  может быть совершенно произвольной, а от поверхностей достаточно требовать двукратной дифференцируемости, лишь бы существовали главные радиусы кривизны. Однако попытки доказать теорему в таком общем виде остались пока безрезультатными<sup>21)</sup>.

Теорема в ее аналитической форме приводит к вопросу о единственности решения дифференциального уравнения в частных производных. В качестве функции, задающей поверхность, берем опорную функцию для единичных векторов  $h(\mathbf{n}) = h(\xi, \eta)$ , т. е. расстояние от начала до касательной плоскости, как функцию нормали  $\mathbf{n}$  или координат  $\xi, \eta$  на единичной сфере. Главные радиусы кривизны выражаются через  $h(\xi, \eta)$  и ее производные до второго порядка (см., например, [245, § 94]). Поэтому задание  $f(R, R'; \mathbf{n})$  как функции нормали, т. е.  $f(R, R'; \mathbf{n}) = h(\mathbf{n})$ , равносильно дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка:

$$\Phi(h_{\xi\xi}, \dots, h; \xi, \eta) = g(\xi, \eta).$$

<sup>20)</sup> Это — наибольшее достигнутое пока ослабление условий, налагаемых на поверхности, установлено А. В. Погореловым; см. его заметку [165]. Результат с более сильными требованиями получен впервые мной в работе [8]. Другое доказательство дано мной в статье [17].

<sup>21)</sup> См. ниже п. 5. — Прим. В. А. Залгаллера.

Речь идет о единственности решения этого уравнения на всей сфере с точностью до слагаемого  $\mathbf{an}$ , соответствующего переносу. Это — уравнение достаточно общего вида, поскольку функция  $f$  подчинена лишь условию существенной монотонности  $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} > 0$ . Из этого условия вытекает, что уравнение будет эллиптического типа (см. [165]).

**2.** Для поверхностей с границей и бесконечных поверхностей можно сформулировать теоремы, вполне аналогичные теоремам 1 и 1а § 5. Так, аналогично теореме 1а имеем:

Пусть  $F_1$  и  $F_2$  — две выпуклые поверхности с общим сферическим изображением, содержащимся внутри полусферы. Пусть у этих поверхностей 1) касательные плоскости в точках границы совпадают, 2) во внутренних точках с параллельными внешними нормальными индикатрисы Дюпена не помещаются одна внутри другой. Тогда поверхности совпадают (с точностью до их частей, лежащих в плоскостях, касательных в точках границы).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1 § 5.

Обозначая  $h_1(\mathbf{n})$ ,  $h_2(\mathbf{n})$  опорные функции поверхностей  $F_1$ ,  $F_2$ , строим для каждого единичного вектора  $\mathbf{n}$  точку, являющуюся концом вектора  $\varphi(\mathbf{n})\mathbf{n}$ , где  $\varphi(\mathbf{n}) = 1/(h_1(\mathbf{n}) - h_2(\mathbf{n}))$ . Геометрическое место  $R$  этих точек с  $\varphi(\mathbf{n}) > 0$  (или  $< 0$ ) должно иметь опорные плоскости. Оно оказывается, однако, поверхностью неположительной кривизны и не может иметь опорных плоскостей, кроме того случая, когда само вырождается в плоскость. А тогда  $h_1(\mathbf{n}) = h_2(\mathbf{n})$ , и поверхности совпадают.

Теорема вместе с намеченным доказательством буквально обобщается на поверхности в  $n$ -мерном пространстве. В отличие от случая замкнутой поверхности предположения регулярности не играют здесь никакой роли.

Распространяется ли данная теорема также на поверхности, сферическое изображение которых содержится в замкнутой полусфере, но не внутри нее, — не известно. Для поверхностей со сферическим изображением, не лежащим в полусфере, она, надо думать, не верна; впрочем, для подтверждения этого нужно найти соответствующий пример.

**3.** Теоремы о замкнутых поверхностях, приведенные в п<sup>о</sup> 1, не удастся обобщить на многомерные пространства. Вызвано ли это недостатком метода или самое обобщение невозможно, — остается неизвестным<sup>22)</sup>. Невозможность обобщения теоремы § 3 о замкнутых многогранниках была уже установлена на примере в § 3. Там же было указано, что тем не менее теорема Минковского о равенстве многогранников с попарно параллельными и равновеликими гранями верна в пространстве любого числа измерений. Никаких других теорем такого рода с другими монотонными функциями  $(n - 1)$ -мерных граней вместо площади не известно<sup>23)</sup>.

<sup>22)</sup> Пример эллипсоида и гиперболы в  $R^4$  с невмещающимися индикатрисами приведен в [136]. Но в [138] показано, что при некотором *более строгом* требовании к невмещаемости индикатрис теорема о равенстве с точностью до параллельного переноса верна в  $R^n$ . — Прим. В. А. Залгаллера.

<sup>23)</sup> Некоторое обобщение теоремы Минковского можно получить, если предполагать заранее, что многогранники  $P$  и  $P'$  имеют одинаковое строение. Однако этот результат не кажется нам интересным. Условие равенства состоит здесь в равенстве смешанных площадей граней многогранников  $P$ ,  $P'$  и данных многогранников  $P_1, \dots, P_m$  того же строения:

$$F_j(\underbrace{P \dots P}_{n-m-1} P_1 \dots P_m) = F_j(\underbrace{P' \dots P'}_{n-m-1} P_1 \dots P_m)$$

(см. § 2 гл. VII). Без предположения об одинаковости строения теорема не верна.

Для замкнутых выпуклых поверхностей  $n$ -мерного пространства можно сформулировать достаточно общую теорему. Для регулярных поверхностей она сводится к утверждению:

*Если у двух замкнутых выпуклых поверхностей в точках с параллельными внешними нормальными данные элементарные симметрические функции главных радиусов кривизны равны, то поверхности равны и параллельно расположены.* (Элементарная симметрическая функция от  $R_1, R_2, \dots, R_{n-1}$  есть коэффициент многочлена с корнями  $R_1, R_2, \dots, R_{n-1}$ .)

Вводя вместо функций радиусов кривизны соответствующие функции множества на сфере, эту теорему можно обобщить на выпуклые поверхности, не подчиненные никаким условиям регулярности. Именно в такой общей форме эта теорема была впервые установлена мной в [5]<sup>24)</sup>.

В частности, интеграл от произведения главных радиусов кривизны поверхности  $\Phi$  по множеству нормалей, т. е. по множеству на единичной сфере, есть площадь соответствующего множества на поверхности. Рассматриваемая как функция множества на сфере, она будет «поверхностной функцией»  $F_\Phi(M)$ . Общее определение этой функции дано в п<sup>о</sup> 2 §7 главы II.

Упомянутая только что теорема содержит утверждение, что произвольные замкнутые выпуклые поверхности с равными поверхностными функциями равны и параллельно расположены.

Это есть прямое обобщение теоремы Минковского о многогранниках на произвольные выпуклые поверхности.

Доказательства упомянутых теорем основаны на так называемой теории смешанных объемов, первоначальное понятие о которой дается в §3 главы VIII.

4. На первый взгляд обобщение теорем этой главы на многогранники в неевклидовом пространстве может показаться вовсе бессмысленным ввиду отсутствия в таком пространстве параллельного переноса. Однако, если понятие параллельности определить в проективных терминах, то задача представится не столь уж нелепой. Именно на проективном языке попарная параллельность граней означает, что плоскости граней попарно пересекаются по прямым, лежащим в одной (бесконечно удаленной) плоскости. Это условие можно уже переносить в сферическое пространство и пространство Лобачевского. Тогда можно поставить, например, такой вопрос. Пусть у двух сферических многогранников грани подчинены соответствующему условию расположения и имеют соответственно равные площади. Имеется ли тогда некоторое простое преобразование, переводящее один многогранник в другой, так же как это осуществляет перенос в евклидовом пространстве? Этот вопрос уже не кажется бессмысленным. Однако может оказаться, что такого простого преобразования не бывает, и тогда вопрос сделается неинтересным.

5.<sup>25)</sup> Метод, указанный в конце п. 1 на с. 302, был развит в серии работ автора [22–28]. Его обоснование в основном содержится в [23]. Пусть  $\Phi(k_1, \dots, k_n, z, x)$  есть  $C^1$ -гладкая функция от  $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n > 0$ ,  $z$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , причем для всех  $i$  везде  $\partial\Phi/\partial k_i > 0$ . Пусть  $S' : z = z'(x)$  и  $S'' : z = z''(x)$  — две выпуклые  $C^2$ -гладкие поверхности, входящие в некоторое (зависящее от задачи) семейство  $\{S\}$  поверхностей, выпуклое по  $z$ . Тогда разность  $\Delta\Phi = \Phi(k'_1, \dots, k'_n, z', x) - \Phi(k''_1, \dots, k''_n, z'', x)$ , где  $k'_i$  и  $k''_i$  — главные кривизны поверхностей  $S'$  и  $S''$  в точках  $(x, z'(x))$  и  $(x, z''(x))$ , представляет собой

<sup>24)</sup>В [6] установлен даже существенно более общий результат.

<sup>25)</sup>Пункты 5–9 добавлены В. А. Залгаллером в качестве примечания.

относительно  $\Delta z = z' - z''$  линейное эллиптическое выражение

$$\Delta\Phi = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\Delta z)_{ij} + \sum_{i=1}^n b_i(\Delta z)_i + c\Delta z.$$

Если значения  $\Phi$  на  $S'$  и  $S''$  в соответствующих по  $x$  точках одинаковы, то  $\Delta z$  служит решением линейного однородного уравнения эллиптического типа. Для таких уравнений А. Д. Александровым [21, 22, 30–40] были получены различные обобщения принципа максимума и теоремы единственности, см. также [290].

Если каким-либо образом удастся с помощью тривиального для данной задачи преобразования (перенос, подобие и т. п.), не меняя  $\Phi$ , привести поверхности  $S'$  и  $S''$  в такое положение, что одна из них коснется другой извне, то после этого  $S'$  и  $S''$  совпадут в силу единственности решения уравнения  $\Delta\Phi = 0$ . Все теоремы единственности в [22–28] в той или иной степени основаны на этом соображении. В частности, в [22, 24] доказана теорема, сформулированная в конце с. 300. Другое доказательство в классе  $C^3$  см. в [173, гл. VII] и [291]. Если функция  $\Phi$  симметрична по  $\mathbf{n}$ , т. е.  $\Phi(R_1, R_2, \mathbf{n}) = \Phi(R_1, R_2, -\mathbf{n})$ , то теорема верна без каких-либо предположений о дифференцируемости  $\Phi$ , см. [137].

**6.** Для выпуклых поверхностей с краем или бесконечных с предписанным поведением на бесконечности все теоремы [22–28] многомерные, причем справедливы не только в евклидовых пространствах [24].

**7.** Для замкнутых выпуклых гиперповерхностей в  $E^{n+1}$  при  $n > 2$  теоремы единственности, аналогичной сформулированной в конце с. 300 для столь произвольных функций  $\Phi$ , нет. Однако, если  $\Phi$  — элементарная симметрическая функция главных радиусов кривизны  $R_1, \dots, R_n$ , то соответствующая теорема единственности верна. Она была доказана А. Д. Александровым [5] в 1937 г., а для  $\Phi = R_1 + \dots + R_n$  (задача Кристоффеля) и  $\Phi = R_1 \cdots R_n$  (задача Минковского) еще в начале века соответственно А. Гурвицем и Г. Минковским.

**8.** Известен классический вопрос «о мыльном пузыре»: обязана ли быть сферой  $C^2$ -гладкая замкнутая гиперповерхность, если у нее во всех точках одинакова средняя кривизна? Наиболее слабые достаточные условия, при которых ответ на этот вопрос положителен, содержатся именно в работах А. Д. Александрова [26, 233]<sup>26)</sup>. В то же время теперь известно, что без каких-либо дополнительных условий ответ на этот вопрос отрицателен. Первый из подобных примеров был построен в 1982 г. [297, 298].

**9.** Развитием теорем единственности служат теоремы устойчивости, дающие оценку близости двух выпуклых гиперповерхностей в  $\mathbb{R}^n$  при близости тех или иных, однозначно определяющих их функций. К работам этого направления относится ранняя работа Ю. А. Волкова [87] по проблеме Минковского. Она соответствует точечному заданию  $(n-1)$ -й функции кривизны  $F_{n-1}$  для регулярных гиперповерхностей. Этот результат, иными средствами, обобщен В. И. Дискантом [98, с. 110] на общий случай, когда  $F_{n-1}$  — «поверхностная функция» является функцией множества на сфере. См. также доказательство в [173, гл. 7]. Устойчивость в проблеме Кристоффеля (это соответствует функции  $F_1$ ) впервые доказана А. В. Погореловым [173, гл. 7]; см. также работы [90, 207]. Устойчивость при задании  $F_{n-2}$  доказана В. И. Дискантом [98, с. 130]. Об устойчивости (только для сферы) при других  $F_k$  см. [98, с. 130]. Подробная литература есть в [98].

К теоремам устойчивости относятся также результаты ярких работ [88, 119].

<sup>26)</sup>Этим занимались многие авторы. Простое доказательство при сильных дополнительных условиях см., например, в [239]. — Прим. В. А. Залгаллера.



---

---

## Глава VII

### Теоремы существования для многогранников с данными направлениями граней

---

---

#### § 1. СУЩЕСТВОВАНИЕ МНОГОГРАННИКА С ДАННЫМИ ПЛОЩАДЯМИ ГРАНЕЙ

1. Мы докажем здесь теорему Минковского.

**Теорема.** Если  $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m$  — некопланарные единичные векторы и  $F_1, \dots, F_m$  — такие положительные числа, что  $\sum_{i=1}^m F_i \mathbf{n}_i = 0$ , то существует замкнутый выпуклый многогранник, у которого  $\mathbf{n}_i$  и  $F_i$  суть внешние нормали и площади его граней. (В силу теоремы 1 § 3 главы VI такой многогранник — единственный с точностью до параллельного переноса.) Здесь и всюду дальше без особых оговорок подразумевается, что все векторы  $\mathbf{n}_i$  различны.

Как уже было отмечено в п° 3 § 2 главы II, условия, наложенные на векторы  $\mathbf{n}_i$  и числа  $F_i$ , очевидно, необходимы для того, чтобы эти векторы и числа могли служить соответственно нормальными и площадями граней замкнутого выпуклого многогранника. В частности, условие  $\sum_{i=1}^m F_i \mathbf{n}_i = 0$  означает равенство нулю векторной площади замкнутого многогранника. Теорема Минковского утверждает вместе с тем достаточность этих условий.

Заметим важное для дальнейшего обстоятельство: из условий, наложенных на  $\mathbf{n}_i$  и  $F_i$ , следует, что векторы  $\mathbf{n}_i$  не направлены в одно полупространство. Иначе вектор  $\sum_{i=1}^m F_i \mathbf{n}_i$  не мог бы равняться нулю, т. к. все  $F_i > 0$ .

В соответствии с этим в теореме Минковского можно заранее потребовать, чтобы векторы  $\mathbf{n}_i$  не были направлены в одно (замкнутое) полупространство, а тогда они не будут также компланарными.

2. Прежде чем приступить к доказательству теоремы Минковского, докажем две леммы.

**Лемма 1.** *Каковы бы ни были некопланарные векторы  $\mathbf{n}_i$ , существует выпуклый многогранник, у которого эти векторы являются нормальными его граней. Если векторы  $\mathbf{n}_i$  не направлены в одно замкнутое полупространство, то всякий такой многогранник — замкнутый, в противном случае он — бесконечный.*

Проведем из некоторой точки лучи  $l_i$  в направлении векторов  $\mathbf{n}_i$  и каждый луч  $l_i$  пересечем плоскостью  $Q_i$ , ему перпендикулярной. Эти плоскости ограничат некоторый телесный многогранник. Однако при произвольном выборе плоскостей  $Q_i$  некоторые из них могут и не касаться многогранника  $P$ . Если же плоскости  $Q_i$  выбрать так, чтобы они касались какого-либо шара с центром в точке  $O$ , то, как очевидно, каждая плоскость  $Q_i$  даст на многограннике  $P_0$  грань, так что такой многогранник, описанный около шара, будет иметь все грани с нормальными  $\mathbf{n}_i$ . Так как векторы  $\mathbf{n}_i$  не компланарны, то этот многогранник не сводится к бесконечной призме.

Если векторы  $\mathbf{n}_i$ , а тем самым и лучи  $l_i$  не направлены в одно замкнутое пространство, то для всякого луча  $l$ , проведенного из точки  $O$ , найдется луч  $l_i$ , образующий с  $l$  острый угол. В таком случае плоскость  $Q_i$  пересекает луч  $l$ . Следовательно, многогранник  $P$ , ограниченный этими плоскостями, не содержит никакого луча и тем самым он — конечный. Если же лучи  $l_i$  направлены в одно полупространство, то луч  $l$ , перпендикулярный к ограниченной плоскости этого полупространства и направленный в противоположное полупространство, образует со всеми  $l_i$  тупые или прямые углы. Поэтому никакая плоскость  $Q$  не может пересечь такой луч  $l$ . Следовательно, многогранник  $P$  содержит луч  $l$  и тем самым этот многогранник — бесконечный.

**Лемма 2.** *У всякого замкнутого выпуклого многогранника, площадь которого не больше данного  $F$ , а площадь каждой грани не меньше данного  $f > 0$ , опорные числа ограничены в зависимости только от  $F$  и  $f$ , если начало взято внутри многогранника.*

Эта лемма может быть доказана разными способами; она, в частности, легко выводится из максимального свойства шара иметь при заданном объеме наименьшую площадь<sup>1)</sup>. Однако, во-первых, указанное свойство шара доказывается сложно и, во-вторых, из него выводится грубая оценка для

<sup>1)</sup> В силу этого свойства шара для всякого выпуклого тела имеет место известное неравенство между площадью  $F$  и объемом  $V$ :

$$36\pi V^2 \leq F^3. \quad (*)$$

Пусть начало лежит внутри данного многогранника  $P$  и пусть  $F_i$  — площадь, а  $h_i$  — опорное число какой-либо грани этого многогранника. Тогда он содержит пирамиду с высотой  $h_i$  и основанием  $F_i$ ; и потому его объем  $V \geq h_i F_i / 3$ . С другой стороны, по

опорных чисел многогранника в зависимости от  $F$  и  $f$ . Поэтому мы получим лемму 2 как следствие теоремы, которая при элементарности доказательства дает точную оценку для опорных чисел (вернее, ширины) многогранника.

**Теорема.** *Назовем шириной многогранника в данном направлении расстояние между его опорными плоскостями, перпендикулярными к этому направлению.*

*Пусть  $F$  — площадь замкнутого выпуклого многогранника  $P$ ,  $F_i$  — площадь какой-либо его грани,  $B_i$  — его ширина в направлении, перпендикулярном к этой грани. Имеет место неравенство*

$$B_i < \frac{F - F_i}{\sqrt{\pi F_i}} \quad (1)$$

(причем это неравенство — точное в том смысле, что существуют многогранники, для которых дробь  $\sqrt{\pi} B_i \sqrt{F_i} / (F - F_i)$  сколь угодно близка к единице).

Пусть  $G_i$  — выбранная грань многогранника  $P_1$ . Пусть  $A$  — точка, в которой его касается опорная плоскость, параллельная, но противоположная  $G_i$ . Построим пирамиду  $P'$  с основанием  $G_i$  и вершиной  $A$  (рис. 131). Ее ширина в направлении, перпендикулярном к грани  $G_i$ , очевидно, — та же самая  $B_i$ , что и у исходного многогранника  $P$ ; грань  $G_i$  у  $P$  и  $P'$  — общая, но вся площадь  $F'$  пирамиды  $P'$  не больше, чем площадь многогранника  $P$ . Поэтому, если мы установим неравенство (1) для пирамиды  $P'$ , то оно тем более будет верно для многогранника  $P$ .

Этим доказано, что неравенство (1) достаточно доказать для пирамиды, причем под  $F_i$  и  $B_i$  нужно понимать соответственно площадь  $S$  ее основания  $G_i$  и высоту  $H$ .

неравенству (\*)  $V \leq F^{3/2} / (6\sqrt{\pi})$ . Поэтому  $h_i \leq F^{3/2} / (2\sqrt{\pi} F_i)$ , так что если  $F_i > f$ , то

$$h_i < \frac{F^{3/2}}{2\sqrt{\pi} f} \quad (**)$$

при любом  $i$ , что и требовалось доказать. Однако из следующей далее теоремы мы получим оценку  $h_i < F / (\sqrt{\pi F_i})$  при любом  $i$  и, следовательно,  $h_i < F / (\sqrt{\pi} f)$  или

$$h_i < \frac{F\sqrt{f}}{\sqrt{\pi} f}. \quad (***)$$

Но  $f < F/4$ , потому что число граней не меньше четырех; поэтому оценка (\*\*\*) точнее, чем (\*\*); если же  $f$  мало в сравнении с  $F$ , что заведомо имеет место, когда число граней велико, то оценка (\*\*\*) будет гораздо более точной, чем (\*\*).

Итак, рассмотрим пирамиду  $P'$ . Пусть  $a_1, \dots, a_n$  — стороны ее основания, а  $p_1, \dots, p_n$  — их расстояния от проекции вершины пирамиды на плоскость основания. Тогда высота  $i$ -й боковой грани равна  $\sqrt{H^2 + p_i^2}$ , а ее

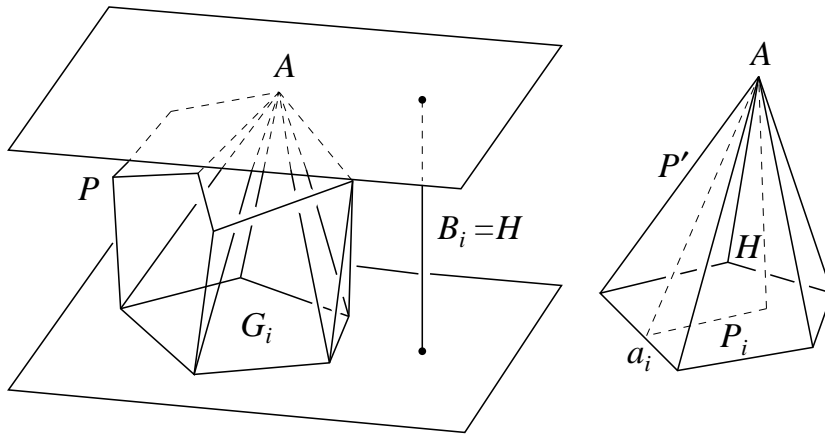


Рис. 131

площадь  $a_i \sqrt{H^2 + p_i^2} / 2$ . Поэтому площадь боковой поверхности пирамиды (полная площадь  $F$  за вычетом основания  $S$ ) будет

$$F - S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i \sqrt{H^2 + p_i^2}, \quad (2)$$

откуда

$$\frac{F - S}{H\sqrt{S}} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \sqrt{H^2 + p_i^2}}{2H\sqrt{S}} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i \sqrt{1 + (p_i/H)^2}}{2\sqrt{S}}. \quad (3)$$

Но, очевидно,  $\sum_{i=1}^n a_i \sqrt{1 + (p_i/H)^2} > \sum_{i=1}^n a_i = L$ , где  $L$  — периметр основания пирамиды. Поэтому (3) дает

$$\frac{F - S}{H\sqrt{S}} > \frac{L}{2\sqrt{S}}. \quad (4)$$

А так как при данном периметре наибольшую площадь имеет круг, для

которого  $L^2 = 4\pi S$ , то всегда <sup>2)</sup>

$$\frac{L}{2\sqrt{S}} > \sqrt{\pi}, \quad (5)$$

и из (4) следует, что

$$\frac{F - S}{H\sqrt{S}} > \sqrt{\pi}. \quad (6)$$

Это и есть требуемое неравенство (1) для  $S = F_i$  и  $H = B_i$ .

Из этого вывода ясно, что в каждом из неравенств (4), (5), (6) можно сколь угодно близко подойти к равенству, стоит лишь взять правильную пирамиду с достаточно большим числом сторон и достаточно большой высотой. Тем самым дополнительное утверждение о точности неравенства (1) также доказано.

Сформулированная выше лемма 2 уже заключается в неравенстве (1). Действительно, если начало лежит в многограннике  $P$ , то опорное число  $h_i$  грани  $G_i$  будет не больше ширины многогранника в направлении, перпендикулярном к грани  $G_i$ , а так как в силу (1)  $B_i < F/\sqrt{\pi F_i}$ , то тем более  $h_i < F/\sqrt{\pi F_i}$ . Если же площади всех граней не меньше  $f$ , то заключаем, что опорные числа всех граней удовлетворяют одному и тому же неравенству

$$h_i < \frac{F}{\sqrt{\pi f}},$$

как то и утверждает лемма 2.

**3.** Теперь докажем теорему Минковского, пользуясь леммой об отображении (глава II, § 2).

Пусть  $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m$  — данные единичные векторы, не направленные в одно замкнутое полупространство. По лемме 1 существуют замкнутые выпуклые многогранники, для которых эти векторы суть нормали к граням. Каждый такой многогранник задается  $m$  своими опорными числами  $h_1, \dots, h_m$ , и потому его можно представить точкой в  $m$ -мерном пространстве  $R^m$  с координатами  $h_1, \dots, h_m$ .

При достаточно малых параллельных перемещениях плоскостей, ограничивающих многогранник, ни одна из его граней, очевидно, не исчезает.

---

<sup>2)</sup> Для получения более грубой оценки можно обойтись и без указанного максимального свойства круга. Многоугольник с периметром  $L$  заведомо можно поместить в квадрате со стороной  $L/2$ , потому что его максимальная ширина не может быть больше половины периметра. Поэтому для его площади имеем:  $S < L^2/4$  или  $L > 2\sqrt{S}$ . Таким образом, этот уже совершенно элементарный вывод дает  $F - S > H\sqrt{S}$ . Аналогично в  $n$ -мерном пространстве получим  $F - S > HS^{\frac{n-2}{n-1}}$ .

Поэтому, если  $h_1^0, \dots, h_m^0$  — опорные числа какого-нибудь данного многогранника, то числа  $h_1, \dots, h_m$ , достаточно близкие к этим  $h_1^0, \dots, h_m^0$ , также будут опорными числами некоторого из рассматриваемых многогранников. Следовательно, совокупность всех рассматриваемых многогранников изображается открытым множеством  $P_0$  в нашем  $m$ -мерном пространстве  $R^m$ .

Однако мы не должны различать многогранники, получающиеся один из другого параллельным перенесением, потому что нормали и площади граней задают многогранник лишь с точностью до переноса. Поэтому мы должны рассматривать не самое множество  $P_0$ , а многообразие  $P$  классов равных и параллельных многогранников. Определим это многообразие.

Если плоскость с нормалью  $\mathbf{n}$  перенести на вектор  $\mathbf{a}$ , то ее расстояние от начала получает слагаемое  $\mathbf{an}$ . Поэтому при переносе многогранника на вектор  $\mathbf{a}$  каждое его опорное число  $h_i$  получает слагаемое  $\mathbf{an}_i$ . Следовательно, класс равных и параллельных многогранников характеризуется тем, что их опорные числа имеют вид  $h_i^0 + \mathbf{xn}_i$ , где  $h_i^0$  ( $i = 1, \dots, m$ ) — опорные числа одного из многогранников этого класса, а  $\mathbf{x}$  — произвольный вектор. Равенства

$$h_i = h_i^0 + \mathbf{xn}_i = h_i^0 + xn_{i_x} + yn_{i_y} + zn_{i_z} \quad (i = 1, \dots, m)$$

при данных  $h_i^0$  определяют в пространстве  $R^m$  трехмерное пространство. Все  $R^m$  может быть разложено на такие трехмерные пространства; все они параллельны между собой и образуют  $(m - 3)$ -мерное многообразие  $R^{m-3}$ . Можно представить себе, что  $R^m$  проектируется в  $R^{m-3}$  вдоль этих трехмерных пространств<sup>3)</sup>. Тогда множество многогранников  $P_0$  проектируется в множество  $P$  классов равных и параллельных многогранников. Так как  $P_0$  открыто, то  $P$  также открыто и, следовательно, представляет собой  $(m - 3)$ -мерное многообразие в смысле принятого нами определения (п<sup>o</sup> 6 §8 главы II). Это многообразие  $P$  мы и будем рассматривать.

Конечно, вместо того, чтобы рассматривать классы многогранников, можно выбирать по многограннику из каждого класса и иметь дело с этими многогранниками.

Рассмотрим теперь множество всех совокупностей положительных чисел  $F_1, \dots, F_m$  таких, что

$$\sum_{i=1}^m F_i \mathbf{n}_i = 0. \quad (7)$$

<sup>3)</sup> Это подобно тому, как трехмерное пространство разлагается на параллельные плоскости, образующие одномерное многообразие. Вдоль этих плоскостей пространство проектируется в прямую.

Это векторное пространство дает три линейных уравнения и потому выделяет в  $m$ -мерном пространстве с координатами  $F_i$   $(m - 3)$ -мерное подпространство. А условие, что все  $F_i > 0$ , выделяет в  $m$ -мерном пространстве положительный координатный угол. Пересечение его с указанным подпространством представляет собой, очевидно, открытое выпуклое  $(m - 3)$ -мерное множество. Это множество и будет многообразием  $\mathbf{F}$  допустимых значений чисел  $F_1, \dots, F_m$ .

Так как существуют многогранники с нормальными  $\mathbf{n}_i$ , а площади их граней положительны и удовлетворяют условию (7), то тем самым многообразие  $\mathbf{F}$  не пусто. А так как  $\mathbf{F}$  есть выпуклое множество, то оно к тому же и связно.

4. Многообразия  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{F}$  имеют одно и то же число измерений. Далее, мы имеем естественное отображение  $\varphi$  многообразия  $\mathbf{P}$  в  $\mathbf{F}$ . Именно каждому многограннику  $P$  (или классу) из  $\mathbf{P}$  ставится в соответствие совокупность площадей его граней  $(F_1, \dots, F_m)$ . Если мы докажем, что  $\varphi$  есть отображение  $\mathbf{P}$  на все  $\mathbf{F}$ , то теорема Минковского будет доказана. А для этого достаточно установить, что  $\varphi$  удовлетворяет всем условиям леммы об отображении (§ 2 главы II). Проверим выполнение этих условий по порядку.

Условие первое требует, чтобы в каждой связной компоненте многообразия  $\mathbf{F}$  были образы точек из  $\mathbf{P}$ . В данном случае  $\mathbf{F}$  связно, т. е. состоит из одной компоненты, и условие выполнено, потому что в  $\mathbf{F}$  содержится образ многообразия  $\mathbf{P}$ .

Второе условие требует взаимной однозначности отображения  $\varphi$ . Но по доказанному в § 3 главы VI замкнутый выпуклый многогранник определяется направлением и площадями своих граней однозначно с точностью до переноса. А это и означает, что соответствие  $\varphi$  между классами равных и параллельных многогранников с данными нормальными  $\mathbf{n}_i$ , с одной стороны, и совокупностями площадей их граней  $(F_1, \dots, F_m)$ , с другой стороны, взаимно однозначно.

Третье условие — непрерывность отображения  $\varphi$  — выполняется очевидным образом: при непрерывном изменении многогранника путем смещения плоскостей его граней площади их меняются непрерывно.

Остается четвертое условие: если точки  $F^k = (F_1^k, \dots, F_m^k)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) из многообразия  $\mathbf{F}$  являются образами точек  $P^k$  из  $\mathbf{P}$  и  $F^k$  сходятся к точке  $F = (F_1, \dots, F_m)$ , то в  $\mathbf{P}$  существует точка  $P$ , которая отображается в  $F$ , и имеется подпоследовательность  $P^{k_i}$  из точек  $P^k$ , сходящаяся к  $P$ . Иными словами: если площади граней  $F_1^k, \dots, F_m^k$  некоторых многогранников  $P^k$  сходятся к некоторым положительным числам  $F_1, \dots, F_m$  <sup>4)</sup>, то

<sup>4)</sup> По условию совокупность  $(F_1, \dots, F_m)$  должна принадлежать  $\mathbf{F}$  и, следовательно, все  $F_i$  должны быть положительны, а равенство  $\sum_{i=1}^m \mathbf{n}_i F_i = 0$  для чисел  $F_i$  следует из того, что этому равенству удовлетворяют числа  $F_i^k$ , сходящиеся к  $F_i$ .

имеется подпоследовательность  $P^{k_i}$  из многогранников  $P^k$ , сходящаяся к многограннику  $P$ , который как раз имеет площади граней  $F_1, \dots, F_m$ .

То, что это условие выполняется, немедленно следует из леммы 2. Действительно, раз числа  $F_i^k$  сходятся к положительным числам  $F_i$ , то все они заключены в некоторых положительных границах. Поэтому площади многогранников  $P^k$ , равные  $\sum_{i=1}^m F_i^k$ , не превосходят некоторого  $F$ , а площади  $F_i^k$  каждой грани не меньше некоторого  $f > 0$ . А в таком случае, перенеся многогранники  $P^k$  так, чтобы начало лежало внутри их всех, получим вследствие леммы 2, что их опорные числа ограничены в совокупности. Так как мы рассматриваем многогранники лишь с точностью до переноса, то указанный выбор их положения вполне возможен. Но когда все опорные числа ограничены, то из них можно выбрать сходящуюся последовательность. Тем самым будут сходить плоскости граней соответствующих многогранников  $P^{k_i}$ , т. е. будут сходить сами многогранники. Предельный многогранник  $P$  будет иметь, очевидно, предельные значения площадей граней  $F_i$ .

Итак, последнее условие леммы об отображении также выполнено, и, применяя эту лемму, мы видим, что каждой допустимой совокупности чисел  $F_1, \dots, F_m$  отвечает многогранник с такими площадями граней; теорема Минковского доказана.

**5.** Заметим, что все наши рассуждения дословно повторяются в пространстве любого числа измерений, если воспользоваться теоремой об определяемости многогранника направлениями и площадями граней в  $n$ -мерном случае. Эта  $n$ -мерная теорема единственности будет доказана в § 3 главы VIII.

## § 2. СУЩЕСТВОВАНИЕ МНОГОГРАННИКА С ДАННЫМИ ПЛОЩАДЯМИ ГРАНЕЙ ПО МИНКОВСКОМУ

**1.** Здесь мы воспроизведем доказательство той же теоремы Минковского о существовании замкнутого выпуклого многогранника с данными направлениями и площадями граней, предложенное самим Минковским. Оно замечательно своей простотой и выгодно отличается от доказательства, данного в предыдущем параграфе, тем, что не опирается на соответствующую теорему единственности. Оно проводится совершенно одинаково в пространстве любого числа измерений. Однако метод Минковского в отличие от нашего метода леммы об отображении приспособлен именно к данной теореме, и применение аналогичной идеи к доказательству других теорем существования представляет совершенно открытую проблему. О ней мы еще скажем несколько слов в заключение этого параграфа.



2. Начнем с некоторых простых замечаний. В начале § 1 было указано, что в теореме Минковского можно заранее требовать, чтобы данные векторы  $\mathbf{n}_i$  не были направлены в одно замкнутое полупространство. Поэтому будем считать, что нам даны попарно различные единичные векторы  $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m$ , удовлетворяющие этому условию.

Проведем из начала координат  $O$  лучи  $l_i$  в направлении данных векторов  $\mathbf{n}_i$  и каждый луч пересечем плоскостью  $Q_i$ , ему перпендикулярной и удаленной от  $O$  на положительное расстояние  $h_i$ . Как показано в лемме 1 § 1, эти плоскости ограничивают некоторый конечный телесный многогранник  $P$ . Поскольку лучи  $l_i$  заданы, многогранник  $P$  полностью определяется расстояниями  $h_i$  плоскостей  $Q_i$  от начала  $O$ . Вообще говоря, при произвольных  $h_i$  не каждая плоскость  $Q_i$  будет касаться многогранника  $P$ , так что он может и не иметь всех граней с нормальными  $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m$ .

Будем рассматривать все многогранники  $P$  независимо от наличия у них всех граней с нормальными  $\mathbf{n}_i$ . Объем многогранника  $P$  есть функция расстояний  $h_i$  ограничивающих его плоскостей от начала  $O$ .

**Лемма.** *Объем  $V$  многогранника  $P$  есть дифференцируемая функция чисел  $h_i$ , причем  $\partial V / \partial h_i = F_i$ , где  $F_i$  — площадь соответствующей грани многогранника  $P$  или нуль, если плоскость  $Q_i$  не дает на многограннике  $P$  никакой грани.*

Пусть плоскость  $Q_i$  дает на многограннике  $P$  грань с площадью  $F_i$ . Сместим эту плоскость параллельно на малое расстояние  $\Delta h_i$ , т. е. дадим числу  $h_i$  приращение  $\Delta h_i$ . Тогда, если  $\Delta h_i > 0$ , то к многограннику прибавится некоторая часть с высотой  $\Delta h_i$ , которая с точностью до малых высшего порядка представляет собой призму с основанием  $F_i$ . Поэтому главная часть приращения объема многогранника будет  $dV = F_i \Delta h_i$ . Аналогично, при  $\Delta h_i < 0$  от многогранника отнимается часть, мало отличающаяся от призмы. Поэтому вообще  $dV = F_i \Delta h_i$  и, следовательно,

$$\frac{\partial V}{\partial h_i} = F_i.$$

Если плоскость  $Q_i$  вовсе не касается многогранника  $P$ , то малое ее смещение не меняет его, а потому в этом случае  $\partial V / \partial h_i = 0$ .

Пусть плоскость  $Q_i$  вовсе не касается многогранника по ребру  $L$ . Тогда при смещении ее от многогранника, т. е. при  $\Delta h_i > 0$ , многогранник не меняется и  $\Delta V = 0$ . Если же плоскость  $Q_i$  смещать внутрь многогранника, т. е. взять  $\Delta h_i < 0$ , то от многогранника отнимется брусок с длиной, равной длине ребра  $L$ , и с поперечным сечением, площадь которого будет, как очевидно, величиной порядка  $(\Delta h_i)^2$  (рис. 132). Поэтому объем бруска, т. е. убыль объема многогранника, будет порядка  $(\Delta h_i)^2$ , так что  $dV = 0$ . Следовательно, независимо от знака  $\Delta h_i$  получаем, что  $\partial V / \partial h_i = 0$ .

Если, наконец, плоскость  $Q_i$  касается многогранника  $P$  в вершине, то опять-таки при  $\Delta h_i > 0$  будет  $dV = 0$ , а при  $\Delta h_i < 0$  от многогранника отнимется пирамида высотой  $|\Delta h_i|$  и объем ее  $|\Delta V|$  будет порядка  $|\Delta h_i|^3$ . Поэтому и в этом случае  $\partial V / \partial h_i = 0$ .

Если плоскость  $Q_i$  не дает на многограннике  $P$  никакой грани, то естественно считать, что такая грань все же есть, но имеет нулевую площадь. При этом условии формула  $\partial V / \partial h_i = F_i$  верна без оговорок.

**3.** Теперь обратимся непосредственно к теореме Минковского. Пусть  $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m$  — данные единичные векторы, не направленные в одно полупространство, и  $F_1^0, \dots, F_m^0$  — данные положительные числа, удовлетворяющие условию

$$\sum_{i=1}^m F_i^0 \mathbf{n}_i = 0. \quad (1)$$

Рассмотрим все многогранники  $P$ , ограниченные плоскостями  $Q_i$ , так же как в п<sup>o</sup> 2. Расстояния  $h_i$  этих плоскостей от начала положительны.

Среди этих многогранников выделим те, которые ограничены плоскостями  $Q_i$  с расстояниями от начала  $h_i$ , подчиненными условию

$$\sum_{i=1}^m h_i F_i^0 = 1. \quad (2)$$

Покажем, что среди этих многогранников есть многогранник наибольшего объема.

Если числа  $h_i$  достаточно малы, то  $\sum_{i=1}^m h_i F_i^0 < 1$ , если же они велики, то, по положительности всех  $F_i^0$ ,  $\sum_{i=1}^m h_i F_i^0 > 1$ . Отсюда ясно, что с непрерывным увеличением чисел  $h_i$ , начиная от малых значений, получим такие числа, что условие (2) будет выполнено. Следовательно, многогранники с условием (2) существуют.

Значения чисел  $h_i$ , удовлетворяющих условию (2), ограничены, потому что все они положительны, а также все  $F_i^0 > 0$ , так что каждое  $h_i^0 < 1/F_i^0$ . Поэтому многогранники  $P$  с условием (2) ограничены в совокупности и для них существует точная верхняя граница объемов. Так как объем зависит от многогранника, т. е. от чисел  $h_i$ , непрерывно, то эта верхняя граница достигается для некоторого многогранника  $P^0$ . Однако этот многогранник

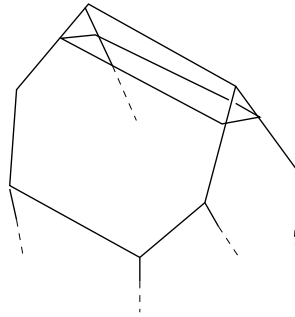


Рис. 132

мог бы иметь не все  $h_i^0 > 0$ , т. е. некоторые  $h_i^0$  могли бы равняться нулю; тогда он не принадлежал бы рассматриваемой совокупности многогранников. Покажем, что все же максимум объема достигается также для многогранников, у которых все  $h_i > 0$ .

Для этого заметим, что если сместить плоскости  $Q_i^0$ , ограничивающие многогранник  $P^0$ , на один и тот же вектор  $\mathbf{a}$ , то многогранник  $P^0$  также сместится на вектор  $\mathbf{a}$  и объем его не изменится. Поэтому, выбрав смещение так, чтобы начало оказалось внутри смещенного многогранника, получим многогранник  $P^1$  с тем же объемом и со всеми  $h_i^1 > 0$ . Покажем, что этот многогранник принадлежит рассматриваемой совокупности, т. е. удовлетворяет условию (2).

Действительно, если плоскость  $Q_i^0$  с нормалью  $\mathbf{n}_i$  перемещается на некоторый вектор  $\mathbf{a}$ , то ее расстояние от начала  $h_i^0$  заменяется на  $h_i^0 + \mathbf{n}_i \mathbf{a}$ . Поэтому после смещения сумма (2) заменится на

$$\sum_{i=1} (h_i^0 + \mathbf{n}_i \mathbf{a}) F_i^0 = \sum_i h_i^0 F_i^0 + \mathbf{a} \sum_i \mathbf{n}_i F_i^0.$$

Но по условию (1), наложенному на числа  $F_i^0$ ,  $\sum_i \mathbf{n}_i F_i^0 = 0$ , а многогранник  $P^0$  удовлетворяет условию (2), так что  $\sum_i h_i^0 F_i^0 = 1$ . Следовательно,

$$\sum_i (h_i^0 + \mathbf{n}_i \mathbf{a}) F_i = 1,$$

т. е. для смещенного многогранника  $P^0$  условие (2) также выполнено.

Итак, мы доказали, что среди многогранников  $P$  с условием (2) и со всеми  $h_i > 0$  существует многогранник наибольшего объема.

Так как по лемме, доказанной в п° 2, объем многогранника  $P$  есть дифференцируемая функция чисел  $h_1, \dots, h_m$ , то речь идет о максимуме дифференцируемой функции  $V(h_1, \dots, h_m)$  при условии (2). А в таком случае, согласно известному правилу Лагранжа, при максимуме должно быть

$$\frac{\partial}{\partial h_i} \left[ V(h_1, \dots, h_m) + \lambda \sum_i F_i^0 h_i \right] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (3)$$

где  $\lambda$  — некоторый численный множитель (см., например, [217, п° 202]).

Если  $F_i^1$  — площади граней многогранника  $P^1$  с наибольшим объемом, то согласно лемме  $\partial V / \partial h_i = F_i^1$  (помня условие о гранях нулевой площади). Поэтому из (3)

$$\mu F_i^1 = F_i^0 \quad (i = 1, \dots, m), \quad (4)$$

где  $\mu = -1/\lambda$ .

Равенства (4) означают, что площади граней многогранника  $P^1$  пропорциональны данным числам  $F_i^0$  и потому все положительны. Если увеличить многогранник  $P^1$  подобно в  $\sqrt{\mu}$  раз, то площади его граней станут равными  $\mu F_i^1 = F_i^0$ . Тем самым в  $\sqrt{\mu}$  раз увеличенный многогранник  $P^1$  имеет данные площади граней  $F_i^0$ , и теорема доказана.

Все это рассуждение верно, конечно, в пространстве любого числа измерений  $n$ , стоит лишь заменить коэффициент подобия  $\sqrt{\mu}$  на  ${}^{n-1}\sqrt{\mu}$ .

4. Идея изложенного доказательства используется во многих доказательствах существования и, например, в применении к дифференциальным уравнениям она была предложена еще Б. Риманом. Пусть требуется доказать существование какого-либо объекта  $A$ , удовлетворяющего данным условиям  $B_0$ . Подбирается такая функция  $f$  объекта  $A$ , необходимые условия экстремума которой приводят чисто формальным путем к тому, что если  $f(A)$  имеет при  $A = A_0$  экстремум, то  $A_0$  удовлетворяет условиям  $B_0$ , или, как в теореме Минковского, — условиям, просто связанным с  $B_0$  (равенства (4)). Тогда задача сводится к доказательству того, что функция  $f(A)$  действительно достигает максимума (минимума) и что к ней приложимы формальные необходимые условия экстремума. В том случае, когда объект  $A$  задается конечным числом параметров, как, например, многогранник, существование максимума (минимума) обеспечивается непрерывностью функции  $f$ , а приложимость условий экстремума — ее дифференцируемостью. Если же объект  $A$  задается бесконечным числом параметров (или функций), как, например, произвольное выпуклое тело, то доказательство обоих этих пунктов оказывается делом гораздо более сложным. Обобщение теоремы Минковского на любые выпуклые тела было доказано мной в [6] на основании этой идеи. Формулировка этого обобщения дается дальше в п<sup>о</sup> 2 §6. В. Бляшке и Г. Герглотц в [246] наметили доказательство теоремы Вейля (см. п<sup>о</sup> 3 §3 главы V), основанное на той же идее экстремума, но осуществить его им не удалось: оба отмеченных нами пункта остались у них недоказанными<sup>5)</sup>.

Остроумие исследователя состоит в том, чтобы для данной области объектов  $A$  и условий  $B$  подобрать соответствующую функцию  $f(A)$ . Интересной, но, по-видимому, трудной задачей представляется найти на этом пути доказательство других теорем существования для выпуклых многогранников, т. е. подобрать для каждой из них соответствующую функцию многогранника  $f(A)$ . Если бы это удалось, то метод максимума оказался бы столь же общим, как и наш метод отображений. Я не могу здесь высказать никаких гипотез по поводу возможного решения поставленной задачи; един-

<sup>5)</sup> Теперь это сделано Ю. А. Волковым [84, 86] с использованием, по существу, элементарных геометрических идей. — Прим. В. А. Залгаллера.

ственным указанием для случая теоремы существования многогранника с данной разверткой может служить работа В. Бляшке и Г. Герглотца. Но в ней идет речь об аналитических поверхностях и аппарате римановой геометрии. Понятия, аналогичные понятиям этой геометрии, вообще пока еще не перенесены на многогранники. Сама по себе задача такого перенесения имеет чрезвычайное значение.

### § 3. СУЩЕСТВОВАНИЕ БЕСКОНЕЧНОГО МНОГОГРАННИКА С ДАННЫМИ ПЛОЩАДЯМИ ГРАНЕЙ

1. В этом и следующем параграфах будут доказаны теоремы существования бесконечного выпуклого многогранника с данными площадями конечных граней и данными плоскостями бесконечных граней. Задание этих последних равносильно заданию того, что выше, в § 4 главы VI было названо бесконечной частью многогранника, т. е. остатка многогранника после исключения всех его конечных граней и произвольно больших кусков его бесконечных граней. Два многогранника имеют одну и ту же бесконечную часть, если их бесконечные грани в достаточно далекой области полностью совпадают, а это, очевидно, будет тогда и только тогда, когда совпадают плоскости этих граней. Условия, при которых заданные плоскости будут плоскостями бесконечных граней какого бы то ни было бесконечного выпуклого многогранника, будут выяснены в § 5 (теорема 4 § 5; они сформулированы также в § 4 главы II). Здесь же будет заранее предполагаться, что данные плоскости дают бесконечную часть какого-нибудь выпуклого многогранника, и мы будем поэтому говорить о существовании многогранника с данными площадями конечных граней и с данной бесконечной частью.

Как было показано еще в § 5 главы I, сферическое изображение бесконечного выпуклого многогранника представляет собой выпуклый сферический многоугольник, причем сферические изображения его бесконечных граней лежат на границе этого многоугольника. Вершины этого многоугольника суть сферические изображения граней с непараллельными бесконечными ребрами. Если все бесконечные ребра многогранника параллельны, то его сферическое изображение представляет собой полусферу.

Из этого замечания следует, что если задана бесконечная часть многогранника, то задана граница его сферического изображения и тем самым задано также само сферическое изображение. Исключение представляет случай, когда граница сферического изображения есть большой круг, потому что он делит сферу на две полусферы, которые обе выпуклы. Однако, если задана бесконечная часть многогранника с параллельными бесконечными ребрами, то определено направление этих ребер в бесконечность, и

сферическое изображение такого многогранника должно совпадать с той полусферой, в которую идет вектор, противоположный направлению бесконечных ребер.

Итак, если задана бесконечная часть многогранника, то задано его сферическое изображение и тем самым определено, внутрь какой части сферы могут направляться нормали его конечных граней. Здесь, как и всюду дальше, имеются в виду *внешние* нормали.

**Лемма.** Пусть  $Q$  — бесконечная часть какого-либо выпуклого многогранника и  $S$  — его сферическое изображение. Пусть  $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m$  — любые попарно различные единичные векторы, направленные внутрь сферического многоугольника  $S$ . Тогда существуют выпуклые многогранники с бесконечной частью  $Q$ , конечные грани которых имеют внешние нормали  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_m$ .

Пусть  $P_0$  — любой бесконечный многогранник с бесконечной частью  $Q$ . Так как векторы  $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m$  идут внутрь его сферического изображения  $S$ , то тем самым он имеет опорные плоскости  $R_1^0, R_2^0, \dots, R_m^0$  с нормальными  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_m$ , причем эти плоскости не касаются  $P_0$  вдоль его бесконечных граней или ребер: иначе  $\mathbf{n}_i$  лежали бы на границе сферического многоугольника  $S$ . Поэтому плоскость  $R_1^0$  можно вдвинуть внутрь многогранника  $P_0$  столь далеко, что она отсечет от него все его конечные грани. В результате получим многогранник  $P_1$  с той же бесконечной частью  $Q$  и с единственной конечной гранью  $G_1$ , имеющей нормаль  $\mathbf{n}_1$ .

Так как  $P_1$  имеет ту же бесконечную часть  $Q$ , то его сферическое изображение есть тоже  $S$  и потому он имеет опорные плоскости  $R_2, \dots, R_m$  с нормальными  $\mathbf{n}_2, \dots, \mathbf{n}_m$ . Вдвигая плоскость  $R_2$  внутрь многогранника  $P_1$  так, чтобы не отсечь полностью его грань  $G_1$ , получим многогранник  $P_2$ , у которого есть еще грань  $G_2$  с нормалью  $\mathbf{n}_2$ . Повторяя эту операцию, придем к многограннику, у которого будут все конечные грани с данными нормальными  $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m$  и никаких других.

**2.** В этом параграфе мы рассмотрим многогранники с параллельными бесконечными ребрами; многогранники с непараллельными бесконечными ребрами будут рассматриваться в следующем параграфе. Результаты, получаемые для тех и других, принципиально различны.

**Теорема.** Пусть задана бесконечная часть выпуклого многогранника с параллельными бесконечными ребрами. Она будет бесконечной в одну сторону призмой  $\Pi$ . Пусть  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, противоположный направлению этих ребер в бесконечность, а  $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m$  — любые различные единичные векторы, образующие с  $\mathbf{n}$  острые углы; тем самым они направлены внутрь той полусферы, ограниченной экватором, перпендикулярным к  $\mathbf{n}$ , в которую направлен  $\mathbf{n}$ . Пусть, наконец,  $F_1, \dots, F_m$  — такие положительные

числа, что

$$\sum_{i=1}^m (\mathbf{n} \mathbf{n}_i) F_i = F, \quad (1)$$

где  $F$  — площадь поперечного сечения призмы  $\Pi$ , перпендикулярного к бесконечным ребрам.

Тогда существует выпуклый многогранник с бесконечной частью  $\Pi$ , конечные грани которого имеют внешние нормали  $\mathbf{n}_i$  и площади  $F_i$  (см. рис. 68, с. 109).

Необходимость условия, наложенного на векторы  $\mathbf{n}_i$ , была только что выяснена.

Необходимость условия (1) для чисел  $F_i$  очевидна: скалярное произведение  $\mathbf{n} \mathbf{n}_i$  есть косинус угла между плоскостью грани с нормалью  $\mathbf{n}_i$  и плоскостью поперечного сечения призмы  $\Pi$ , поэтому равенство (1) выражает тот факт, что площадь  $F$  этого сечения равна сумме площадей проекций конечных граней соответствующего многогранника.

Заметим еще, что, согласно доказанному в § 4 главы VI, многогранник с указанными в теореме данными:  $\Pi$ ,  $\mathbf{n}_i$ ,  $F_i$  — единственный с точностью до переноса вдоль его бесконечных ребер.

Докажем нашу теорему, пользуясь леммой об отображении. Прежде всего рассмотрим все многогранники  $P$  с данной бесконечной частью  $\Pi$  и с данными нормальными  $\mathbf{n}_i$ .

Согласно доказанной выше лемме, такие многогранники существуют. Каждый такой многогранник определяется опорными числами  $h_1, \dots, h_m$  его конечных граней. А так как при малых параллельных смещениях граней ни одна из них не исчезает, то числа  $h_1, \dots, h_m$  допускают произвольные изменения в достаточно малой окрестности их значений, соответствующих любому данному многограннику  $P$ . Следовательно, совокупность всех возможных значений опорных чисел  $h_1, \dots, h_m$ , а вместе с ней и совокупность всех многогранников  $P$ , изобразится открытым множеством  $P_0$  в  $m$ -мерном евклидовом пространстве с координатами  $h_1, \dots, h_m$ .

Однако мы не должны различать многогранники, получающиеся один из другого параллельным переносом вдоль ребер призмы  $\Pi$ , потому что ни одно из данных:  $\Pi$ ,  $\mathbf{n}_i$ ,  $F_i$  при этом не изменяется. Поэтому мы должны рассматривать не само множество  $P_0$ , а многообразие  $P$  классов многогранников, получающихся друг из друга указанными переносами. Так как перенос в данном направлении зависит от одного параметра — величины переноса, то, отождествляя многогранники, совмещаемые таким переносом, мы исключаем одну переменную. Поэтому многообразию  $P$  будет  $(m - 1)$ -мерным. Точное определение этого многообразия повторяет определение

соответствующего многообразия в доказательстве теоремы Минковского в §1<sup>6)</sup>.

Рассмотрим теперь множество всех совокупностей по  $m$  положительных чисел  $F_1, \dots, F_m$ , удовлетворяющих условию теоремы

$$\sum_{i=1}^m (\mathbf{n} \mathbf{n}_i) F_i = F. \quad (1)$$

Это условие — линейное, а потому определяет в  $m$ -мерном пространстве с координатами  $F_1, \dots, F_m$   $(m - 1)$ -мерную плоскость. Условие, что все  $F_i > 0$ , выделяет в  $m$ -мерном пространстве положительный координатный угол. Его пересечение с указанной плоскостью будет, очевидно, выпуклым  $(m - 1)$ -мерным множеством. Оно и есть многообразие  $\mathbf{F}$  допустимых значений чисел  $F_1, \dots, F_m$ . Так как по доказанной выше лемме многогранники с нормальными  $\mathbf{n}_i$  существуют и, как было показано, площади их граней необходимо удовлетворяют условию (1), то тем самым многообразие  $\mathbf{F}$  не пусто. А так как оно есть выпуклое множество, то оно к тому же связно.

Итак, мы имеем многообразия  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{F}$  одного и того же числа измерений  $m - 1$ . Сопоставляя каждому многограннику, точнее, классу многогранников из  $\mathbf{P}$  площади его граней  $F_1, \dots, F_m$ , получаем однозначное отображение  $\varphi$  многообразия  $\mathbf{P}$  в  $\mathbf{F}$ . Остается доказать, что  $\varphi$  удовлетворяет условиям леммы об отображении.

1) Так как  $\mathbf{F}$  связно, то условие, что в *каждой* связной компоненте  $\mathbf{F}$  содержатся образы элементов из  $\mathbf{P}$ , выполняется автоматически.

2) Так как по доказанному в §4 главы VI многогранник с данной бесконечно частью и с данными площадями граней — единственный с точностью до переноса вдоль бесконечных ребер, то каждой совокупности чисел  $(F_1, \dots, F_m)$  из  $\mathbf{F}$  отвечает один класс многогранников из  $\mathbf{P}$ . Таким образом, отображение  $\varphi$  взаимно однозначно.

---

<sup>6)</sup>Если  $\mathbf{a}$  — вектор переноса, то расстояние от начала до плоскости с нормалью  $\mathbf{n}_i$  получает при таком переносе слагаемое  $\mathbf{n}_i \mathbf{a}$ . Поэтому опорные числа  $h_i^0$  заменяются на  $h_i = h_i^0 + \mathbf{n}_i \mathbf{a}$ . Так как перенос возможен лишь в направлении данного вектора  $\mathbf{n}$ , то  $\mathbf{a} = a\mathbf{n}$ . Следовательно,  $h_i = h_i^0 + (\mathbf{n}_i \mathbf{n})a$  ( $i = 1, \dots, m$ ). При данных  $h_i$  и переменном  $a$  эти уравнения определяют в  $n$ -мерном пространстве с координатами  $h_i$  прямую. Так как коэффициенты при  $a$  постоянны, то все эти прямые параллельны. Точки этой прямой, попадающие в область  $\mathbf{P}_0$ , изображают многогранники, получаемые друг из друга переносами вдоль  $\mathbf{n}$ , и потому подлежат отождествлению. Это отождествление сводится, очевидно, к проектированию области  $\mathbf{P}_0$  на  $(m - 1)$ -мерную плоскость вдоль указанных прямых. Проекция открытого множества есть открытое множество. Следовательно, указанное отождествление дает открытое множество  $\mathbf{P}$  на  $(m - 1)$ -мерной плоскости, т. е.  $(m - 1)$ -мерное многообразие.



3) Непрерывность отображения  $\varphi$  очевидна, потому что она сводится к утверждению, что при непрерывном изменении опорных чисел площади граней изменяются непрерывно.

4) Остается четвертое условие: если элементы  $F^i = (F_1^i, \dots, F_m^i)$ , являющиеся образами элементов  $P^i$  из  $\mathbf{P}$ , сходятся к элементу  $F^0 = (F_1^0, \dots, F_m^0)$ , принадлежащему  $\mathbf{F}$ , то из  $\mathbf{P}$  можно выбрать сходящуюся последовательность так, что предел ее будет элементом  $P^0$ , отображающимся в  $F^0$ , т. е. если у многогранников  $P^i$  площади граней  $F_1^i, \dots, F_m^i$  сходятся к положительным пределам, то существует подпоследовательность многогранников  $P^i$ , сходящаяся к многограннику с предельными площадями граней.

Рассмотрим все многогранники  $P$  с бесконечной частью  $\Pi$  и нормальными  $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m$ . Передвинем все эти многогранники вдоль бесконечных ребер так, чтобы они имели общую опорную плоскость  $R$ , перпендикулярную к их бесконечным ребрам. Тогда все они окажутся заключенными в бесконечной в одну сторону призме  $\Pi$ , касаясь ее основания  $G$  на плоскости  $R$ . Покажем, что в таком случае все их опорные числа ограничены в совокупности.

Действительно, поскольку все многогранники  $P$  содержатся в призме  $\Pi$ , плоскости их граней ее пересекают. Вместе с тем, если одна из этих плоскостей  $R_k$  пересекает призму  $\Pi$  очень далеко, то она полностью отсекает от нее основание  $G$  (рис. 133). А в таком случае многогранник с такой плоскостью  $k$ -й грани не может касаться основания  $G$ . Следовательно, ни одна из плоскостей  $R_k$  не может пересекать призму  $\Pi$  очень далеко, а это означает, что расстояния этих плоскостей от начала координат, т. е. опорные числа, ограничены. Но раз опорные числа ограничены, то из любой последовательности многогранников  $P^i$  можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Площади граней этих многогранников сходятся, и предельный многогранник будет иметь как раз предельные площади граней. Это означает, что и последнее условие леммы об отображении выполнено.

Итак, все условия леммы об отображении выполнены, а тогда верен и ее результат: всякая совокупность чисел  $F_1, \dots, F_m$ , входящая в многообразии  $\mathbf{F}$ , отвечает некоторому классу многогранников из многообразия  $\mathbf{P}$ . Тем самым теорема доказана.

**3.** Наметьте еще одно доказательство той же теоремы, опирающееся на существование замкнутого многогранника с данными нормальными и площадями граней.

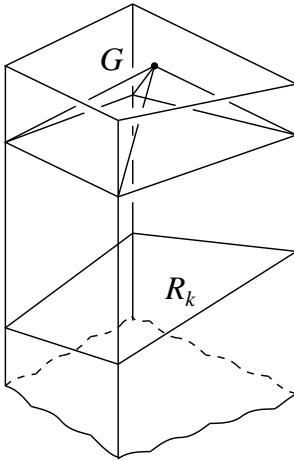


Рис. 133

Пусть, как и раньше (см. рис. 68 на с. 109),  $\Pi$  — бесконечная призма,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор, обратный параллельный ее ребрам,  $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m$  — единичные векторы, образующие с  $\mathbf{n}$  острые углы,  $F$  — площадь поперечного сечения призмы  $\Pi$  и, наконец,  $F_1, \dots, F_m$  — положительные числа, удовлетворяющие условию

$$\sum_{i=1}^m (\mathbf{n} \mathbf{n}_i) F_i = F. \quad (1)$$

Пусть еще  $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \dots, \mathbf{m}_k$  — нормали к граням призмы  $\Pi$ , а  $l_1, \dots, l_k$  — ширина ее граней, т. е. длины сторон ее поперечного сечения. Тогда из замкнутости многоугольника со сторонами  $l_1, \dots, l_k$  следует, что

$$\sum_{j=1}^k \mathbf{m}_j l_j = 0. \quad (2)$$

Легко убедиться в возможности подобрать такие числа  $g_1, \dots, g_k$ , что будет выполнено равенство <sup>7)</sup>

$$\sum_{i=1}^m \mathbf{n}_i F_i + \sum_{j=1}^k \mathbf{m}_j g_j - \mathbf{n} F = 0. \quad (3)$$

Тогда, если положить

$$H_j = g_j + e_j M \quad (j = 1, \dots, k), \quad (4)$$

где  $M$  — любое положительное число, то в силу равенства (2) будем иметь

$$\sum_{i=1}^m \mathbf{n}_i F_i - \sum_{j=1}^k \mathbf{m}_j H_j - \mathbf{n} F = 0. \quad (5)$$

Возьмем  $M$  столь большим, чтобы все  $H_j$  были положительными. Тогда, поскольку все векторы  $\mathbf{n}_i, \mathbf{m}_j, -\mathbf{n}$  не направлены в одно полупространство, существует замкнутый выпуклый многогранник  $P_M$  с нормальными  $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m$ ,

---

<sup>7)</sup>Выбирая оси прямоугольных координат с основными векторами  $\mathbf{n}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ , убеждаемся, что в силу условия (1) нужно удовлетворить только двум равенствам:  $\sum \mathbf{a} \mathbf{n}_i F_i + \sum \mathbf{a} \mathbf{m}_j g_j = 0$  и то же с  $\mathbf{b}$  вместо  $\mathbf{a}$ . Так как число граней призмы  $\Pi$  есть  $k \geq 3$ , то имеем два уравнения с не менее чем тремя неизвестными  $g_1, \dots, g_k$ , так что удовлетворить им всегда возможно.

$\mathbf{m}, \dots, \mathbf{m}_k, -\mathbf{n}$  и площадями граней  $F_1, \dots, F_m, H_1, \dots, H_k, F$ . Так будет при любом достаточно большом  $M > 0$ .

Этот многогранник состоит из «шапочки» с нормальными  $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m$ , «основания» с нормалью  $-\mathbf{n}$  и «боковых» граней с нормальными  $\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_k$ ; эти грани параллельны граням призмы  $\Pi$ . Если  $M$  бесконечно увеличивать, то «боковые» грани многогранника будут увеличиваться, а так как площади других граней заданы, то эти грани могут только бесконечно вытягиваться. Относительные разности их длин будут стремиться к нулю, а потому их площади  $H_i$  будут относиться примерно, как их ширины. Но из (4) следует, что при большом  $M$  отношения площадей  $H_i$  близки к отношениям ширин  $l_i$  граней призмы  $\Pi$ . Следовательно, при  $M \rightarrow \infty$  боковые грани многогранника  $P_M$  сходятся к боковым граням призмы  $\Pi$ . Поэтому, если с увеличением числа  $M$  «основание» многогранника  $P_M$  отодвигать в бесконечность, то в пределе получим бесконечный многогранник  $P_\infty$  с бесконечной частью  $\Pi$  и с данными нормальными  $\mathbf{n}_i$  и площадями  $F_i$  конечных граней.

Намеченное доказательство интересно тем, что оно не зависит от соответствующей теоремы единственности и обобщается в пространство любого числа измерений вместе с обобщением теоремы существования для замкнутого многогранника. Осуществление такого обобщения мы предоставляем читателю, считая теоремы о замкнутом многограннике уже известными.

#### § 4. ОБЩАЯ ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОГО МНОГОГРАННИКА

1. В этом параграфе рассматриваются бесконечные многогранники, у которых имеются непараллельные бесконечные ребра. Для них можно доказать теорему гораздо более общую, чем просто теорема существования многогранника с данными площадями конечных граней и данной бесконечной частью. Именно вместо площади можно рассматривать любую функцию  $f(Q)$  многоугольника, удовлетворяющую следующим условиям:

- 1)  $f(Q)$  определена для всех конечных выпуклых многоугольников, включая предельные случаи отрезка и точки, причем для равных и параллельно расположенных многоугольников она принимает равные значения;
- 2)  $f(Q)$  монотонна, т. е. если  $Q_1$  содержится в  $Q_2$ , то  $f(Q_1) \leq f(Q_2)$ <sup>8)</sup>;
- 3)  $f(Q)$  непрерывна, т. е. если  $Q_n \rightarrow Q$ , то  $f(Q_n) \rightarrow f(Q)$ ;
- 4) если площади многоугольников  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n, \dots$  безгранично возрастают, то и  $f(Q_n) \rightarrow \infty$ .

<sup>8)</sup> Монотонность в этом смысле слабее, чем в том смысле, в каком она понимается в гл. VI: там требовалось, чтобы  $f(Q_1) < f(Q_2)$ , если  $Q_1$  содержится в  $Q_2$  и не совпадает с  $Q_2$ . Например, диаметр многоугольника не будет монотонной функцией в таком более сильном смысле (можно отрезать от многоугольника часть, не уменьшая диаметра), но будет монотонной функцией в смысле сформулированного сейчас условия 2.

Примерами таких функций могут служить площадь, периметр, диаметр (т. е. наибольшее расстояние между точками многоугольника), радиус наименьшего содержащего многоугольник круга и т. д. Последние три из названных функций не обращаются в нуль для многоугольника, выродившегося в отрезок. Периметр, например, равен тогда удвоенной длине отрезка.

В связи с этим условимся, что если у многогранника нет грани с данной нормалью  $\mathbf{n}$ , то будем считать, что она есть, но вырождается в отрезок или точку. Впрочем, вырождение в точку можно исключить, потому что любая функция  $f(Q)$  имеет для всех точек одно и то же значение, которое можно принять равным нулю, стоит лишь вычесть его из функции  $f$ .

Пусть  $Q_0$  — бесконечная часть какого-либо бесконечного многогранника с непараллельными бесконечными ребрами. Продолжая ее грани, мы естественно получим бесконечный выпуклый многогранник, не имеющий конечных граней. Очевидно, задание  $Q_0$  эквивалентно заданию такого многогранника  $Q$ .

Пусть  $R$  — опорная плоскость многогранника  $Q$  с нормалью  $\mathbf{n}$ , упирающаяся в  $Q$  не вдоль бесконечного ребра или грани. Она может касаться многогранника  $Q$  либо в вершине, либо по конечному ребру. Значение функции  $f$  для этой общей части  $RQ$  мы назовем ее значением для многогранника  $Q$ , соответствующим нормали  $\mathbf{n}$ . Если  $f$  — площадь, то это значение заведомо равно нулю, когда  $RQ$  — вершина, а если  $RQ$  — ребро, то  $f(RQ)$  есть удвоенная длина этого ребра.

**Теорема.** Пусть  $Q$  — бесконечный выпуклый многогранник, не имеющий конечных граней. Пусть  $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m$  — векторы, направленные внутрь его сферического изображения. Пусть, далее,  $f_1, \dots, f_m$  — функции многоугольника, удовлетворяющие сформулированным выше условиям. И пусть, наконец,  $a_1, \dots, a_m$  — значения этих функций для многогранника  $Q$ , отвечающие соответственно нормалям  $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m$  (функции  $f_i$  нормалей  $\mathbf{n}_i$ ).

Тогда, каковы бы ни были числа  $b_1, \dots, b_m$ , такие, что  $a_1 < b_1, \dots, a_m < b_m$ , существует выпуклый многогранник, у которого 1) бесконечная часть та же, что у  $Q$ ; 2) конечные грани имеют нормали  $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m$ ; 3) при каждом  $i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) функция  $f_i$  принимает для грани с нормалью  $\mathbf{n}_i$  значение  $b_i$ .

Согласно принятому условию, здесь допускается, что некоторые грани могут вырождаться в ребра<sup>9)</sup>.

<sup>9)</sup>Пример. Пусть все функции  $f_i$  представляют собой периметр. (Тогда по теореме 2 § 4 гл. VI многогранник с данными  $Q, \mathbf{n}_i, f_i(Q_i) = b_i$  — единственный.) Возьмем любой бесконечный многогранник  $P$  и добавим к его нормалям еще нормаль  $\mathbf{n}$  к опорной плоскости, проходящей через одно из его ребер. Считая это ребро гранью, получим многогранник с некоторыми  $Q, \mathbf{n}_i, f(Q_i)$ . По теореме 2 § 4 гл. VI многогранник с такими данными — единственный. Следовательно, другого с такими же данными, но с невырождающейся гранью с нормалью  $\mathbf{n}$  нет.

Теорема эта принадлежит А. В. Погорелову и данное им доказательство ее очень просто. Пусть обозначения  $Q$ ,  $\mathbf{n}_i$ ,  $f_i$ ,  $a_i$  имеют смысл, указанный в формулировке теоремы. Проведем опорные плоскости к многограннику  $Q$  с нормальными  $\mathbf{n}_i$  и вдвинем их внутрь  $Q$ . Тогда получим многогранник, конечные грани которого имеют нормали  $\mathbf{n}_i$  (см. лемму п<sup>о</sup> 1 §3). При малых смещениях указанных плоскостей значения функции  $f_i$  для этих граней будут близки к числам  $a_i$ , как это ясно из определения этих чисел и непрерывности функций  $f_i$ .

Отсюда следует, что, каковы бы ни были числа  $b_i > a_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ), существуют многогранники с той же бесконечной частью  $Q$  и конечными гранями  $Q_i$  с нормальными  $\mathbf{n}_i$ , причем

$$f_i(Q_i) \leq b_i \quad (i = 1, \dots, m). \quad (1)$$

Рассмотрим все многогранники  $P$ , удовлетворяющие этим условиям. Каждый из них определяется опорными числами  $h_i$  его конечных граней. Поэтому совокупность многогранников  $P$  изобразится множеством  $\mathbf{P}$  в  $m$ -мерном пространстве с координатами  $h_1, \dots, h_m$ . Из неравенств (1) и непрерывности функций  $f_i$  следует, что это множество замкнуто. Покажем, что оно также ограничено.

Допустим противное; тогда существует многогранники  $P^n$ , у которых плоскости граней  $Q_i^n$  пересекают многогранник  $Q$  в сколь угодно далеких частях. Но многогранник  $Q$  расширяется в бесконечность, и потому у таких многогранников  $P^n$  площади хотя бы некоторых граней  $Q_i^n$  должны принимать сколь угодно большие значения. А тогда в силу условия 4, наложенного на функции  $f_i$ , будет  $f_i(Q_i^n) \rightarrow \infty$ . Но это противоречит неравенствам (1), и тем самым ограниченность множества  $\mathbf{P}$  доказана.

Поскольку множество  $\mathbf{P}$  замкнуто и ограничено, среди многогранников  $P$  существует многогранник  $P^0$  с минимальными опорными числами, т. е. такой, что ни для какого  $\mathbf{P}$  с условиями (1) не может быть  $h_i \leq h_i^0$  для всех  $i$  и  $h_i < h_i^0$  хотя бы для одного  $i$ <sup>10)</sup>. Иными словами, плоскость ни одной из граней многогранника  $P$  нельзя вдвинуть внутрь него, не нарушая условий (1).

У этого многогранника функции  $f_i$  имеют как раз требуемые значения  $b_i$ . Действительно, допустим, например, что  $f_1(Q_1) < b_1$ . Тогда при малом смещении грани  $Q_1$  это неравенство не нарушится; а если грань  $Q_1$  сдвинуть внутрь многогранника, то грани, смежные с  $Q_1$ , уменьшатся и по монотонности функций  $f_i$  условие (1) для них не нарушится. Следовательно, при малом смещении грани  $Q_1$  внутрь многогранника  $P^0$  мы получим многогранник  $P$  с теми же условиями (1). Это, однако, противоречит определяющему минимальному свойству многогранника  $P^0$ .

<sup>10)</sup> Очевидно, он не обязан быть единственным.

Таким образом, многогранник  $P^0$  с наименьшими опорными числами дает требуемые значения  $f_i(Q_i) = b_i$ , и теорема доказана.

Из доказательства ясно, что оно дословно обобщается на пространство любого числа измерений.

**2.** Рассмотренная теорема не может быть доказана с помощью леммы об отображении, потому что ей не отвечает теорема единственности. В общей теореме единственности, установленной в § 4 главы VI, функции  $f_i$  должны быть строго монотонными (т. е.  $f(Q_1) < f(Q_2)$ , если  $Q_1$  содержится в  $Q_2$ , но не совпадает с  $Q_2$ ), в то время как здесь требуется лишь их обычная монотонность. То, что при этом более слабом условии единственность может не иметь места, показывает следующий тривиальный пример. Определим функцию  $f(Q)$  условиями:  $f(Q) = 1$ , если площадь многоугольника  $Q$  меньше единицы, и  $f(Q)$  равно площади в противном случае. Такая функция удовлетворяет, очевидно, всем требуемым в теореме условиям, но теоремы единственности с такой функцией, т. е. когда все  $f_i$  суть такие  $f$ , нет: у всех многогранников с площадями граней, меньшими единицы, значения функции  $f$  для граней одни и те же:  $f(Q) = 1$ .

Потребуем, чтобы функции  $f_i$ , фигурирующие в теореме, удовлетворяли двум дополнительным условиям:

- а)  $f_i$  строго монотонны;
- б) если  $Q$  — отрезок, то  $f_i(Q) = 0$ .

В силу условия б все числа  $a_i$ , фигурирующие в теореме 1, равны нулю; поэтому приписываемые функциям  $f_i$  значения  $b_i$  подчиняются условию быть положительными и все грани многогранника не вырождаются.

При таких дополнительных условиях наша теорема может быть доказана с помощью леммы об отображении.

Пусть  $P$  — многообразие многогранников с данной бесконечной частью  $Q$  и с нормальными  $n_i$  к конечным граням. Оно изображается открытым множеством в  $m$ -мерном пространстве с координатами  $h_1, \dots, h_m$ , где  $h_i$  — опорные числа конечных граней. (Многогранники с гранями, вырождающимися в ребра, исключаются, и только в силу этого указанное множество оказывается открытым.)

Все совокупности положительных чисел  $b_1, \dots, b_m$  образуют в  $m$ -мерном пространстве с координатами  $b_1, \dots, b_m$  положительный координатный угол, т. е. открытое выпуклое множество. Многообразие  $B$  всех таких совокупностей  $B = (b_1, \dots, b_m)$   $m$ -мерно и вследствие выпуклости связно.

Сопоставим каждому многограннику  $P$  совокупность чисел  $(b_1, \dots, b_m)$  по правилу: число  $b_i$  есть значение функции  $f_i$  для грани с нормалью  $n_i$ . Тогда получим однозначное отображение  $\varphi$  многообразия  $P$  в  $B$ . При этом в силу связности многообразия  $B$  первое условие леммы об отображении выполнено автоматически. Далее, взаимная однозначность отображения  $\varphi$

следует из единственности многогранника с данной бесконечной частью  $Q$ , нормальными  $\mathbf{n}_i$  и значениями функций  $f_i$  (теорема 2 § 4 главы VI). Непрерывность отображения  $\varphi$  очевидна, потому что с непрерывным изменением опорных чисел грани меняются непрерывно, а функции  $f_i$  по условию непрерывны.

Остается последнее условие леммы об отображении. В данном случае оно сводится к следующему. Пусть числа  $b_1^j, \dots, b_m^j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) являются значениями функций  $f_1, \dots, f_m$  для граней многогранников  $P^j$  и сходятся соответственно к положительным числам  $b_1^0, \dots, b_m^0$ . Тогда из последовательности многогранников  $P^j$  можно выбрать сходящуюся подпоследовательность  $P^i$  так, что граням предельного многогранника будут отвечать значения функций  $f_k$ , равные  $b_1^0, \dots, b_m^0$ .

Поскольку числа  $b_1^j, \dots, b_m^j$  сходятся, они ограничены в совокупности. А отсюда, как уже показано в проведенном выше доказательстве теоремы, следует ограниченность опорных чисел многогранников  $P^j$ . Поэтому из многогранников  $P^i$  можно выбрать сходящуюся последовательность. Вследствие непрерывности функций  $f_k$  предельный многогранник будет давать предельные значения этих функций  $f_k = b_k^0$ .

Следовательно, последнее условие леммы об отображении также выполнено, и, применяя эту лемму, получаем доказательство теоремы.

**3.** Первое доказательство нашей теоремы, конечно, лучше: во-первых, оно не требует знания теоремы единственности, а во-вторых, оно не использует ничего, кроме элементарных соображений и основных свойств непрерывных функций. Поэтому сама теорема оказывается почти столь же банальной, как теорема о том, что непрерывная функция принимает все промежуточные значения.

Таким образом, в этом пункте бесконечные многогранники с непараллельными бесконечными ребрами существенно отличаются от многогранников замкнутых и бесконечных с параллельными бесконечными ребрами. Для этих последних мы получили гораздо более частные теоремы, в которых функции  $f_i$  означают площадь, в то время как доказательства этих теорем принципиально сложнее. Такая резкая разница имеет достаточно ясную причину.

В случае бесконечных многогранников с непараллельными бесконечными ребрами единственное условие, налагаемое на предписываемые значения площади, — это условие положительности. В двух же других случаях имеются еще дополнительные условия; так, в случае замкнутого многогранника — условие замкнутости

$$\sum_{i=1}^m F_i \mathbf{n}_i = 0. \quad (2)$$

В силу этого условия число произвольно задаваемых чисел  $F_i$  оказывается не  $m$ , а  $m - 3$ . Так оно и должно быть, потому что многогранник с  $m$  гранями, рассматриваемый с точностью до параллельного переноса, задается  $m - 3$  параметрами!

Следовательно, замкнутому многограннику можно приписывать сколь угодно произвольно значения какой-либо функции  $f$  лишь для  $m - 3$  граней. Для трех остальных граней значения функций  $f$  должны определяться через эти  $m - 3$ . Но, например, беря за  $f$  периметр, мы не видим никакого условия, которое подобно (2), позволило бы по периметрам некоторых  $m - 3$  граней найти периметры трех других.

В невозможности найти такие условия и заключается причина того, что теорема о замкнутых многогранниках не может быть соответствующим образом обобщена. Конечно, можно было бы наличие такого условия потребовать в формулировке обобщенной теоремы, и тогда она доказывалась бы буквально так же, как доказана в § 1 теорема существования многогранника с данными площадями граней. Но мы не можем дать ни одного конкретного примера функции многоугольника, которая, не будучи функцией только площади, обладала бы требуемым свойством, т. е. чтобы был указан способ по ее значениям для всех граней, кроме трех, вычислить ее значения также и для этих трех граней. А без этого примера общая теорема оказывается как бы пустой, хотя мы можем и сформулировать, и доказать ее.

Совершенно аналогичные замечания можно сделать по поводу обобщения теоремы о бесконечных многогранниках с параллельными бесконечными ребрами.

Все изложенное, естественно, приводит к задаче: найти примеры функций многоугольника, не являющихся функциями одной площади, для которых можно было бы явно определить  $(m - 3)$ -мерное многообразие допустимых значений в случае замкнутого многогранника с  $m$  гранями и  $(m - 1)$ -мерное — в случае бесконечного многогранника с параллельными бесконечными ребрами и  $m$  конечными гранями.

Признаться, мы не видим никакого подхода к решению этой задачи. А может быть, только функции площади допускают явное аналитическое определение указанных многообразий, если еще наложить на это определение какие-нибудь естественные простые условия?

### § 5. СУЩЕСТВОВАНИЕ ВЫПУКЛОГО МНОГОГРАННИКА С ДАННЫМИ ОПОРНЫМИ ЧИСЛАМИ

1. Если в пространстве выбрано начало координат, то положение любой плоскости определяется единичным вектором  $\mathbf{n}$  ее нормали и опорным числом  $h$ . Уравнение такой плоскости  $Q$  будет  $\mathbf{nx} = h$ , где  $\mathbf{x}$  — вектор из начала в переменную точку плоскости.



Ограниченное плоскостью полупространство, для которого  $\mathbf{n}$  служит внешней нормалью, задается неравенством  $\mathbf{n}\mathbf{x} \leq h$ , т. е. оно есть геометрическое место концов векторов  $\mathbf{x}$ , отложенных от начала и удовлетворяющих этому неравенству. Мы будем говорить, что полупространство ограничено плоскостью  $Q$ , всегда имея в виду именно то полупространство, для которого  $\mathbf{n}$  является внешней нормалью.

Всякий выпуклый многогранник есть общая часть полупространств, ограниченных плоскостями его граней (теорема 2 § 2 главы I). Здесь, как и всюду в этом параграфе, под выпуклым многогранником подразумевается телесный выпуклый многогранник, не исключая заранее, что он может быть бесконечной в обе стороны призмой (к призмам присоединяются также двугранные углы, слои между парами параллельных плоскостей и просто полупространства).

Главной целью данного параграфа является выяснение условий, при которых общая часть полупространств, ограниченных наперед заданными плоскостями  $Q_i$ , оказывается выпуклым многогранником, для которого плоскости  $Q_i$  будут плоскостями его граней. Иными словами, речь идет об условиях, которые нужно наложить на внешние нормали  $\mathbf{n}_i$  и опорные числа  $h_i$ , для того чтобы они были внешними нормальями и опорными числами граней некоторого выпуклого многогранника.

Никаких условий на сами нормали  $\mathbf{n}_i$  не нужно накладывать, так как, согласно лемме 1 § 1, при любых  $\mathbf{n}_i$  существует выпуклый многогранник с заданными внешними нормальями  $\mathbf{n}_i$ . Если векторы  $\mathbf{n}_i$  компланарны, то этот многогранник будет, очевидно, бесконечной в обе стороны призмой. Если они идут в одно полупространство, то многогранник — бесконечный, в противном случае он — конечный. Таким образом, речь должна идти об условиях, налагаемых на опорные числа  $h_i$  при заданных внешних нормалях  $\mathbf{n}_i$ .

Наперед заданные полупространства могут вовсе не иметь общей части. Если же они имеют общую часть, содержащую внутренние точки, то она есть выпуклый многогранник (теорема 4 § 2 главы I). Но в этом случае может еще оказаться, что не все плоскости, ограничивающие данное полупространства, будут плоскостями граней этого многогранника: некоторые из них могут вовсе его не касаться или касаться лишь по ребру или в вершине.

В связи с этим наша задача разделяется на две:

- 1) найти условия, при которых данные полупространства имеют общую часть  $P$  с внутренними точками;
- 2) найти условия, при которых все плоскости, ограничивающие эти полупространства, будут плоскостями граней многогранника  $P$ .

Ответ дается следующими далее двумя теоремами. В этих теоремах речь идет о разложении любого из векторов нормалей  $\mathbf{n}_k$  по некоторым другим из них:

$$\mathbf{n}_k = \sum_i \nu_{ki} \mathbf{n}_i. \quad (1)$$

При этом рассматриваются только такие разложения, в которых 1) векторы  $\mathbf{n}_i$  линейно независимы и 2) коэффициенты  $\nu_{ki}$  либо все положительны, либо все отрицательны.

(Разложение вектора по линейно независимым возможно единственным образом. А так как число всех задаваемых векторов  $\mathbf{n}_j$  конечно, то и число подлежащих рассмотрению разложений также конечно. В пространстве максимум три вектора могут быть линейно независимыми. Поэтому речь идет о разложении максимум по трем векторам. Так как число разложений (1), принимаемых во внимание в следующих далее теоремах 1 и 2, конечно, то и число условий, в них фигурирующих, всегда конечно, так что они всегда доступны действительной проверке.)

**Теорема 1.** *Для того чтобы общая часть данных полупространств  $\mathbf{n}_i \mathbf{x} \leq h_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) имела внутренние точки, необходимо и достаточно выполнение следующего условия: для всякой нормали  $\mathbf{n}_k$ , допускающей разложение (1) по другим линейно независимым нормалям  $\mathbf{n}_i$  с отрицательными коэффициентами  $\nu_{ki} < 0$ , соответствующие опорные числа должны удовлетворять неравенству*

$$h_k > \sum_i \nu_{ki} h_i. \quad (2)$$

(Если ни один из векторов  $\mathbf{n}_k$  не допускает разложения по другим с отрицательными коэффициентами, то условие становится беспредметным, т. е. оно автоматически выполняется. Тогда полупространства на верное имеют общие внутренние точки. Это, как легко видеть, будет заведомо в том случае, если все векторы  $\mathbf{n}_i$  направлены внутрь одного полупространства. Вместе с тем можно убедиться, что если они не идут внутрь одного полупространства, то всегда найдется среди них вектор, допускающий разложение по другим с отрицательными коэффициентами. В крайнем случае возможно «разложение» по одному вектору, т. е.  $\mathbf{n}_k = -\mathbf{n}_j$ .)

**Теорема 2.** *Если общая часть полупространств  $\mathbf{n}_i \mathbf{x} \leq h_i$ , ограниченных плоскостями  $Q_i$ , имеет внутренние точки и тем самым представляет собой некоторый выпуклый многогранник  $P$ , то для того, чтобы все плоскости  $Q_i$  были плоскостями граней этого многогранника, необходимо и достаточно выполнение следующего условия: для всякой нормали  $\mathbf{n}_k$ , допускающей разложение (1) по другим линейно независимым нормалям  $\mathbf{n}_i$  с положитель-*

ными коэффициентами  $\nu_{ki} > 0$ , соответствующие опорные числа должны удовлетворять неравенству

$$h_k < \sum_i \nu_{ki} h_i^{11}). \quad (3)$$

В теоремах 1 и 2 непосредственно содержится ответ на основной вопрос о существовании многогранника с данными опорными числами.

**Теорема 3.** *Для того чтобы данные единичные векторы  $\mathbf{n}_j$  и данные числа  $h_j$  были соответственно внешними нормальными и опорными числами граней некоторого выпуклого многогранника, необходимо и достаточно выполнение условий обеих теорем 1 и 2.*

Для того чтобы лучше уяснить условия теорем 1 и 2, докажем сразу их необходимость.

**2. Теорема 1а.** *Если общая часть полупространства  $\mathbf{n}_i \mathbf{x} \leq h_i$  имеет внутренние точки, то для любого вектора  $\mathbf{n}_k$ , допускающего разложение (1) по другим с отрицательными коэффициентами, соответствующие опорные числа удовлетворяют неравенству (2).*

(Это утверждение содержит даже больше, чем просто необходимость условий теоремы 1, потому что в нем мы не ограничиваемся разложением по линейно независимым векторам  $\mathbf{n}_i$ , но допускаем любые разложения с отрицательными коэффициентами.)

**Доказательство.** Пусть  $\mathbf{a}$  — вектор, идущий из начала координат в одну из внутренних точек общей части данных полупространств. Так как эта точка лежит внутри всех этих полупространств, то при всех  $i$

$$\mathbf{n}_i \mathbf{a} < h_i. \quad (4)$$

Пусть вектор  $\mathbf{n}_k$  может быть разложен по другим с отрицательными коэффициентами:

$$\mathbf{n}_k = \sum_{i \neq k} \nu_{ki} \mathbf{n}_i \quad (\nu_{ki} < 0). \quad (5)$$

Умножая неравенство (4) на соответствующие  $\nu_{ki}$  и помня, что при умножении на отрицательное число неравенство обращается, получим после сложения

$$\sum_i \nu_{ki} \mathbf{n}_i \mathbf{a} > \sum_i \nu_{ki} h_i,$$

<sup>11)</sup> В теореме 1 можно считать, что среди векторов  $\mathbf{n}_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) имеются одинаковые (плоскости с параллельными нормальными). В теореме 2 это исключается. Если, например,  $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2$ , то это равенство можно рассматривать как разложение  $\mathbf{n}_1$  по  $\mathbf{n}_2$ , и тогда, согласно (3), должно быть также  $h_2 < h_1$ . Получается противоречие.

или в силу равенства (5)

$$\mathbf{n}_k \mathbf{a} > \sum_i \nu_{ki} h_i. \quad (6)$$

Но при  $i = k$  неравенство (4) дает  $\mathbf{n}_k \mathbf{a} < h_k$ . Поэтому из (6) следует

$$h_k > \sum_i \nu_{ki} h_i,$$

что и требовалось доказать.

**Теорема 2а.** Если плоскости  $Q_i$  с нормальными векторами  $\mathbf{n}_i$  и опорными числами  $h_i$  являются плоскостями граней выпуклого многогранника, то для всякого разложения одного из векторов  $\mathbf{n}_k$  по другим с положительными коэффициентами  $\nu_{ki}$  соответствующие опорные числа удовлетворяют неравенству (3), т. е.  $h_k < \sum_i \nu_{ki} h_i$ .

(Эта теорема, аналогично теореме 1а, также содержит несколько больше, чем просто необходимость условия теоремы 2: здесь нет ограничения разложениями по не более чем трем векторам  $\mathbf{n}_i$ .)

**Доказательство.** Пусть вектор  $\mathbf{a}$  идет из начала во внутреннюю точку  $k$ -й грани данного многогранника  $P$ . Конец его лежит поэтому на плоскости  $Q_k$ , так что

$$\mathbf{n}_k \mathbf{a} = h_k. \quad (7)$$

Вместе с тем, поскольку конец вектора  $\mathbf{a}$  лежит внутри грани, он не лежит ни на одной из других плоскостей  $Q_i$ , т. е. оказывается внутри ограниченных ими полупространств. Поэтому

$$\mathbf{n}_i \mathbf{a} < h_i \quad \text{при всех } i \neq k. \quad (8)$$

Пусть вектор  $\mathbf{n}_k$  разлагается по некоторым другим с положительными коэффициентами:

$$\mathbf{n}_k = \sum_{i \neq k} \nu_{ki} \mathbf{n}_i \quad (\nu_{ki} > 0). \quad (9)$$

Умножая соответствующие неравенства (8) на коэффициенты  $\nu_{ki}$  и складывая, получим

$$\sum_i \nu_{ki} \mathbf{n}_i \mathbf{a} < \sum_i \nu_{ki} h_i$$

или в силу (9)

$$\mathbf{n}_k \mathbf{a} < \sum_i \nu_{ki} h_i. \quad (10)$$

Но в силу равенства (7)  $\mathbf{n}_k \mathbf{a} = h_k$ , так что (10) дает

$$h_k < \sum_i \nu_{ki} h_i,$$

что и требовалось доказать.

**3.** Для доказательства достаточности условий теорем 1 и 2 нам понадобятся две леммы.

**Лемма 1.** *Если выпуклый многогранник  $P$  лежит в полупространстве  $\mathbf{n}\mathbf{x} \leq h$ , то он имеет опорную плоскость с внешней нормалью  $\mathbf{n}$ .*

Если многогранник  $P$  — конечный, то утверждение тривиально, так как конечный многогранник имеет опорные плоскости любого направления. Если многогранник  $P$  — бесконечный, то рассуждаем следующим образом.

Бесконечные ребра многогранника  $P$  лежат в полупространстве  $\mathbf{n}\mathbf{x} \leq h$ , а потому каждое из них либо удаляется от ограничивающей это полупространство плоскости  $Q$ , либо в крайнем случае параллельно ей. Поэтому и каждая бесконечная грань многогранника  $P$  либо удаляется от плоскости  $Q$ , либо ей параллельна. Так как прямая или плоскость, параллельная данной плоскости  $Q$ , проходит от  $Q$  на постоянном расстоянии, то отсюда очевидно, что в конечной части многогранника  $P$  найдется точка  $A$ , ближайшая к плоскости  $Q$ . Надвигая  $Q$  на эту точку, получим опорную плоскость многогранника  $P$  с внешней нормалью  $\mathbf{n}$ .

**Лемма 2.** *Если выпуклый многогранник  $P$  лежит в полупространстве  $\mathbf{n}\mathbf{x} \leq h_0$ , то можно указать три или меньше линейно независимых нормалей  $\mathbf{n}_j$  к его граням так, что имеют место: 1) разложение  $\mathbf{n} = \sum_j \nu_j \mathbf{n}_j$  со всеми  $\nu_j > 0$  и 2) неравенство  $h_0 \geq \sum_j \nu_j h_j$ , где  $h_j$  — опорные числа граней с нормалью  $\mathbf{n}_j$ . (В частности, если плоскость  $\mathbf{n}\mathbf{x} = h_0$  — опорная к  $P$ , то заведомо имеет место равенство  $h_0 = \sum_j \nu_j h_j$ .)*

Пусть выпуклый многогранник  $P$  лежит в полупространстве  $\mathbf{n}\mathbf{x} \leq h_0$ . Тогда в силу леммы 1  $P$  имеет опорную плоскость  $Q$  с внешней нормалью  $\mathbf{n}$ . Пусть уравнение плоскости  $Q$  будет  $\mathbf{n}\mathbf{x} = h$ , так что  $\mathbf{n}\mathbf{x} \leq h$  будет полупространством, ограниченным этой плоскостью. Так как нормаль  $\mathbf{n}$  — внешняя, то это полупространство содержит многогранник  $P$ . Вместе с тем  $P$  содержится в полупространстве  $\mathbf{n}\mathbf{x} \leq h_0$ , а потому это последнее содержит также и полупространство  $\mathbf{n}\mathbf{x} \leq h$ . Отсюда следует, что

$$h \leq h_0. \quad (11)$$

Если плоскость  $Q$  касается многогранника  $P$  по грани и  $\mathbf{n}_j$  — нормаль к этой грани, то, очевидно,  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_j$  и  $h = h_j$ , т. е. в силу (11)  $h_0 \geq h_j$ .

Соотношения  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_j$  и  $h_0 \geq h_j$  показывают, что в этом случае утверждение леммы выполняется; только число нормалей  $\mathbf{n}_j$ , по которым разлагается  $\mathbf{n}$ , сводится здесь к единице.

Рассмотрим общий случай. Пусть плоскость  $Q$  касается многогранника в какой-то точке  $A$ , в вершине, на ребре или на грани — безразлично. Пусть  $W$  — телесный угол, заполняемый лучами, идущими из  $A$  по внешним нормальям к опорным плоскостям в точке  $A$ . Как было указано еще в § 5 главы I,  $W$  есть выпуклый многогранный угол с ребрами, идущими по нормальям к граням, сходящимся в точке  $A$ . Если точка  $A$  лежит внутри ребра, то  $W$  сводится к плоскому углу, а если  $A$  — внутри грани, то  $W$  сводится к одному лучу. Нормаль  $\mathbf{n}$  опорной плоскости  $Q$  идет в угле  $W$ . Если этот угол — действительно телесный, то, разбивая его на трехгранные углы диагональными плоскостями, убеждаемся, что  $\mathbf{n}$  идет в каком-то трехгранном угле с ребрами по нормальям  $\mathbf{n}_{j_1}, \mathbf{n}_{j_2}, \mathbf{n}_{j_3}$  к граням многогранника.

Вектор же, идущий таким образом, очевидно, разлагается по векторам  $\mathbf{n}_{j_1}, \mathbf{n}_{j_2}, \mathbf{n}_{j_3}$  с неотрицательными коэффициентами:

$$\mathbf{n} = \nu_{j_1} \mathbf{n}_{j_1} + \nu_{j_2} \mathbf{n}_{j_2} + \nu_{j_3} \mathbf{n}_{j_3} \quad (\nu_{j_1}, \nu_{j_2}, \nu_{j_3} \geq 0). \quad (12)$$

Если же  $W$  вырождается в плоский угол или луч, то такое же разложение получаем по двум или одному вектору. Допуская значения коэффициентов  $\nu_{j_i}$ , равные нулю, эти случаи можно включить в формулу (12).

Итак, требуемое теоремой разложение вектора  $\mathbf{n}$  найдено и остается только доказать неравенство

$$h_0 \geq \nu_{j_1} h_{j_1} + \nu_{j_2} h_{j_2} + \nu_{j_3} h_{j_3}. \quad (13)$$

Пусть  $\mathbf{a}$  — вектор, проведенный из начала в точку  $A$ , в которой плоскость  $Q$  касается многогранника  $P$ . Эта точка лежит на плоскостях сходящихся в ней граней и на плоскости  $Q$ ; поэтому  $\mathbf{a}$  удовлетворяет уравнениям этих плоскостей

$$\mathbf{n}_{j_1} \mathbf{a} = h_{j_1}, \quad \mathbf{n}_{j_2} \mathbf{a} = h_{j_2}, \quad \mathbf{n}_{j_3} \mathbf{a} = h_{j_3} \quad \text{и} \quad \mathbf{n} \mathbf{a} = h. \quad (14)$$

Умножая первые три уравнения на соответствующие  $\nu_{j_p}$  и складывая, получим вследствие равенства (12)

$$\sum_p h_{j_p} \nu_{j_p} = \mathbf{a} \sum_p \nu_{j_p} \mathbf{n}_{j_p} = \mathbf{a} \mathbf{n} = h. \quad (15)$$

А так как  $h \leq h_0$ , то отсюда следует неравенство (13), и лемма доказана. (Последнее утверждение леммы, сделанное в скобках, содержится в формуле (15), потому что, если плоскость  $\mathbf{n} \mathbf{x} = h_0$  — опорная, то она и есть  $Q$ , т. е.  $h = h_0$ .)

4. Теперь покажем, что лемма 2 уже содержит достаточность условий теоремы 2, т. е. докажем следующее предложение:

**Теорема 2б.** Если многогранник  $P$  есть пересечение полупространств  $\mathbf{n}_i \mathbf{x} \leq h$  ( $i = 1, \dots, m$ ), то при условиях теоремы 2 (т. е. если при  $\mathbf{n}_k = \sum_i \nu_{ki} \mathbf{n}_i$ , где  $\mathbf{n}_i$  линейно независимы и все  $\nu_{ki} > 0$ , будет  $h_k < \sum_i \nu_{ki} h_i$ ) каждая плоскость  $\mathbf{n}_i \mathbf{x} = h_i$  дает на  $P$  целую грань.

Допустим, что многогранник  $P$  не имеет грани с нормалью  $\mathbf{n}_k$ . Так как по самому определению он лежит в полупространстве  $\mathbf{n}_k \mathbf{x} \leq h_k$ , то по лемме 2 найдутся линейно независимые векторы  $\mathbf{n}_j$ , являющиеся нормальями граней  $P$ , такие, что имеют место формулы

$$\mathbf{n}_k = \sum_j \nu_{kj} \mathbf{n}_j \quad (\nu_j > 0) \quad (16)$$

и

$$h_k \geq \sum_j \nu_{kj} h_j^{12}). \quad (17)$$

Но при равенстве (16) условие теоремы 2 требует как раз обратного:

$$h_k < \sum_j \nu_{kj} h_j.$$

Полученное противоречие показывает, что многогранник  $P$  имеет грани с любой из нормалей  $\mathbf{n}_i$ , и теорема 2б доказана.

5. Докажем теперь достаточность условий теоремы 1.

**Теорема 1б.** Если числа  $h_i$ , отнесенные векторам  $\mathbf{n}_i$ , таковы, что выполнено условие теоремы 1 (т. е. если при  $\mathbf{n}_k = \sum_i \nu_{ki} \mathbf{n}_i$ , где  $\mathbf{n}_i$  линейно независимы и все  $\nu_{ki} < 0$ , будет  $h_k > \sum_i \nu_{ki} h_i$ ), то пересечение полупространств  $\mathbf{n}_i \mathbf{x} \leq h_i$  имеет внутренние точки.

Если нам дан только один вектор  $\mathbf{n}_i$ , то теорема сводится к тривиальности. Поэтому будем доказывать ее индукцией по числу векторов  $\mathbf{n}_i$  и допустим, что она верна для  $m - 1$  векторов.

Пусть  $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m$  и  $h_1, \dots, h_m$  — векторы и числа, удовлетворяющие условиям теоремы. Тогда по сделанному предположению о верности теоремы для  $m - 1$  векторов пересечение  $m - 1$  полупространств

$$\mathbf{n}_i \mathbf{x} \leq h_i \quad (i = 1, \dots, m - 1)$$

<sup>12)</sup> Особый случай леммы 2, когда вектор  $\mathbf{n} = \mathbf{n}_k$  «разлагается» по одной нормали, здесь отпадает, потому что предположено, что  $\mathbf{n}_k$  не есть нормаль к грани.

имеет внутреннюю точку. Оно будет выпуклым телесным многогранником  $P$ , который может оказаться призмой или даже полупространством.

Допустим, что вместе с тем пересечение всех  $m$  полупространств  $\mathbf{n}_i \mathbf{x} \leq h_i$ , т. е. пересечение многогранника  $P$  с  $m$ -м полупространством  $\mathbf{n}_m \mathbf{x} \leq h_m$ , не имеет внутренних точек и может быть даже пусто. Это, очевидно, означает, что  $P$  не имеет точек внутри  $m$ -го полупространства  $\mathbf{n}_m \mathbf{x} \leq h_m$ .

Поскольку многогранник  $P$  не имеет точек внутри полупространства  $\mathbf{n}_m \mathbf{x} \leq h_m$ , он содержится в дополнительном полупространстве  $\mathbf{n}_m \mathbf{x} \geq h_m$  или, что то же самое,

$$-\mathbf{n}_m \mathbf{x} \leq -h_m.$$

Это дополнительное полупространство имеет внешнюю нормаль  $-\mathbf{n}_m$ , а расстояние ограничивающей его плоскости от начала равно  $-h_m$ . Так как оно содержит многогранник  $P$ , то можно воспользоваться леммой 2. По этой лемме найдется не более трех таких линейно независимых векторов  $\mathbf{n}_j$ , что

$$-\mathbf{n}_m = \sum_j \nu_{mj} \mathbf{n}_j \quad (\nu_{mj} > 0) \quad (18)$$

и

$$-h_m \geq \sum_j \nu_{mj} h_j. \quad (19)$$

Но так как все  $\nu_{mj} > 0$ , то (18) дает вместе с тем разложение вектора  $\mathbf{n}_m$  по  $\mathbf{n}_j$  с отрицательными коэффициентами  $-\nu_{mj}$ . А тогда по условию теоремы должно быть

$$h_m > \sum_j -\nu_{mj} h_j. \quad (20)$$

Но это противоречит неравенству (19). Тем самым предположение о том, что пересечение всех  $m$  полупространств  $\mathbf{n}_i \mathbf{x}_i \leq h_i$  не имеет внутренних точек, невозможно, и теорема 1б доказана.

**6.** Из теорем 1 и 2 сразу вытекают условия, характеризующие бесконечную часть выпуклого многогранника:

**Теорема 4.** Для того чтобы плоскости  $\mathbf{n}_i \mathbf{x}_i = h_i$  были плоскостями бесконечных граней выпуклого многогранника с внешними нормальными  $\mathbf{n}_i$ , необходимо и достаточно выполнение следующих условий: 1) числа  $h_i$  удовлетворяют условиям теорем 1 и 2, 2) векторы  $\mathbf{n}_i$  направлены в одно полупространство и таковы, что если отложить их из одной точки, то ни один из них не идет внутрь натянутого на них выпуклого многогранного угла, или, что то же самое, все их концы должны лежать на границе натянутого на них выпуклого сферического многоугольника; векторов  $\mathbf{n}_i$  должно быть не менее трех, потому что у бесконечного многогранника (не сводящегося к двугранному углу) должно быть не менее трех бесконечных граней.



Необходимость условия 1 содержится в необходимости условий теорем 1 и 2, а необходимость условия 2 вытекает из соответствующего свойства сферического изображения бесконечного многогранника (глава I, § 5, п° 3). Точно так же доказывается достаточность этих условий. Именно при условии 1 теорема 3 показывает, что существует многогранник  $P$ , у которого плоскости  $\mathbf{n}_i \mathbf{x} = h_i$  суть плоскости граней. Так как по условию 2 векторы  $\mathbf{n}_i$  направлены в одно полупространство, то многогранник  $P$  будет бесконечным. Ни одна его грань не будет конечной, потому что сферическое изображение конечной грани лежит внутри сферического изображения многогранника.

Условиям теоремы 4 можно придать форму, в которой они допускают особенно простую проверку, когда векторы  $\mathbf{n}_i$  и числа  $h_i$  фактически заданы.

1) Для того чтобы векторы  $\mathbf{n}_i$  были направлены в одно полупространство, необходимо и достаточно, чтобы ни один из них не разлагался по некопланарным трем другим с отрицательными коэффициентами. (Для того же, чтобы они были направлены внутрь полупространства, необходимо и достаточно, чтобы ни один не разлагался по другим в любом числе с отрицательными коэффициентами.)

2) Для того чтобы ни один из векторов  $\mathbf{n}_i$ , идущих в одно полупространство, не шел внутри многогранного угла, натянутого на остальные векторы, необходимо и достаточно, чтобы ни один из векторов  $\mathbf{n}_i$  не допускал разложения по некопланарным трем другим с положительными коэффициентами.

3) Из 1 и 2 следует, что в теореме 4 условия теорем 1 и 2 для чисел  $h_i$  нужно проверять только для разложений векторов  $\mathbf{n}_i$  по не более чем двум другим.

Утверждение 1 доказывается индукцией по числу векторов  $\mathbf{n}_i$ . Утверждение 2 очевидно, потому что, если вектор  $\mathbf{n}$  идет внутри многогранного угла  $V$ , то он идет внутри одного из трехгранных углов, на которые можно разбить  $V$ , и, следовательно, разлагается по векторам вдоль ребер этого трехгранного угла с положительными коэффициентами.

**7. Замечания и задачи.** 1) Все выводы этого параграфа буквально распространяются на пространство любого числа измерений. Разница состоит лишь в том, что в  $n$ -мерном пространстве может иметься  $n$  линейно независимых векторов. Осуществить соответствующие изменения в выводах данного параграфа не представляет труда.

2) Для пересечения  $P$  заданных полупространств  $\mathbf{n}_i \mathbf{x}_i \leq h_i$  возможны четыре случая:

- а)  $P$  пусто;
- б)  $P$  не пусто, но не имеет внутренних точек;

в)  $P$  имеет внутренние точки и, следовательно, есть выпуклый многогранник, но не все плоскости  $Q_i$ , ограничивающие данное полупространства, являются плоскостями его граней;

г)  $P$  есть выпуклый многогранник, и все плоскости  $Q_i$  суть плоскости его граней.

Теоремы 1 и 2 дают условия, характеризующие случаи  $\epsilon$  и  $\zeta$ .

Доказать, что случаи  $a$  и  $b$  характеризуются следующими необходимыми и достаточными условиями, и выяснить наглядный смысл этих условий:

а) Среди векторов  $\mathbf{n}_i$  есть такой  $\mathbf{n}_k$ , который допускает разложение по некоторым другим с отрицательными коэффициентами  $\mathbf{n}_k = \sum_i \nu_{ki} \mathbf{n}_i$  ( $\nu_{ki} < 0$ ), а соответствующие опорные числа удовлетворяют неравенству

$$h_k < \sum \nu_{ki} h_i. \quad (\text{а})$$

б) Ни одно из неравенств (а) не имеет места, но имеется вектор  $\mathbf{n}_k$ , допускающий разложение  $\mathbf{n}_k = \sum \nu_{ki} \mathbf{n}_i$  с отрицательными коэффициентами, а соответствующее опорное число удовлетворяет равенству

$$h_k = \sum_i \nu_{ki} h_i. \quad (\text{б})$$

Эти две теоремы вместе с теоремами 1 и 2 дают полное разделение всех четырех случаев  $a - \zeta$ .

3) Выяснить смысл тех случаев, когда одно или несколько из неравенств (2) и (3) в теоремах 1 и 2 обращаются в равенства.

4) а) Доказать, что для того, чтобы данные векторы не были направлены внутрь одного полупространства, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из них разлагался по некоторым другим с отрицательными коэффициентами.

б) Доказать, что для того, чтобы данные векторы не были направлены в одно полупространство (но не обязательно внутрь его!), необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из них разлагался по трем другим линейно независимым с отрицательными коэффициентами.

в) Доказать, что если вектор  $\mathbf{n}$  разлагается по векторам  $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m$  ( $\mathbf{n} = \lambda_1 \mathbf{n}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{n}_m$ ) с отрицательными (положительными) коэффициентами, то среди векторов  $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m$  есть линейно независимые, по которым  $\mathbf{n}$  допускает разложение с коэффициентами того же знака.

5) **Теорема Хелли.** По теореме 1 вектор  $\mathbf{n}_k$  разлагается по трем линейно независимым с отрицательными коэффициентами  $\nu_{ki}$  и  $h_k > \sum \nu_{ki} h_i$ , если соответствующие четыре полупространства имеют общие внутренние точки.

Вместе с тем по теореме 1 выполнение таких условий достаточно для того, чтобы любое число полупространств имело общие внутренние точки.

Отсюда немедленно вытекает теорема:

*Если среди конечного числа данных полупространств каждые четыре имеют общие внутренние точки, то и все полупространства имеют общие внутренние точки.*

Так как всякий выпуклый многогранник есть пересечение конечного числа полупространств, то отсюда следует теорема:

*Если среди конечного числа выпуклых многогранников каждые четыре имеют общие внутренние точки, то и все многогранники имеют общие внутренние точки.*

То же верно в пространстве любого числа измерений  $n$  с заменой числа четыре на  $n + 1$ .

Из изложенного легко вывести, что если из конечного числа выпуклых многогранников каждые четыре, или  $(n + 1)$ , имеют общие точки (не обязательно внутренние), то и все многогранники имеют хотя бы одну общую точку.

Далее, если из конечного числа выпуклых тел каждые четыре, или  $(n + 1)$ , имеют общие точки, то и все эти тела имеют хотя бы одну общую точку. (Достаточно приближаться к данным телам содержащими их выпуклыми многогранниками, и тогда эта теорема будет следовать из предыдущей.)

Можно доказать, что тот же результат верен также для произвольного бесконечного множества конечных выпуклых тел: *если каждые четыре, или  $(n + 1)$ , из них имеют общие точки, то и все они имеют хотя бы одну общую точку.* Это и есть теорема Хелли. Ее совсем простое доказательство можно найти в статье Хелли [293]<sup>13)</sup>. Впрочем, центр тяжести вывода лежит именно в случае конечного числа тел.

Легко убедиться, что для бесконечных выпуклых тел такая общая теорема уже не имеет места.

6) Теорему 3 можно доказать, пользуясь леммой об отображении. В применении к данному случаю лемма об отображении сводится к следующему простому утверждению: если открытое множество  $P$   $m$ -мерного евклидова пространства содержится в другом открытом и связном множестве  $H$  того же пространства и притом так, что  $P$  замкнуто относительно  $H$ , то  $P = H$ . Это следует из самого определения связности (глава II, § 8, п<sup>о</sup> 4). В качестве множества  $H$  следует рассматривать множество точек в  $m$ -мерном пространстве, координаты которых  $h_1, \dots, h_m$  удовлетворяют условиям теорем 1 и 2, когда векторы  $n_1, \dots, n_m$  заданы. А за множество  $P$  нужно

<sup>13)</sup>См. также [269]. — Прим. В. А. Залгаллера.

принять множество тех точек  $(h_1, \dots, h_m)$ , для которых пересечение полупространств  $\mathbf{n}_i \mathbf{x}_i \leq h_i$  будет выпуклым многогранником.

Предлагаем осуществить такое доказательство теоремы 3. Оно не содержит никаких принципиальных трудностей, хотя строгое его проведение требует некоторых деталей, не лишенных известного интереса.

### § 6. ОБОБЩЕНИЯ

1. Все теоремы этой главы вместе с их доказательствами переносятся в евклидово пространство любого числа измерений. Все они, далее, обобщаются путем предельного перехода на любые выпуклые тела, также в пространстве любого числа измерений. Такое обобщение предполагает, однако, введение общих понятий для любых выпуклых тел, заменяющих соответствующие элементарные понятия, относящиеся к многогранникам.

Выпуклое тело задается уже не конечным числом опорных чисел, а «опорной функцией», введенной и исследованной Г. Минковским в [322] (см. также [250]).

Пусть  $\mathbf{u}\mathbf{x} = H(\mathbf{u})$  есть уравнение опорной плоскости выпуклого тела  $H$ , имеющей внешнюю нормаль  $\mathbf{u}$ , причем  $\mathbf{u}$  не обязана быть единичной. Если  $\mathbf{u} = \mathbf{n}$  — единичный вектор, то  $H(\mathbf{u}) = h(\mathbf{u})$  есть расстояние от начала до рассматриваемой плоскости, взятое с соответствующим знаком. Вообще, очевидно, что

$$H(\mathbf{u}) = |\mathbf{u}| H\left(\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|}\right),$$

где  $\mathbf{u}/|\mathbf{u}|$  — уже единичный вектор.

Функция  $H(\mathbf{u})$ , определенная для всех векторов  $\mathbf{u}$ , и называемая *опорной функцией* тела  $H$ . (Строго говоря,  $H(\mathbf{u})$  не определена для  $\mathbf{u} = 0$ , но естественно считается  $H(0) = 0$ .) Она, конечно, полностью определяется своими значениями для единичных векторов  $\mathbf{n}$  (или, как часто бывает удобно считать, — точек на единичной сфере).

Имеет место теорема:

*Для того чтобы функция  $H(\mathbf{u})$  была опорной функцией выпуклого тела (может быть, вырождающегося в плоскую область, отрезок или точку), необходимо и достаточно выполнение двух условий:*

1)  $H(\lambda\mathbf{u}) = \lambda H(\mathbf{u})$  при всяком  $\lambda \geq 0$  («условие положительной однородности первой степени»);

2)  $H(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \leq H(\mathbf{u}) + H(\mathbf{v})$  при любых  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  (условие выпуклости).

Условие невырождаемости выпуклого тела с опорной функцией  $H(\mathbf{u})$  будет:

3) при всяких некопланарных  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$

$$\sum H(\mathbf{u}_i) > -H\left(-\sum \mathbf{u}_i\right).$$

Это аналогично условию теоремы 1 § 5<sup>14)</sup>.

Эта теорема впервые доказана Г. Минковским и потом доказывалась разными способами многими авторами. Ее можно получить предельным переходом из теоремы 1 § 5. Она соответствует теореме 3 § 5 об опорных числах, потому что опорное число есть значение опорной функции для нормали к соответствующей грани. Опорная функция выпуклого многогранника кусочно линейна и определяется поэтому ее значениями для

<sup>14)</sup>См. сноску <sup>16)</sup> ниже. Достаточно заменить  $-\sum_i \mathbf{u}_i$  на  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{u}_i$  на  $\nu_i \mathbf{n}_i$  с  $\nu_i < 0$ .

этих нормалей. Именно она линейна в телесном угле, заполняемом нормальными к опорным плоскостям в одной вершине. (Если  $\mathbf{a}$  — вектор, идущий в точку  $A$ , то уравнение плоскости, проходящей через точку  $A$  и имеющей нормаль  $\mathbf{u}$ , будет  $\mathbf{ux} = \mathbf{ua}$  и, следовательно, опорная функция точки  $A$  есть  $H(\mathbf{u}) = \mathbf{au}$ , откуда и следует наше утверждение об опорной функции многогранника<sup>15)</sup>.)

Условия теоремы 3 §5, т. е. объединенные условия теорем 1 и 2 (с допущением в неравенствах знака равенства), легко выводятся из условий приведенной выше теоремы об опорной функции<sup>16)</sup>. Однако теорему 3 §5 нельзя рассматривать как частный случай этой последней, хотя бы уже потому, что по данным числам  $h_i$ , отнесенным векторам  $\mathbf{n}_i$ , можно построить, вообще говоря, не одну кусочно-линейную функцию  $H(\mathbf{u})$  такую, что  $H(\mathbf{n}_i) = h_i$ . (Такая функция определяется разбиением пространства на трехгранные углы с ребрами вдоль векторов  $\mathbf{n}_i$ . В силу кусочной линейности она определяется в каждом таком угле ее значениями на ребрах. Однако разбиение пространства на трехгранные углы с ребрами вдоль  $\mathbf{n}_i$ , вообще говоря, вовсе не однозначно. Тогда вопрос встает о выделении разбиения, для которого построена функция выпукла.)

2. Обобщения теорем §1–4 на любые выпуклые тела в  $n$ -мерном евклидовом пространстве формулируются с помощью понятия поверхностной функции выпуклой поверхности, определение которой дано в п° 2 §7 главы II. Напомним, что поверхностная функция есть функция множества на единичной сфере  $E$ . Она определена для всех (борелевских) подмножеств на  $E$ , которые содержатся в сферическом изображении данной выпуклой поверхности. Если поверхность замкнута, это будет любое множество на сфере  $E$ . Если же поверхность бесконечна, то ее сферическое изображение  $S$  содержится в полусфере, а ее поверхностная функция имеет заведомо конечные значения лишь для множеств, замыкание которых лежит внутри  $S$ ; для других она может быть бесконечной.

**Обобщение теоремы Минковского.** Для того чтобы функция  $F(M)$  множества на единичной сфере  $E$  (определенная для любого борелевского множества на  $E$ ) была поверхностной функцией какого-либо конечного выпуклого тела, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла следующим условиям:

- 1)  $F(M)$  конечна, неотрицательна и вполне аддитивна.
- 2)  $\int_E nF(dM) = 0$ , где  $n$  — единичный вектор, соответствующий точке на сфере  $E$ .
- 3) При всяком единичном векторе  $\mathbf{n}_0$   $\int_E (\mathbf{n}_0 \mathbf{n}) F(dM) > 0$ .

Второе условие есть условие равенства нулю векторной площади замкнутой поверхности; третье — означает, что площадь проекции выпуклого тела в любом направлении  $\mathbf{n}_0$  не обращается в нуль.

<sup>15)</sup> О задании выпуклой поверхности опорной функцией в пространстве Лобачевского см. [80]. — Прим. В. А. Залгаллера.

<sup>16)</sup> Пусть  $\mathbf{n} = \sum_i \nu_i \mathbf{n}_i$ , где все  $\nu_i < 0$ . Тогда по условию 2  $H(-\mathbf{n}) = H(-\sum_i \nu_i \mathbf{n}_i) \leq \sum H(-\nu_i \mathbf{n}_i)$ , а по условию 1, так как  $-\nu_i > 0$ ,  $H(-\nu_i \mathbf{n}_i) = -\nu_i H(\mathbf{n}_i)$ , так что

$$H(-\mathbf{n}) \leq \sum_i -\nu_i H(\mathbf{n}_i). \quad (*)$$

Но по условию 2  $H(-\mathbf{n}) + H(\mathbf{n}) \geq H(0)$ , а  $H(0) = 0$  (в силу условия 1), где нужно взять  $\lambda = 0$ . Поэтому  $H(-\mathbf{n}) \geq -H(\mathbf{n})$ , что вместе с (\*) дает  $H(\mathbf{n}) \geq \sum_i \nu_i H(\mathbf{n}_i)$ , или в обозначениях §5  $h \geq \sum \nu_i h_i$ , а это и есть условие (2а) теоремы 1 §5. Условие теоремы 2 выводится еще проще.

Если функция  $F(M)$  состоит из конечного числа точечных нагрузок<sup>17)</sup>, то эта общая теорема сводится к теореме о многогранниках. Нормали к граням будут соответствовать тем точкам на сфере, где даны «нагрузки» функции  $F(M)$ . В этом случае третье условие сводится к требованию некомпланарности нормалей.

Доказательство данной общей теоремы проще всего осуществляется путем предельного перехода от многогранников (см. [9]; другое доказательство, прямо дающее теорему в ее общем виде, включая многогранники, дано в [4]).

**Обобщение теоремы § 3.** Пусть  $G$  — конечная выпуклая область (с исключенной границей) на плоскости  $T$ ,  $\mathbf{n}_0$  — нормаль к плоскости  $T$ ,  $F$  — площадь области  $G$ . Для того чтобы функция  $F(M)$  множества на сфере  $E$ , определенная для любого борелевского множества, заключающегося в открытой полусфере  $E(\mathbf{n}_0)$  с центром в точке  $\mathbf{n}_0$ , была поверхностной функцией бесконечного выпуклого тела, проекция которого на плоскость  $T$  покрывает область  $G$ , необходимы и достаточны следующие условия:

1)  $F(M)$  неотрицательна, вполне аддитивна и конечна для всякого  $M$ , замыкание которого содержится в  $E(\mathbf{n}_0)$ ;

$$2) \int_{E(\mathbf{n}_0)} (\mathbf{n}_0 \mathbf{n}) F(dM) = F.$$

Здесь выпуклое тело  $H$  имеет предельным конусом луч в направлении  $\mathbf{n}_0$ . Проекция тела  $H$ , покрывая область  $G$ , содержится в замыкании этой области.

Так как функция  $F(M)$  определена лишь в открытой сфере  $E(\mathbf{n}_0)$ , то опорные плоскости, параллельные  $\mathbf{n}_0$  исключаются из рассмотрения, хотя тело  $H$  может иметь такие плоскости, как, например, бесконечный в одну сторону цилиндр.

Значение функции  $F(M)$  для всей полусферы  $E(\mathbf{n}_0)$  есть не что иное, как площадь той части поверхности тела  $H$ , которая не имеет опорных плоскостей, параллельных  $\mathbf{n}_0$ .

Если функция  $F(M)$  состоит из конечного числа точечных нагрузок, эта общая теорема сводится к теореме § 3 о многогранниках.

**Обобщение теоремы § 4.** Пусть  $M_0$  — (открытая) выпуклая область на сфере, отличная от полусферы. Пусть на границе области  $M_0$  задана функция  $h_0(\mathbf{n})$ , представляющая расстояние опорных плоскостей некоторого выпуклого тела  $H_0$  от начала координат (значение опорной функции для точек на границе области  $M_0$ ). Пусть, наконец,  $F(M)$  — неотрицательная вполне аддитивная функция множества, определенная для борелевских подмножеств области  $M_0$  и конечная для всякого  $M$ , замыкание которого содержится в  $M_0$ .

Тогда существует бесконечно выпуклое тело  $H$ , у которого:

1) сферическое изображение покрывает  $M_0$  и содержится в замыкании  $M_0$ ;

2) значения опорной функции  $h(\mathbf{n}_i)$  сходятся к  $h_0(\mathbf{n})$ , если точки  $\mathbf{n}_i$  сходятся к точке  $\mathbf{n}$  границы области  $M_0$ ;

3)  $F(M)$  есть поверхностная функция этого тела  $H$  (исключая, однако, область точек его поверхности, где нормали к опорным плоскостям идут к границе области  $M_0$ ).

Здесь тело  $H_0$  играет роль бесконечной части тела  $H$ . Тело  $H$  может состоять из конечной части, как бы надетой на бесконечную часть, общую с  $H_0$ ; сферическое изображение этой бесконечной части дает тогда границу области  $M_0$ . В этом случае функция  $F(M)$  имеет для всей области  $M_0$  заведомо конечное значение. Однако тело  $H$  может и не иметь такой бесконечной части, а только асимптотически приближаться к ней.

Доказательство обобщений теорем § 3 и 4 осуществляется предельным переходом от многогранников (эти доказательства пока нигде не опубликованы).

<sup>17)</sup> То есть существуют такие точки  $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_m$  сферы, что  $F(M) = 0$ , если  $M$  не содержит ни одной из этих точек, и  $F(M) > 0$ , если  $M$  содержит хотя бы одну из них.

**3.** Последняя теорема менее обща, чем теорема § 4, в том отношении, что здесь  $F(M)$  есть площадь, в то время как в теореме § 4 фигурировали любые монотонные функции.

Полное обобщение теоремы § 4 на любые выпуклые тела нам не известно. В качестве гипотезы для случая выпуклых тел с регулярной поверхностью можно высказать следующую теорему.

Пусть  $M_0$  — выпуклая область на сфере, отличная от полусферы. Пусть  $h_0(\mathbf{n})$  — значения опорной функции некоторого выпуклого тела  $H_0$  для точек  $\mathbf{n}$  на границе области  $M_0$ . Пусть, далее,  $f(x, y; \mathbf{n})$  — функция точки  $\mathbf{n}$  в области  $M_0$  и двух численных переменных  $x, y$ , определенная в области  $x \geq y$  и монотонная (т. е.  $f(x_1, y_1; \mathbf{n}) > f(x_2, y_2; \mathbf{n})$ , если  $x_1 \geq y_1, x_2 \geq y_2$  и хотя бы в одном случае равенство не имеет места). При этом функция  $f$  — «достаточно регулярная» (непрерывная или даже аналитическая). Тогда при всякой «достаточно регулярной» функции  $g(\mathbf{n})$ , определенной в  $M_0$ , существует бесконечная выпуклая поверхность  $H$ , у которой: 1) сферическое изображение покрывает область  $M_0$  и содержится в замыкании этой области; 2) предельные значения опорной функции поверхности  $H$  на границе области  $M_0$  дают заданную функцию  $h_0(\mathbf{n})$ ; 3) если  $\mathbf{n}$  есть нормаль в точке  $X$  поверхности  $H$ , а  $R_1 \geq R_2$  — главные радиусы кривизны ее в этой точке, то  $f(R_1, R_2; \mathbf{n}) = g(\mathbf{n})$ .

Эта теорема сформулирована нами для поверхности в трехмерном пространстве; в  $n$ -мерном пространстве функция  $f$  должна зависеть от  $n - 1$  численной переменной соответственно  $n - 1$  главному радиусу кривизны.

Эта теорема равносильна утверждению о разрешимости некоторого дифференциального уравнения. Действительно, главные радиусы кривизны выражаются через опорную функцию  $h(\mathbf{n})$  и ее производные первого и второго порядков. Поэтому условие 3 равносильно выполнению некоторого данного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка. Утверждение состоит в том, что такое уравнение всегда имеет решение в виде «выпуклой функции»  $h(\mathbf{n})$ , принимающей на границе данной области  $M_0$  наперед заданные значения  $h_0(\mathbf{n})$ , удовлетворяющие, конечно, необходимому условию выпуклости.

Наличие общей теоремы § 4 для многогранников и метод приближения многогранниками внушают надежду, что такая теорема действительно имеет место. Однако мы не знаем ее доказательства. Если идти от многогранников, то трудность состоит в «приближении» функции  $f(x, y; \mathbf{n})$  некоторыми функциями многоугольников — граней многогранника.

Случаю площади отвечает  $f(x, y; \mathbf{n}) = xy$ , потому что произведение  $R_1 R_2$  есть как раз предел отношения площади области на поверхности к площади ее сферического изображения. Но тогда «приближение» делается очевидным.

Было бы чрезвычайно интересно доказать высказанную общую теорему хотя бы в некоторых частных предположениях о функции  $f(x, y; \mathbf{n})$ , прежде всего для случая, когда она вовсе не зависит от  $\mathbf{n}$ .

**4.** Никаких результатов для многогранников в пространстве Лобачевского или в сферическом пространстве, аналогичных теоремам настоящей главы, не известно. Поиски таких результатов можно вести в направлении, намеченном в самом конце предыдущей главы, заменяя понятие данного направления грани каким-либо соответствующим понятием, обходящимся без параллельности в евклидовом смысле.

Пусть, например, в пространстве Лобачевского даны точка  $O$  и прямые  $l_1, \dots, l_n$ , проходящие через  $O$ . Пусть на этих прямых отмечены положительные направления, не идущие в одно полупространство. Рассмотрим многогранники  $P$ , ограничиваемые плоскостями  $Q_i$ , перпендикулярными к прямым  $l_i$ , так, что положительные направления на этих прямых оказываются идущими от полупространств, содержащих многогранник  $P$ . Тогда по аналогии с теоремами § 5 и 1 встают два вопроса:

1) Пусть  $h_1, \dots, h_n$  — расстояния плоскостей  $Q_1, \dots, Q_n$  от точки  $O$ . Каковы необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять числа  $h_i$  для того, чтобы плоскости  $Q_i$  были плоскостями граней многогранника  $P$ ? (Расстояние  $h_i$  берется, конечно, с соответствующим знаком.)

2) Каковы необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять числа  $F_1, \dots, F_n$  для того, чтобы существовал многогранник  $P$  с площадями граней  $F_i$ ?

Первый вопрос можно решить, вероятно, без особого труда, в то время как второй представляется нам очень трудным.

Аналогичные задачи можно сформулировать и для бесконечных выпуклых многогранников. Новое усложнение возникает при рассмотрении многогранников, имеющих несколько бесконечных частей. То, что в пространстве Лобачевского такие выпуклые многогранники существуют, было показано в п<sup>о</sup> 4 § 6 главы III.

5<sup>18)</sup>. Ввиду теоремы Гаусса для гладкой поверхности, задание поверхностной функции равносильно заданию гауссовой кривизны как функции нормали  $\mathbf{n}$ . Проблема Минковского в первоначальной постановке и состоит в решении вопроса о существовании выпуклой поверхности с заданной гауссовой кривизной  $K(\mathbf{n})$  как функцией нормали. Полезно заметить, что у самого К. Ф. Гаусса площадь сферического изображения была первична. А кривизна была «удельной», т. е. определялась как функция точки, а не множества. Выше было рассмотрено обобщенное решение проблемы Минковского и указаны направления дальнейших обобщений.

Если же  $K(\mathbf{n})$  — заданная гладкая функция точки, то возникает вопрос о существовании достаточно гладкого решения проблемы Минковского. Такая задача решалась двумя разными путями. Либо исследуется степень гладкости обобщенного решения в зависимости от гладкости  $K(\mathbf{n})$ , либо задача сводится к проблеме существования классического решения у соответствующего уравнения Монжа — Ампера. И в том и в другом случае «гладкую» проблему Минковского сводят к получению априорных оценок решений упомянутых уравнений, см. книги [173, гл. 7], [174] и статьи [223, 255, 326].

В [173] гладкая проблема Минковского в  $E^3$  обобщена на случай  $f(R_1, R_2) = \varphi(\mathbf{n})$ , где  $\varphi$  — заданная функция для функции  $f$  довольно общего вида. Сюда примыкают также результаты работ [141, 142, 324]. О проблеме Минковского в псевдоевклидовом пространстве см. [92, 209, 210].

6. Гладкая проблема Минковского в  $E^{n+1}$  допускает обобщение на случай задания вместо  $(R_1 \cdots R_n)^{-1} = \varphi(\mathbf{n})$  другой симметрической функции  $S_k = \sum_{i_\alpha \neq i_\beta} R_{i_1} \cdots R_{i_k}$

главных радиусов кривизны, т. е. ставится вопрос о существовании в  $E^{n+1}$  выпуклой гиперповерхности, для которой в точке с внешней нормалью  $\mathbf{n}$  функция  $S_k(\mathbf{n}) = \varphi(\mathbf{n})$ , где  $\varphi(\mathbf{n}) > 0$  — наперед заданная функция на единичной гиперсфере  $S^n$ .

Эта задача для каждого  $k > 1$  сводится к поискам решения нелинейного эллиптического уравнения на  $S^n$  относительно опорной функции искомой гиперповерхности. При  $k = 1$  это — известная проблема Кристоффеля. Ее решение сводится к линейному дифференциальному уравнению  $\Delta_2 p + \mathbf{n}p = f(\mathbf{n})$ , где  $p(\mathbf{n})$  — искомая опорная функция, а  $\Delta_2$  — оператор Бельтрами на  $S^n$ . О решении проблемы Кристоффеля и ее обобщениях см. [173, гл. 7], [99, 155, 203, 204].

Все сформулированные задачи допускают обобщения на случай элементарных симметрических функций от так называемых «относительных» (условных) главных радиусов кривизны, см. [63, 124, 125].

<sup>18)</sup>Пункты 5 и 6 добавлены В. А. Залгаллером в качестве примечаний.



---

---

## Глава VIII

### Связь условия равенства многогранников с параллельными гранями с другими задачами

---

---

В этой главе под многогранником всегда понимается телесный конечный выпуклый многогранник.

Общее условие равенства многогранников с параллельными гранями, выведенное в § 3 главы VI, имеет существенные приложения в некоторых задачах, на первый взгляд никак с ним не связанных.

Собственно говоря, главные применения получает теорема Минковского о равенстве многогранников с параллельными и равновеликими гранями<sup>1)</sup>.

Первый параграф этой главы, посвященный разбиению пространства на равные многогранники, никак не связан со следующими. Параграфы же 2 и 3, напротив, относятся к одному кругу вопросов, который в общей постановке для любых выпуклых тел служит предметом изящной и богатой следствиями теории, называемой «теорией смешанных объемов».

#### § 1. ПАРАЛЛЕЛОЭДРЫ

1. *Параллелоэдром* называется выпуклый многогранник, обладающий тем свойством, что, прикладывая его экземпляры друг к другу в параллельном расположении по целым граням, можно заполнить без промежутков все пространство. Простейшие примеры представляют куб и правильная шестигранная призма.

Задача состоит в том, чтобы найти все возможные параллелоэдры. Это означает, во-первых, найти все возможные их типы с точки зрения строения, а во-вторых, указать для каждого такого типа те метрические данные, при которых многогранник соответствующего строения будет параллелоэдром, т. е. будет допускать заполнение всего пространства путем параллельного прикладывания по целым граням.

---

<sup>1)</sup>Это замечание существенно в том отношении, что теорема Минковского верна в пространстве любого числа измерений, а потому и следствия ее, которые будут получены, обладают той же степенью общности.

Эта задача интересна не только сама по себе, но также ввиду ее связи с кристаллографией и теорией чисел. Задача была решена впервые великим русским кристаллографом Е. С. Фёдоровым в 1890 г. [215]. Однако в его решении был существенный пробел: Е. С. Фёдоров не доказал того, что всякий параллелоэдр имеет центр симметрии, хотя и пользовался этим фактом. Этот пробел был восполнен Г. Минковским на основании его теоремы о равенстве многогранников с равновеликими и параллельными гранями. Известно, что Г. Минковский пришел к этой общей теореме в поисках доказательства существования центра у параллелоэдров.

Доказав существование центра, мы дадим потом вывод параллелоэдров по Б. Н. Делоне. Этот вывод Б. Н. Делоне представляется образцом красивого геометрического построения<sup>2)</sup>.

**2. Теорема 1.** *Если грани выпуклого многогранника попарно равны и параллельны, т. е. совмещаются параллельным переносом, то как сам многогранник, так и все его грани имеют центры симметрии.*

Пусть  $P$  — многогранник, удовлетворяющий условиям теоремы, а  $P'$  — многогранник, симметричный с  $P$  относительно какой-либо точки  $O$ . Пусть  $G, G_1$  — равные и параллельные грани на  $P$ , а  $G', G'_1$  — симметричные им грани на  $P'$ . Очевидно, грани  $G$  и  $G'_1$  (а также  $G_1$  и  $G'$ ) имеют параллельные внешние нормали (рис. 134). Кроме того, они равновелики. Так как это верно для любой грани  $G$  многогранника  $P$ , то на основании теоремы Минковского заключаем, что многогранники  $P$  и  $P'$  равны и параллельно расположены. Но легко доказывается:

*Если какая-либо фигура  $F$  равна и параллельна фигуре  $F'$ , симметричной с  $F$  относительно какой-либо точки, то  $F$  имеет центр симметрии<sup>3)</sup>.* Следовательно, многогранник  $P$  имеет центр симметрии. Поэтому его грани  $G$

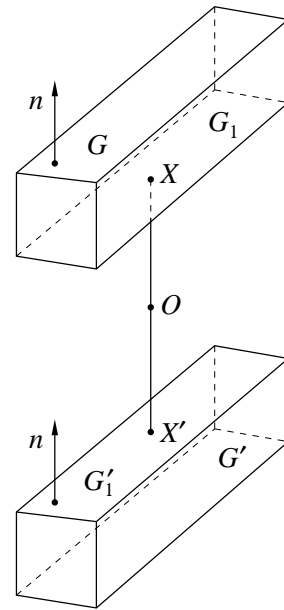


Рис. 134

<sup>2)</sup> О связи параллелоэдров с геометрической кристаллографией см. [97, гл. III].

<sup>3)</sup> Доказательство очевидно из рис. 135. Пусть фигуры  $F$  и  $F'$  симметричны относительно точки  $O$  и кроме того равны и параллельны,  $\mathbf{a}$  — вектор переноса от  $F$  к  $F'$  и  $O'$  — такая точка, что  $\overrightarrow{O'O} = \frac{\mathbf{a}}{2}$ . Пусть  $X$  — любая точка фигуры  $F$ ,  $X'$  — симметричная ей точка фигуры  $F'$ , а  $\bar{X}$  — та точка фигуры  $F$ , которой  $X'$  соответствует по параллельному переносу. Тогда  $O'O = \frac{1}{2} \overline{XX'}$ , и потому  $O'O$  есть средняя линия треугольника  $XX'\bar{X}$ . Следовательно, точки  $X$  и  $\bar{X}$  симметричны относительно  $O'$ . Этим доказано, что в фигуре  $F$  каждой точке  $X$  отвечает точка  $\bar{X}$ , симметричная с  $X$  относительно  $O'$ . Следовательно,  $O'$  есть центр симметрии фигуры  $F$ .

и  $G'$  не только равны и параллельны, но также симметричны относительно центра симметрии многогранника. Следовательно, по той же общей причине и каждая грань  $G$  многогранника  $P$  имеет центр симметрии.

Из теоремы 1 легко выводится

**Теорема 2.** *Всякий параллелоэдр и все его грани имеют центры симметрии.*

Действительно, рассмотрим какое-либо заполнение пространства параллелоэдрами. Пусть  $G_0$  — грань параллелоэдра  $P_0$ ; по ней к  $P_0$  прилегает следующий параллелоэдр  $P_1$ . При параллельном переносе, переводящем  $P_0$  в  $P_1$ , грань  $G_0$  переходит в грань  $G_1$  того же параллелоэдра  $P_1$ . Следовательно, каждой грани параллелоэдра отвечает на нем же равная и параллельная

ей грань, откуда на основании теоремы 1 следует, что сам параллелоэдр и все его грани имеют центры симметрии.

(Так как теорема Минковского верна в пространстве любого числа измерений, то тем же свойством обладают теоремы 1, 2.)

**3.** Для того чтобы вывести все типы параллелоэдров трехмерного пространства, нам нужно решить сначала аналогичную задачу для плоскости, т. е. найти все выпуклые многоугольники, которыми можно заполнять плоскость, прикладывая их параллельно друг другу по целым сторонам. Такие многоугольники называются *параллелогонами* (рис. 136).

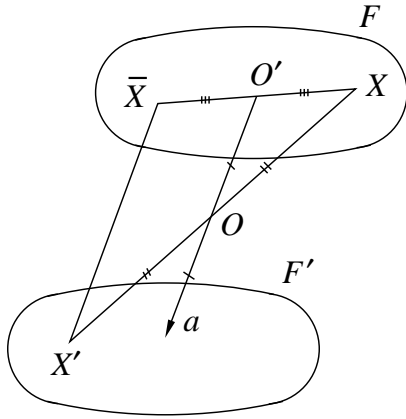


Рис. 135

**Теорема 3.** *Параллелогонами являются всякий параллелограмм и всякий шестиугольник с центром симметрии; других параллелогонов нет.*

То, что всякий параллелогон имеет центр симметрии, доказывается так же, как теорема 2, с тем упрощением, что здесь нет надобности ссылаться на общую теорему 1. И без того очевидно, что многоугольник с попарно равными и параллельными сторонами имеет центр.

Рассмотрим какое-либо заполнение плоскости параллелогонами. Пусть  $P_0$  — один из параллелогонов и  $P_1$  — параллелогон, смежный с  $P_0$  по стороне  $AB$  (рис. 137). Так как у  $P_1$  есть равная и параллельная сторона  $A_1B_1$  и  $P_1$  — выпуклый многоугольник, то он содержит целый параллелограмм  $ABB_1A_1$ . Если  $P_1$  сводится к этому параллелограмму, то осуществляется первая возможность, указанная в теореме.

Остается доказать, что в противном случае параллелогон будет шестиугольником.

Если  $P_1$ , а значит, и  $P_0$  не сводятся к параллелограмму, то из вершины  $A$  у них исходят стороны  $AC$ ,  $AD$ , не являющиеся одна продолжением другой<sup>4)</sup>. Покажем, что в этом случае к вершине  $A$  может прилегать еще только один параллелогон.

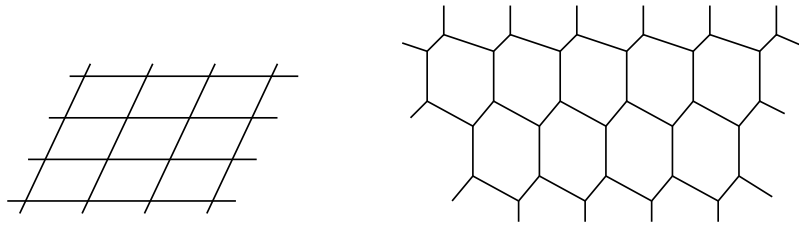


Рис. 136

Допустим, что это не так; тогда к  $P_0$  по стороне  $AC$  прилегает параллелогон  $P_2$  со стороной  $AE$ , отличной от  $AD$  (см. рис. 137). Проведем продолжение  $a$  стороны  $AB$ . Сторона  $AE$  не может лежать на этом продолжении, так как тогда параллелогон  $P_2$  не мог бы содержать параллелограмм, равного и параллельного параллелограмму  $ABB_1A_1$ . Далее, сторона  $AE$  не может лежать по ту же сторону от линии  $a$ , что и сторона  $AC$ , ибо тогда у параллелогона  $P_2$  не могло бы быть стороны, параллельной  $AB$  (иначе он оказался бы невыпуклым).

Итак, сторона  $AE$  лежит по другую сторону от линии  $a$ . Но к параллелогону  $P_1$  по стороне  $AD$  прилегает параллелогон  $P_3$ , для которого верно то же рассуждение. Следовательно, параллелогоны  $P_2$  и  $P_3$  перекрываются, а это возможно лишь, если они совпадают, т. е. если  $AE$  совпадает с  $AD$ .

Итак, параллелогон  $P_2$  неизбежно прилегает к  $P_0$  и  $P_1$  по сторонам  $AC$  и  $AD$ . Но в таком случае, пользуясь тем, что все эти параллелогоны равны, параллельно расположены и имеют центры симметрии, мы немедленно убеждаемся в том, что они являются шестиугольниками. (Так как  $P_2$  равен и параллелен  $P_0$  и  $P_1$ , то у него есть углы, соответствующие их углам  $A$ . Так как  $P_2$  имеет центр, то этим углам соответствуют симметричные. Тогда из выпуклости ясно, что  $P_2$  не может иметь никаких других углов, кроме полученных шести.)

То, что всякий параллелограмм и всякий шестиугольник с центром действительно могут заполнять плоскость, проверяется непосредственно.

<sup>4)</sup> Это становится совершенно очевидным, если вспомнить, что параллелогоны  $P_0$  и  $P_1$  содержат параллелограммы, прилегающие по стороне  $AB$ , в силу чего стороны  $AC$  и  $AD$  могут служить продолжением друг друга лишь тогда, когда они сами являются сторонами этих параллелограммов.

4. Обратимся теперь непосредственно к выводу параллелоэдров.

А) Все грани одного параллелоэдра, параллельные любому данному его ребру  $L$ , образуют «замкнутую зону», т. е. циклическую последовательность граней, прилегающих одна к другой по ребрам, параллельным  $L$ .

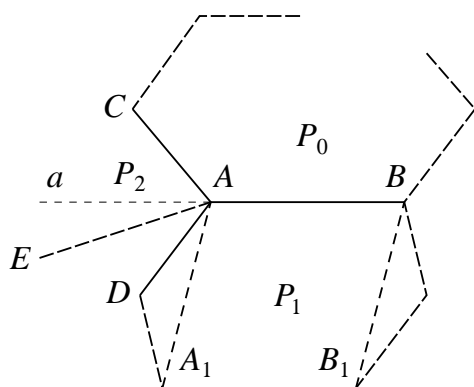


Рис. 137

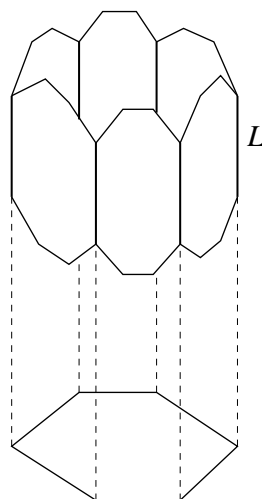


Рис. 138

Проекция параллелоэдра вдоль ребра  $L$  есть многоугольник, все стороны которого являются проекциями граней зоны. Ребро  $L$  называется *ребром зоны* (рис. 138).

Пусть  $L_1$  — ребро параллелоэдра  $P$  и  $G_1$  — грань с этим ребром. Так как грань  $G_1$  имеет центр симметрии, то у нее есть еще ребро  $L_2$ , равное и параллельное  $L_1$ . К грани  $G_1$  по ребру  $L_2$  прилегает еще грань  $G_2$ , у которой опять-таки есть ребро  $L_3$ , равное и параллельное  $L_2$ , и т. д.

Ввиду конечности числа граней, получающихся таким образом, последовательность граней  $G_1, G_2, \dots$  должна замкнуться.

Если спроектировать параллелоэдр на плоскость вдоль ребра  $L$ , то все грани, параллельные этому ребру, спроектируются в прямолинейные отрезки, ни один из которых не будет лежать внутри проекции<sup>5)</sup>: иначе параллелоэдр не лежал бы по одну сторону от соответствующей грани, вопреки его выпуклости. Поэтому проекции всех граней зоны должны лежать на границе проекции параллелоэдра, и так как зона замыкается, то все стороны проекции суть проекции последовательных граней зоны.

<sup>5)</sup>Здесь, как и всюду дальше, не обязательно, чтобы плоскость проекции была перпендикулярна к направлению проектирования.

В) В заполнении пространства параллелоэдр, смежные по граням одной зоны и ее естественных продолжений, образуют непроницаемый слой, т. е. слой, разбивающий пространство. Проекция этого слоя вдоль ребра зоны дает разбиение плоскости на параллелогоны.

Рассмотрим разбиение пространства на параллелоэдры. Возьмем в нем какой-либо параллелоэдр  $P_0$  и какое-либо его ребро  $L_0$ . По доказанному, ребру  $L_0$  соответствует замкнутая зона граней. Бесконечную призму, ограниченную плоскостями этих граней, назовем *зональной призмой*. Сечение зональной призмы плоскостью и есть проекция параллелоэдра вдоль ребра  $L_0$  на данную плоскость.

По грани  $G$ , содержащей ребро  $L_0$ , к параллелоэдру  $P_0$  прилегает параллелоэдр  $P_1$ , а по грани, параллельной  $G$ , к  $P_0$  прилегает параллелоэдр  $P_{-1}$ ; далее, к  $P_1$  и  $P_{-1}$  по граням, параллельным  $G$ , прилегают параллелоэдры  $P_2$  и  $P_{-2}$  и т. д. Таким путем получаем линейный ряд параллелоэдров и вместе с тем ряд  $R^0$  их зональных призм  $\Pi_i$ . Этот ряд зональных призм разбивает пространство. (См. рис. 139, где изображены проекции параллелоэдров вдоль ребра  $L_0$ .)

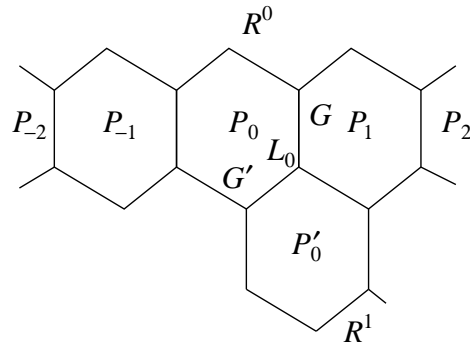


Рис. 139

По другой грани  $G'$ , содержащей ребро  $L_0$ , к параллелоэдру  $P_0$  прилегает параллелоэдр  $P'_0$ . Он прилегает также к  $P_1$  по ребру  $L_0$ . Так как двугранные углы при общем ребре  $L_0$  параллелоэдров  $P_0, P_1, P'_0$  не входят друг в друга, то и зональные призмы также не входят друг в друга.

Прикладывая к параллелоэдру  $P'_0$  параллелоэдры  $P'_1, P'_{-1}$  по граням, параллельным грани  $G$ , и т. д., получим новый линейный ряд параллелоэдров и соответственно ряд  $R^1$  их зональных призм. Но легко убедиться в том, что ряды  $R^0$  и  $R^1$  зональных призм прилегают друг к другу без просветов и налеганий. Для этого рассмотрим все параллелоэдры, сходящиеся в ребре  $L_0$ . Каждый из них содержится в двугранном угле с ребром, содержащим  $L_0$ . В этом же двугранном угле содержится соответствующая зональная призма, и плоскости граней этой призмы, сходящиеся в  $L_0$ , совпадают с гранями указанного двугранного угла. Поэтому зональные призмы располагаются вокруг ребра, содержащего  $L_0$ , без просветов и налеганий. Так как параллелоэдры имеют центры симметрии, то зональные призмы также имеют центры симметрии и, следовательно, в сечении призм плоскостью, не параллельной ребру  $L_0$ , получаются центрально-симметричные многоугольники,

располагающиеся вокруг общей вершины без просветов и налеганий. Кроме того, эти многоугольники, очевидно, равны и параллельно расположены. Но в таком случае, как мы убедились при выводе параллелогонов, имеются лишь две возможности: многоугольники являются либо параллелограммами, либо шестиугольниками. А отсюда непосредственно видно, что ряды призм  $R^0$  и  $R^1$  прилегают без просветов и налеганий.

Продолжая теперь прикладывание следующих рядов параллелоэдров в обе стороны от исходного ряда  $R_0$ , получим целый слой параллелоэдров. При этом по доказанному зональные призмы без просветов и налеганий заполнят все пространство, а так как прилеганию призм соответствует прилегание параллелоэдров по граням зон, то построенный нами слой параллелоэдров будет непроницаемым. Кроме того, мы убедились в том, что, проектируя этот слой на плоскость вдоль ребра зоны, мы получаем разбиение плоскости на параллелогоны.

С) Если параллелоэдры  $P$  и  $P'$  лежат в соседних слоях и их зональные проекции, т. е. проекции вдоль ребра зоны, перекрываются, то общая часть проекций есть проекция их общей грани.

Из предыдущего следует, что вся система параллелоэдров, заполняющих пространство, распадается на слои, образуемые параллелоэдрами, смежными по граням данной зоны и ее естественных продолжений. Два слоя  $S$  и  $S'$ , имеющие общие точки, должны полностью прилегать друг к другу, так что между ними уже нет пустот: иначе такая пустота заполнялась бы каким-то параллелоэдром, исходя из которого мы построили бы слой, который ввиду его непроницаемости разделил бы слои  $S$  и  $S'$ .

Пусть зональные проекции параллелоэдров  $P$  и  $P'$  из соседних слоев  $S$  и  $S'$  перекрываются и пусть  $A$  — любая их общая внутренняя точка. Прямая  $l$ , проходящая через  $A$  параллельно ребру зоны, пересекает оба параллелоэдра и не пересекает других параллелоэдров из тех же слоев, потому что проекции параллелоэдров одного слоя не перекрываются. А так как слои полностью прилегают друг к другу, то эта прямая, выходя из  $P$  в направлении  $P'$ , сразу входит в  $P'$ , так что  $P$  и  $P'$  имеют общую точку, проекцией которой является данная точка  $A$ . Следовательно, вся общая часть проекции этих параллелоэдров состоит из проекций их общих точек. Тем самым она является проекцией их общей грани, потому что параллелоэдры прилегают по целым граням.

Д) Все типы параллелоэдров могут быть найдены посредством «слоевого построения», состоящего в следующем:

Выберем какую-либо замкнутую зону параллелоэдра (ребро этой зоны будем для удобства считать вертикальным). Тогда все его грани распадутся на три части: на зону и две симметричные друг другу «шапочки» — «верхнюю» и «нижнюю».

Пусть  $S$  и  $S'$  — два соседних слоя, соответствующих выбранной зоне, причем считаем, что  $S'$  лежит над  $S$ . Пусть  $\bar{S}$  и  $\bar{S}'$  — зональные проекции этих слоев на одну и ту же плоскость. Вследствие В эти проекции представляют собой два заполнения плоскости одинаковыми параллелогами.

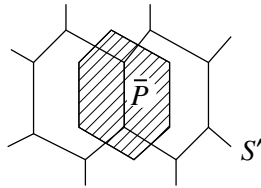


Рис. 140

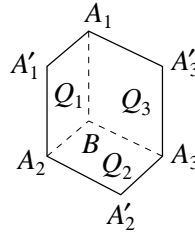


Рис. 141

Пусть  $P$  — параллеледр из слоя  $S$  и  $\bar{P}$  — его проекция. Она покрыта проекциями параллеледров из слоя  $S'$  и, согласно С, общая ее часть с любой из этих проекций есть проекция некоторой грани параллеледр  $P$  (рис. 140).

Отсюда и следует *слоевое построение*:

Для того чтобы найти все возможные параллеледры, достаточно рассмотреть все возможные налегания друг на друга одинаковых разбиений плоскости на параллелоги (это определит строение шапочки, а вместе с ним и строение зоны).

5. Теперь, чтобы завершить вывод, остается осуществить это слоевое построение.

Тут нужно различать два случая соответственно двум возможным видам параллелогинов.

Первый случай: параллелогины суть шестиугольники. При наложении одного разбиения  $S'$  на другое могут представиться четыре возможности в зависимости от того, куда попадает данная вершина  $A$  разбиения  $\bar{S}'$  (рис. 141):

- I) внутрь одного из параллелограммов  $Q_1, Q_2, Q_3$ ;
- II) внутрь одной из сторон  $BA_i$  этих параллелограммов<sup>6)</sup>;
- III) в точку  $B$ ;
- IV) в одну из точек  $A_1, A_2, A_3$ .

Этим четырем случаям отвечают четыре проекции шапочек параллеледров, изображенные на рис. 142, и соответственно четыре типа параллеледров, которые изображены так, что ребро зоны вертикально.

Второй случай: параллелогины суть параллелограммы. Здесь для наложения одного разбиения на другое имеются, очевидно, лишь три возможности, изображенные на рис. 142 и обозначенные II', IV', V. Обозначение II'

<sup>6)</sup> Легко видеть, что если  $A$  падает, например, на сторону  $A_1A'_1$ , то это эквивалентно тому, что она падает на  $A_2B$ .



и  $IV'$  указывает на то, что соответствующие многогранники имеют то же строение, что многогранники II и IV. Разница лишь в том, что берутся их проекции, соответствующие зонам, играющим разную роль в их комбинаторном строении.

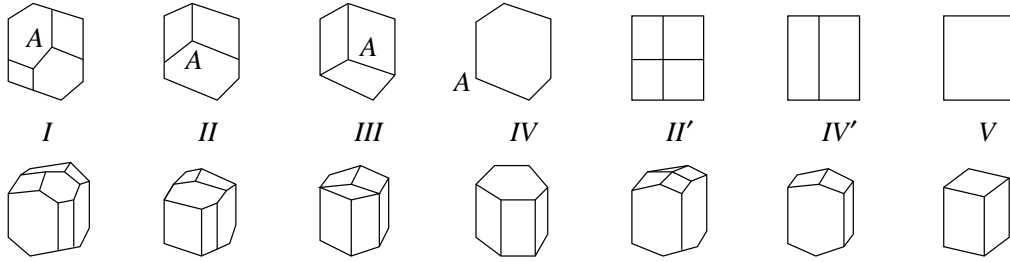


Рис. 142

Получается всего пять различных типов параллелепедов (рис. 143): (I) Четырнадцатигранник; 8 граней шестиугольные, 6 — параллелограммы. (II) Двенадцатигранник; 4 грани шестиугольные, 8 — параллелограммы. (III) Двенадцатигранник, у которого все грани — параллелограммы. (IV) Шестигранная призма. (V) Параллелепипед. Наиболее симметричного вида четырнадцатигранный параллелепед представляет собой один из 13 полуправильных многогранников Архимеда, называемый «усеченным октаэдром». Этот многогранник является пересечением куба с октаэдром, оси которого перпендикулярны граням куба, причем шестиугольники, вырезаемые на гранях октаэдра, должны иметь центры симметрии.

Теперь можно сформулировать окончательный результат:

**Теорема 4.** *Для того чтобы выпуклый многогранник был параллелепедом, необходимо и достаточно, чтобы он имел строение одного из пяти указанных типов и чтобы как он сам, так и все его грани имели центры симметрии.*

(Можно показать, что требование наличия центра симметрии у самого многогранника лишнее: оно следует из наличия центров симметрии у граней.)

Необходимость этих условий доказана предыдущими рассуждениями; достаточность их получается непосредственно. Рассмотрим, например, многогранник первого типа. Выбрав одну его зону, построим слой таких многогранников, прилегающих по граням зоны. Такое построение возможно, так как зональная проекция представляет собой шестиугольник с центром, т. е. параллелогон. Построим затем другой такой же параллельный слой и положим его на предыдущий так, чтобы какая-нибудь грань нижней шапочки одного из его параллелепедов совпала с соответствующей гранью верхней

шапочки параллелоэдра из первого слоя. Тогда слои полностью налягут друг на друга, как это легко видеть на основании строения шапочек. Продолжая это наложение слоев, получим заполнение всего пространства <sup>7)</sup>.

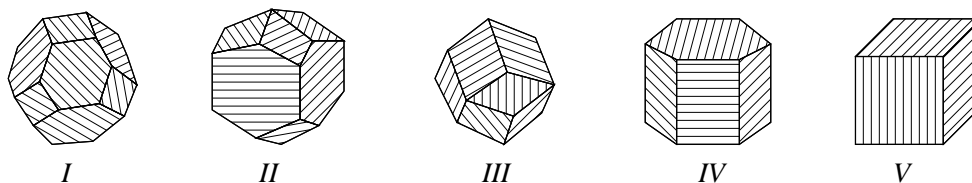


Рис. 143

**6.** Основой проведенного вывода является существование замкнутой зоны, которое, в свою очередь, непосредственно вытекает из существования центра у параллелоэдра и его граней. Но в более чем трехмерном пространстве такое же простое заключение невозможно, и там не обязательно все грани, параллельные какому-либо ребру, образуют замкнутую зону. То есть грани  $(n - 1)$ -мерной проекции  $n$ -мерного параллелоэдра вдоль ребра могут и не быть проекциями его  $(n - 1)$ -мерных граней. Все же в четырехмерном пространстве Б. Н. Делоне удалось провести слоевое построение и найти все четырехмерные параллелоэдры. Их оказалось 52 типа. В пространствах большего числа измерений слоевое построение не может дать всех параллелоэдров.

Наиболее глубокое исследование, касающееся  $n$ -мерных параллелоэдров, принадлежит Г. Ф. Вороному (1868–1908) <sup>8)</sup>. Пусть  $E$  — параллелепипедальная система точек, или, как говорят, решетка (т. е. система концов векторов  $\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{a}_i$ , где  $\mathbf{a}_i$  — данные векторы, а  $x_i$  — любые целые числа).

Построим вокруг каждой точки  $A$  решетки  $E$  область ближайших точек, т. е. множество таких точек  $X$ , что расстояние  $AX$  не больше расстояния от  $X$  до любой другой точки решетки  $E$ . Легко доказывается, что эти области — выпуклые многогранники, смежные по целым граням <sup>9)</sup>. Они

<sup>7)</sup> Необходимые и достаточные условия заполнения  $n$ -мерного пространства без просветов и налеганий многогранниками, которые прилегают по целым граням, даны в работах [20] и [73]; эти условия состоят в локальном требовании заполнения без просветов и налеганий окрестности каждой  $(n - 2)$ -мерной грани. Как показано в [22–28], они верны для всех односвязных  $n$ -мерных пространств. — Прим. В. А. Залгаллера.

<sup>8)</sup> Изложение работ Г. Ф. Вороного см. в [96, с. 268–321]. Там же (с. 295–297) указаны дальнейшие работы о параллелоэдрах.

<sup>9)</sup> Они ограничиваются плоскостями, перпендикулярными к отрезкам, соединяющим данную точку с другими точками решетки, в серединах этих отрезков.

называются *областями Вороного*<sup>10)</sup>. Из того, что решетка обладает параллельной повторяемостью, следует, что все ее области Вороного равны и параллельно расположены. Следовательно, они представляют собой параллелоэдры. Легко доказать, что для того, чтобы параллелоэдр был областью Вороного какой-либо решетки, необходимо и достаточно, чтобы прямые из его центра в центры граней были перпендикулярны к граням.

Г. Ф. Вороной высказал гипотезу, что всякий параллелоэдр можно путем аффинного преобразования превратить в «область Вороного». Он сам доказал это для «примитивных» параллелоэдров, т. е. таких, которые в заполнении пространства сходятся в вершинах в наименьшем возможном числе, именно  $(n + 1)$ . При  $n = 3$  примитивен параллелоэдр лишь одного типа I — четырнадцатигранник. При  $n = 4$  примитивных параллелоэдров имеется три типа.

Теорема Вороного была доказана для всех трехмерных и четырехмерных параллелоэдров Б. Н. Делоне и обобщена на более широкий класс  $n$ -мерных параллелоэдров, чем примитивные, О. К. Житомирским [106]. Однако в полном объеме она до сих пор остается недоказанной. Доказав ее, мы получили бы также способ находить параллелоэдры  $n$ -мерного пространства, потому что Г. Ф. Вороным дан способ нахождения «областей Вороного».

## § 2. Многогранник наименьшей площади при заданном объеме

1. Речь идет о следующей теореме, доказанной впервые Л. Линделёфом в 1870 г. [312].

**Теорема 1.** *Среди всех выпуклых многогранников с данными направлениями граней и с данным объемом наименьшую площадь поверхности имеет многогранник, описанный вокруг шара.*

Эта теорема оказывается простым следствием другой, более общей, теоремы, принадлежащей Г. Минковскому. Для формулировки этой последней сделаем ряд предварительных замечаний.

Обобщая введенное раньше понятие опорного числа (§ 2 главы I), будем называть *опорным числом*  $h(\mathbf{n})$  многогранника расстояние от начала до опорной плоскости многогранника с внешней нормалью  $\mathbf{n}$ ; причем, как всегда, это расстояние считается положительным, если нормаль  $\mathbf{n}$ , отложенная из начала, направлена к опорной плоскости, и отрицательным, — в противном случае. Под  $\mathbf{n}$  мы всегда понимаем единичный вектор. Поэтому можно

<sup>10)</sup> Их также называют *областями Дирихле*, поскольку П. Г. Дирихле ранее рассматривал их в трехмерном случае в связи с вопросами теории чисел. — Прим. В. А. Залгаллера.

сказать, что  $h(\mathbf{n})$  есть правая часть в нормальном уравнении опорной плоскости с внешней нормалью  $\mathbf{n}$ :

$$\mathbf{n}\mathbf{x} = h(\mathbf{n}). \quad (1)$$

Обобщение в сравнении с определением, данным в § 2 главы I, состоит в том, что теперь опорная плоскость с нормалью  $\mathbf{n}$  может и не быть плоскостью грани. Это обобщенное понятие опорного числа будет иметься в виду на протяжении всего данного параграфа и следующих.

Каждый раз мы будем иметь дело с конечным числом данных попарно различных векторов  $\mathbf{n}_i$ , среди которых содержатся нормали ко всем граням рассматриваемых многогранников. Для краткости вместо  $h(\mathbf{n}_i)$  будем писать  $h_i$ . Общую часть многогранника и его опорной плоскости с нормалью  $\mathbf{n}_i$  мы будем называть  $i$ -й гранью, хотя она может вырождаться в ребро или вершину. Если такого вырождения нет, то будем говорить об истинной грани. Площадь  $i$ -й грани обозначается  $F_i$ ; она будет нулем в случае вырождения грани.

**Лемма 1.** Если начало перенести на вектор  $\mathbf{a}$ , то опорное число  $h(\mathbf{n})$  приобретает слагаемое  $-\mathbf{a}\mathbf{n}$ .

Действительно, согласно формуле (1),  $h(\mathbf{n}) = \mathbf{n}\mathbf{x}$ . Если  $h'(\mathbf{n})$  — опорное число при новом выборе начала  $O'$ , то

$$h'(\mathbf{n}) = \mathbf{n}\mathbf{x}',$$

где вектор  $\mathbf{x}'$  идет из  $O'$  в любую точку  $X$  опорной плоскости. Если  $O$  — старое начало, то  $\overrightarrow{OO'} = \mathbf{a}$  и  $\mathbf{x}' = \overrightarrow{O'X} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OX} = -\mathbf{a} + \mathbf{x}$ , а потому

$$h'(\mathbf{n}) = \mathbf{n}\mathbf{x} - \mathbf{n}\mathbf{a} = h(\mathbf{n}) - \mathbf{n}\mathbf{a}.$$

**Лемма 2.** Объем многогранника выражается формулой

$$V = \frac{1}{3} \sum_i h_i F_i.$$

Эта формула очевидна: она выражает объем многогранника как алгебраическую сумму объемов пирамид с общей вершиной в начале и с основаниями на гранях многогранника. При этом если начало не внутри многогранника, то объем пирамиды, лежащей вне его, должен вычитаться. Так оно и будет, потому что в этом случае опорное число  $h_i$  отрицательно.

**Лемма 3.** Для всякого многогранника  $\sum_i \mathbf{n}_i F_i = 0$ .

Эта формула нам известна. Между прочим, она вытекает из лемм 1 и 2. Действительно, при переносе начала на любой вектор  $\mathbf{a}$  объем, конечно, не меняется, а потому

$$\sum h_i F_i = \sum (h_i - \mathbf{a} \mathbf{n}_i) F_i = \sum h_i F_i - \mathbf{a} \sum \mathbf{n}_i F_i.$$

И так как это верно при любом векторе  $\mathbf{a}$ , то  $\sum \mathbf{n}_i F_i = 0$ .

**Лемма 4.** Пусть  $P^0, P^1$  — два многогранника,  $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_r$  — векторы, среди которых содержатся нормали ко всем их истинным граням. Если  $h_i^0, F_i^1$  — опорные числа и площади граней соответственно многогранника  $P^0$  и  $P^1$ , то сумма

$$V_{011} \equiv V(P^0 P^1 P^1) = \frac{1}{3} \sum h_i^0 F_i^1 \quad (2)$$

не меняется ни при переносе начала, ни при параллельных переносах многогранников  $P^0, P^1$ . Она не меняется также при введении новых векторов  $\mathbf{n}_i$ .

Если начало перенести на вектор  $\mathbf{a}$ , то, согласно лемме 1, указанная сумма должна замениться такой:

$$\sum_i (h_i^0 - \mathbf{a} \mathbf{n}_i) F_i^1 = \sum_i h_i^0 F_i^1 - \mathbf{a} \sum_i \mathbf{n}_i F_i^1.$$

Но в силу леммы 3 последняя сумма исчезает, откуда и следует первое утверждение леммы.

При переносе многогранника  $P^1$  площади и направления его граней не меняются, а потому сумма  $V_{011}$  остается неизменной. Перенос же многогранника  $P^0$  влияет на изменение его опорных чисел как противоположный перенос начала. Поэтому сумма  $V_{011}$  не меняется также при переносах многогранника  $P^0$ . То, что сумма  $V(P^0 P^1 P^1)$  не меняется при введении новых векторов  $\mathbf{n}_i$ , очевидно из того, что опорные плоскости с этими векторами упираются в многогранник  $P^1$  уже по «граням», для которых  $F_i = 0$ .

Опираясь на очевидную аналогию между выражениями величины  $V_{011}$  и объема, назовем величину  $V_{011}$  *смешанным объемом* многогранников  $P^0$  и  $P^1$ . Если  $P^0$  равен и параллелен  $P^1$ , то, очевидно,  $V_{011}$  равно объему многогранника  $P^0$ . Другое значение величины  $V(P^0 P^1 P^1)$  будет выяснено в §3, и там же будет раскрыт смысл введенного ее обозначения. Пока для его объяснения можно только заметить, что при подобном увеличении многогранника  $P^0$  в  $\lambda$  раз  $V(P^0 P^1 P^1)$  приобретает множитель  $\lambda$ , а при таком же увеличении многогранника  $P^1$  — множитель  $\lambda^2$ ; так как при  $P^0$ , равном и параллельном  $P^1$ ,  $V(P^0 P^1 P^1)$  равно объему многогранника  $P^0$ , то этот объем естественно обозначать  $V(P^0 P^0 P^0)$ .

Теперь сформулируем теорему Минковского:

**Теорема 2.** Для всяких выпуклых многогранников  $P^0, P^1$

$$V^3(P^0 P^1 P^1) \geq V(P^0 P^0 P^0) \cdot V^2(P^1 P^1 P^1).$$

При этом знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда многогранники  $P^0$  и  $P^1$  гомотетичны (т. е. получаются один из другого параллельным переносом и подобным преобразованием из некоторого центра).

2. Теорема 1 оказывается простым следствием теоремы 2 благодаря следующему замечанию:

Если многогранники  $P^0$  и  $P^1$  имеют одни и те же внешние нормали к истинным граням и многогранник  $P_0$  описан вокруг единичного шара, то  $3V(P^0 P^1 P^1)$  есть площадь поверхности многогранника  $P^1$ . Действительно, беря начало в центре шара, вокруг которого описан многогранник  $P^0$ , получим, что все его опорные числа  $h_i^0 = 1$ . Тогда, согласно определению смешанного объема  $V(P^0 P^1 P^1)$ , по формуле (2) будем иметь  $V(P^0 P^1 P^1) = \sum F_i^1 = F(P^1)$ , где  $F(P^1)$  — площадь поверхности многогранника  $P^1$ .

Согласно этому значению, из теоремы 2 следует, что (переходя к сокращенному обозначению объемов)

$$F^3(P^1) \geq 27V(P^0)V^2(P^1)$$

и знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда многогранник  $P^1$  подобен многограннику  $P^0$ . Это, очевидно, означает, что площадь  $F(P^1)$  достигает минимума при данном объеме  $V(P^1)$  тогда и только тогда, когда многогранник  $P^1$  подобен  $P^0$ , т. е. когда и он описан вокруг некоторого шара. А в этом и состоит утверждение теоремы 1.

3. Обратимся к доказательству теоремы 2.

Пусть  $P^1$  — данный многогранник и  $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}$  — попарно различные единичные векторы, среди которых содержатся все внешние нормали к истинным граням многогранника  $P^1$ . Пусть  $P$  — переменный многогранник, вырезаемый в пространстве плоскостями с нормальными  $\mathbf{n}_i$ . Среди многогранников  $P$  содержится данный многогранник  $P^1$ . Многогранник  $P$  есть пересечение полупространств  $\mathbf{n}_i \mathbf{x} \leq h_i$ , где  $h_i$  — расстояния от начала до  $i$ -й плоскости  $Q_i$ , взятые с соответствующим знаком. Плоскость  $Q_i$  может и не касаться многогранника  $P$ . Тогда  $h_i$  не будет его опорным числом. Тем не менее, когда все  $h_i$  заданы, многогранник  $P$  вполне определен и можно числа  $h_i$  назвать его «опорными числами» в кавычках. (Если  $i$ -я плоскость не касается многогранника  $P$ , то число  $h_i$  уже не определяется многогранником.)

**Лемма 5.** Объем  $V$  многогранника  $P$  есть дифференцируемая функция его «опорных чисел»  $h_i$  и

$$\frac{\partial V}{\partial h_i} = F_i,$$

где  $F_i$  — площадь соответствующей грани. (Если  $i$ -я плоскость не касается многогранника, то  $i$ -й грани нет, и считается, что  $F_i = 0$ .)

Эта лемма достаточно очевидна и доказана в § 2 главы VII.

Очевидно, что площади граней  $F_i$  зависят от «опорных чисел»  $h_i$  непрерывно, так что объем  $V$  имеет непрерывные частные производные.

Докажем теперь следующее утверждение, из которого теорема 2 получится простым формальным рассуждением:

**Теорема 2а.** Пусть  $P$  — переменный многогранник, ограничиваемый плоскостями  $\mathbf{n}_i \mathbf{x} = h_i$  с данными внешними нормальными  $\mathbf{n}_i$ , а  $P^1$  — один из этих многогранников. Тогда при условии, что

$$\Phi(h_1, \dots, h_r) \equiv \sum_{i=1}^r h_i F_i^1 = \sum_{i=1}^r h_i^1 F_i^1 = 3V(P^1), \quad (3)$$

многогранник  $P$  имеет наибольший объем тогда и только тогда, когда он равен и параллелен многограннику  $P^1$ . ( $F_i^1$  — площади граней выбранного многогранника  $P^1$ ,  $V(P^1)$  — его объем.)

Линейная форма  $\Phi$  не зависит от выбора начала и не меняется при переносах многогранников, что доказывается буквально так же, как лемма 4. Разница лишь в том, что  $h_i$  уже могут не быть настоящими опорными числами и потому  $\Phi$  есть функция не многогранника  $P$ , а только чисел  $h_i$ .

В связи с этим замечанием можно считать, что начало находится внутри всех рассматриваемых многогранников  $P$ . Тогда все  $h_i$  положительны, и сумма  $\Phi$  состоит лишь из неотрицательных членов. Поэтому, если  $i$ -я грань многогранника  $P$  не вырождается, т. е.  $F_i > 0$ , то из (3) следует, что  $h_i \leq 3V(P^1)/F_i^1$ . Это означает, что все «опорные числа» переменного многогранника  $P$ , соответствующие невырождающимся граням многогранника  $P^1$ , ограничены.

Пусть теперь  $i$ -я грань многогранника  $P^1$  вырождается, так что  $F_i^1 = 0$ . Тогда соответствующее слагаемое в линейной форме  $\Phi$  исчезает и на число  $h_i$  не налагаются никакие ограничения. Тем не менее истинное  $i$ -е опорное число многогранника  $P$  будет ограничено.

Действительно, допустим противное. Тогда как бы далеко ни отодвигать  $i$ -ю плоскость  $Q_i$ , она всегда будет касаться переменного многогранника  $P$ . Поэтому, если отодвинуть ее в бесконечность, многогранник  $P$  станет бесконечным. Это означает, что все плоскости, кроме  $Q_i$ , ограничивают бесконечный многогранник, и их нормали направлены в одно полупространство. Но в таком случае эти плоскости ни при каком их расположении относительно начала не могут ограничить конечный многогранник. Между тем, поскольку  $i$ -я грань на многограннике  $P^1$  вырождается, то плоскость  $Q_i$

не участвует в ограничении этого многогранника: он ограничен уже всеми остальными плоскостями. Получающееся противоречие показывает, что истинное  $i$ -е опорное число многогранника  $P$  должно быть ограничено.

Из доказанного следует, что все истинные опорные числа многогранников  $P$  с условием (3) ограничены, а следовательно, и сами многогранники ограничены. Поэтому среди них существует многогранник  $P^0$  наибольшего объема.

Речь идет о максимуме объема  $V$  при условии (3), т. е. об относительном экстремуме. Так как по лемме 5 объем есть дифференцируемая функция чисел  $h_i$ , то, согласно известному правилу Лагранжа, при максимуме должно быть

$$\frac{\partial V}{\partial h_i} = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial h_i} \quad (i = 1, \dots, r)$$

или так как  $\partial V / \partial h_i = F_i$  и  $\partial \Phi / \partial h_i = F_i^1$ , то

$$F_i = \lambda F_i^1 \quad (i = 1, \dots, r). \quad (4)$$

Это означает, что площади граней максимального многогранника и данного  $P^1$  пропорциональны. Но при подобном увеличении многогранника  $P^1$  в  $\sqrt{\lambda}$  раз получим многогранник  $\sqrt{\lambda}P^1$  с площадями граней, равными  $\lambda F_i$ . Поэтому равенства (4) означают, что максимальный многогранник  $P$  и многогранник  $\sqrt{\lambda}P^1$  имеют попарно параллельные и равновеликие грани. В таком случае, согласно теореме 2 § 3 главы VI, эти многогранники равны и параллельно расположены. Приводя их параллельным переносом к совпадению, получим, что их опорные числа равны. Поэтому если  $h_i$  — опорные числа максимального многогранника, то  $h_i = \sqrt{\lambda}h_i^1$ . Подставляя эти значения в (3), получим  $\lambda = 1$ , т. е. максимальный многогранник равен данному  $P^1$ , что и требовалось доказать.

4. Докажем теперь саму теорему 2:

Для всяких двух многогранников  $P^0, P^1$

$$V^3(P^0 P^1 P^1) \geq V(P^0 P^0 P^0) V^2(P^1 P^1 P^1)$$

и знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда многогранники гомотетичны.

Пусть  $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_r$  — все попарно различные внешние нормали к истинным граням многогранников  $P^0$  и  $P^1$ . Рассмотрим многогранники  $P$ , ограничиваемые плоскостями с нормальными  $\mathbf{n}_i$  и такие, что

$$\sum_{i=1}^r h_i F_i^1 = \sum_{i=1}^r h_i^1 F_i^1 = 3V(P^1). \quad (5)$$



(Здесь и дальше суммирование распространяется по всем  $i$  от 1 до  $r$ , потому что введение лишних векторов  $\mathbf{n}_i$  не меняет сумм: соответствующие им грани вырождаются, т. е.  $F_i^1 = 0$ .) Положим  $\mu V(P^0 P^1 P^1) = V(P^1)$ , т. е. по формулам (2) и (5) для  $V(P^0 P^1 P^1)$  и  $V(P^1)$

$$\mu = \frac{\sum h_i^1 F_i^1}{\sum h_i^0 F_i^1}. \quad (6)$$

Если подвергнуть многогранник  $P^0$  подобному увеличению в  $\mu$  раз с центром подобия в начале, то получим многогранник  $\mu P^0$  с опорными числами  $\mu h_i^0$ . Из определения  $\mu$  по формуле (6) следует

$$\sum \mu h_i^0 F_i^1 = \sum h_i^1 F_i^1,$$

т. е. многогранник  $\mu P^0$  содержится среди многогранников  $P$ . Так как по теореме 2а среди многогранников  $P$  наибольший объем имеет многогранник  $P^1$ , то

$$V(\mu P^0) \leq V(P^1) \quad (7)$$

и  $V(\mu P^0) = V(P^1)$  тогда и только тогда, когда многогранник  $\mu P^0$  равен и параллелен  $P^1$ .

При подобном увеличении многогранника в  $\mu$  раз его объем умножается на  $\mu^3$ . Поэтому из (7), имея в виду определение  $\mu$ , получаем

$$V(P^1) \geq \mu^3 V(P^0) = \frac{V^3(P^1)}{V^3(P^0 P^1 P^1)} V(P^0),$$

или

$$V^3(P^0 P^1 P^1) \geq V^2(P^1) V(P^0),$$

и, согласно условию равенства в формуле (7), здесь равенство имеет место тогда и только тогда, когда  $\mu P^0 = P^1$ , т. е. когда  $P^0$  и  $P^1$  гомотетичны. Таким образом, теорема 2 доказана, а так как в п<sup>о</sup> 2 было выяснено, что в ней содержится теорема 1, то эта последняя также доказана.

**5.** Может показаться, что такой путь доказательства теоремы 1 слишком сложен. Не проще ли было бы сразу искать минимум площади при заданном объеме  $V$  и при данных направлениях граней? Сравнительно нетрудно доказать, что 1) этот минимум достигается и притом для такого многогранника, который имеет все невырождающиеся грани данных направлений, и 2) для многогранника, у которого все грани не вырождаются, площадь поверхности  $F$  есть дифференцируемая функция опорных чисел  $h_i$ . Тогда,

применяя к многограннику наименьшей площади правило Лагранжа, получим

$$\frac{\partial F}{\partial h_i} = \lambda \frac{\partial V}{\partial h_i} = \lambda F_i \quad (i = 1, \dots, r),$$

где  $F_i$  — площадь его  $i$ -й грани.

Однако доказательство того, что этим уравнениям удовлетворяет только многогранник, описанный около шара, оказывается довольно сложным. Поэтому, доказывая более общую теорему 2, мы выигрываем в простоте, не говоря уже о том, что теорема 2 содержит, помимо теоремы 1, также другие интересные следствия, о которых речь будет идти в §3.

**6.** Все результаты этого параграфа обобщаются в пространство любого числа измерений. В  $n$ -мерном пространстве мы определяем смешанный объем  $V(P^0 P^1 \dots P^1)$  многогранников  $P^0$  и  $P^1$  формулой

$$V(P^0 \underbrace{P^1 \dots P^1}_{n-1}) = \frac{1}{n} \sum_i h_i^0 F_i^1,$$

где  $h_i^0$  — опорные числа многогранника  $P^0$ , а  $F_i^1$  — «площади» граней многогранника  $P^1$ .

Теорема 2 формулируется тогда так: *для всяких двух  $n$ -мерных выпуклых многогранников*

$$V^n(P^0 P^1 \dots P^1) \geq V(P^0 \dots P^0) V^{n-1}(P^1 \dots P^1), \quad (8)$$

*причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда  $P^0$  и  $P^1$  гомотетичны.*

Из этой теоремы Минковского, так же как в п<sup>o</sup> 2, сразу следует минимальное свойство многогранника, описанного около шара.

Однако обобщение приведенного доказательства теоремы 2 в  $n$ -мерное пространство представляло бы собой пустую формальность! Дело в том, что теорема Минковского о равенстве многогранников, которой мы там воспользовались, доказывается в  $n$ -мерном пространстве на основании  $n$ -мерной теоремы 2. Другого ее доказательства пока не известно.

Следовательно, в  $n$ -мерном случае взаимосвязь этих теорем оказывается обратной, пока, конечно, не найдено независимое доказательство теоремы Минковского о равенстве многогранников. Полное исследование связей между указанными теоремами в  $n$ -мерном пространстве и доказательство  $n$ -мерной теоремы 2 (неравенство (8)) даются в следующем параграфе.

### § 3. СМЕШАННЫЕ ОБЪЕМЫ И НЕРАВЕНСТВО БРУННА

**1.** Мы будем рассматривать линейные комбинации выпуклых тел и прежде всего выпуклых многогранников в  $n$ -мерном пространстве (см. § 2 главы VI). Результаты, полученные для них в § 2 главы VI, буквально обобща-

ются на случай любого числа измерений, и на этом мы не будем останавливаться.

Напомним только, что если  $P_i$  — выпуклые многогранники, то

$$P = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_n P_n$$

также выпуклый многогранник и всякая его грань  $G$  есть такая же линейная комбинация тех граней  $G_i$  многогранников  $P_i$ , которые лежат в плоскостях, параллельных  $G$ . Здесь, как и всюду дальше, допускаются только неотрицательные коэффициенты  $\lambda_i$ . Параллельность плоскостей граней понимается в смысле параллельности внешних нормалей.

Грани  $G_i$ , дающие настоящую  $(n-1)$ -мерную грань  $G$ , могут вырождаться в  $(n-2)$ -мерные и т. д. Например, в трехмерном случае непараллельные ребра, лежащие в параллельных опорных плоскостях многогранников  $P_1, P_2$ , дают на  $P_1 + P_2$  грань в виде параллелограмма.

Отметим еще один простой факт:

Если  $h$  — опорное число грани  $G$ , а  $h_i$  — опорные числа граней  $G_i$ , то

$$h = \lambda_1 h_1 + \dots + \lambda_m h_m. \quad (1)$$

Действительно, если  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$  — векторы, идущие в точки на гранях  $G_1, \dots, G_m$ , то вектор

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{x}_m \quad (2)$$

идет в точку на грани  $G$ . По самому определению опорных чисел  $h = \mathbf{n}\mathbf{x}$ ,  $h_i = \mathbf{n}\mathbf{x}_i$ . Поэтому, умножая (2) на нормаль  $\mathbf{n}$ , получим (1).

**Теорема 1.** Пусть  $P^1, \dots, P^m$  — данные выпуклые многогранники в  $n$ -мерном пространстве и  $P = \lambda_1 P^1 + \dots + \lambda_m P^m$ , где  $\lambda_i$  — переменные неотрицательные числа. Объем  $V(P)$  многогранника  $P$  есть однородный многочлен  $n$ -й степени относительно  $\lambda_i$ . Здесь допускаются многогранники  $P_i$ , вырождающиеся в многогранники меньшего числа измерений. Их линейная комбинация может быть  $n$ -мерной, как, например, линейная комбинация некопланарных отрезков.

Доказательство проводится индукцией по числу измерений  $n$ . При  $n = 1$  теорема очевидна, так как в этом случае  $P^i$  суть отрезки на прямой и длина отрезка  $\sum \lambda_i P^i$  равна такой же линейной комбинации их длин.

Допустим, что теорема верна в  $(n-1)$ -мерном пространстве. Пусть многогранники  $P^i$  лежат в  $n$ -мерном пространстве. Объем многогранника  $P = \sum \lambda_i P^i$  выражается через его опорные числа и площади граней формулой

$$V(P) = \frac{1}{n} \sum_j h_j F_j. \quad (3)$$

Грани многогранника  $P$  суть такие же линейные комбинации параллельных граней многогранников  $P^i$ . Так как параллельный перенос «слагаемых» вызывает также лишь параллельный перенос линейной комбинации, то можно считать, что каждая грань многогранника  $P$  есть линейная комбинация многогранников в  $(n - 1)$ -мерном пространстве. Поэтому по предположению индукции ее  $(n - 1)$ -мерный объем, т. е. площадь  $F_j$ , есть однородный многочлен  $(n - 1)$ -й степени относительно  $\lambda_j$ .

Но согласно формуле (1), опорные числа  $h_j$  многогранника  $P$  являются линейными функциями от  $\lambda_i$ .

Отсюда следует, что правая часть формулы (3) есть однородный многочлен  $n$ -й степени относительно  $\lambda_i$  и теорема доказана.

Однородный многочлен, каким является объем многогранника  $P = \sum_{i=1}^m \lambda_i P^i$ , принято записывать в форме

$$V(P) = \sum_{i_1, \dots, i_n=1}^n \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_n} V_{i_1 i_2 \dots i_n}, \quad (3')$$

где каждый индекс  $i_j$  пробегает независимо от других все значения от 1 до  $m$ . Поэтому в такой записи одно и то же произведение  $\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_n}$  встречается столько раз, сколько возможно перестановок индексов  $i_1, \dots, i_n$ . Коэффициенты  $V_{i_1 i_2 \dots i_n}$  определяются при этом так, что они не зависят от порядка индексов.

Возьмем какое-либо произведение  $\lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \dots \lambda_{i_n}$ . Положим в формуле  $P = \sum \lambda_i P^i$  все  $\lambda_i$  равными нулю, кроме тех, которые входят в избранное произведение. Тогда соответствующие многогранники  $P^i$  не будут вовсе входить в комбинацию. Отсюда вытекает: коэффициент  $V_{i_1 \dots i_n}$  при произведении  $\lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_n}$  зависит лишь от многогранников  $P_{i_1}, \dots, P_{i_n}$ . Так как не все  $i_1, \dots, i_n$  обязаны быть различными, то и среди этих многогранников могут быть одинаковые, т. е. один и тот же многогранник повторяется несколько раз.

В частности, если взять  $\lambda_1 = l$ , а все прочие  $\lambda_i = 0$ , то  $P = P^1$ , и из (3') следует, что коэффициент  $V_{1 \dots 1}$  есть объем многогранника  $P^1$ .

Вообще коэффициент  $V_{i_1 \dots i_n}$  называется *смешанным объемом* многогранников  $P^{i_1}, \dots, P^{i_n}$  и записывается  $V(P^{i_1} \dots P^{i_n})$ . По определению он не зависит от порядка индексов  $i_j$ , т. е. является симметрической функцией многогранников  $P^{i_j}$ .

Мы ограничимся линейными комбинациями двух многогранников. В этом случае формула (3') может быть написана в виде

$$V(\lambda_1 P^1 + \lambda_2 P^2) = \sum_{k=1}^n \lambda_1^{n-k} \lambda_2^k C_n^k V(\underbrace{P^1 \dots P^1}_{n-k} \underbrace{P^2 \dots P^2}_k). \quad (4)$$

**2.** Покажем теперь, что смешанный объем  $V(P^1 P^2 \dots P^2)$  совпадает со смешанным объемом, введенным в § 2. Это утверждение заключено в следующей теореме:

**Теорема 2.** Если  $V(P^0 P^1 \dots P^1)$  — смешанный объем в смысле формулы (4),  $F_i^1$  — площади граней многогранника  $P^1$ , а  $h_i^0$  — соответствующие опорные числа многогранника  $P^0$ , то

$$V(P^0 P^1 \dots P^1) = \frac{1}{n} \sum_i h_i^0 F_i^1. \quad (5)$$

Для доказательства заметим, что объем многогранника  $P = P^1 + \lambda P^0$  есть дифференцируемая функция его опорных чисел  $h_i$  и что

$$\frac{\partial V(P)}{\partial h_i} = F_i,$$

где  $F_i$  — площадь соответствующей грани (лемма 5 § 2). Вместе с тем согласно (1)

$$h_i = h_i^1 + \lambda h_i^0.$$

Поэтому производная объема  $V(P)$  по  $\lambda$  будет

$$\frac{\partial V(P)}{\partial \lambda} = \sum \frac{\partial V}{\partial h_i} \frac{dh_i}{d\lambda} = \sum h_i^0 F_i.$$

Но  $P = P^1 + \lambda P^0$  при  $\lambda \rightarrow 0$  сходится к  $P^1$ , так что  $F_i \rightarrow F_i^1$ . Поэтому

$$\left( \frac{\partial V}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0} = \sum h_i^0 F_i^1. \quad (6)$$

Вместе с тем по определению смешанного объема (формула (4))

$$V(P) = V(P^1 \dots P^1) + n\lambda V(P^0 P^1 \dots P^1) + \dots,$$

где точками обозначены члены с  $\lambda$  во второй степени и выше. Из этой формулы следует, что

$$\left( \frac{\partial V}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=0} = nV(P^0 P^1 \dots P^1).$$

А это вместе с (6) доказывает теорему.

**3.** Теорема 1 о том, что объем линейной комбинации есть однородный многочлен, легко обобщается с многогранников на любые выпуклые тела.

Пусть  $H_1, \dots, H_m$  — данные выпуклые тела и  $H = \lambda_1 H_1 + \dots + \lambda_m H_m$  — их линейная комбинация с неотрицательными коэффициентами. Легко убедиться, что если многогранники  $P_1, \dots, P_m$  сходятся соответственно к телам  $H_1, \dots, H_m$ , то их линейная комбинация  $P = \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_m P_m$  сходится к  $H$ . Это значит, что при всяких  $\lambda_i$  объем  $V(P)$  сходится к объему  $V(H)$ . А так как  $V(P)$  есть многочлен данной степени, то и  $V(H)$  есть многочлен той же степени. Этим доказана

**Теорема 1а.** *Объем линейной комбинации выпуклых тел с неотрицательными коэффициентами есть однородный многочлен  $n$ -й степени относительно этих коэффициентов.*

Коэффициенты этого многочлена также называются смешанными объемами и записываются совершенно так же.

В связи с этим во многих вопросах, касающихся смешанных объемов, нет необходимости выделять многогранники среди всех выпуклых тел.

(Теорема 2 также обобщается на любые выпуклые тела с заменой в формуле (5) суммы на интеграл.)

4. Немецкий геометр Г. Брунн в 1887 г.

[252] доказал следующую теорему, которая в соединении с теоремами 1, 2 и послужила началом всей «теории смешанных объемов»:

**Теорема 3.** *Если  $H_0, H_1$  — любые выпуклые тела,  $H_t = (1-t)H_0 + tH_1$  и  $0 < t < 1$ , то для объемов имеет место следующее неравенство («неравенство Брунна»):*

$$\sqrt[n]{V(H_t)} \geq (1-t)\sqrt[n]{V(H_0)} + t\sqrt[n]{V(H_1)}, \tag{7}$$

причем, как позже уточнил Г. Минковский, *знак равенства стоит здесь тогда и только тогда, когда тела  $H_0$  и  $H_1$  гомотетичны* (в этом случае и тело  $H_t$  гомотетично им при любом  $t$ ).

Напомним, что тело  $H_t$  есть геометрическое место точек, делящих отрезки с концами в любых точках тел  $H_0, H_1$  в отношении  $t : (1-t)$ .

При данных  $H_0, H_1$  величина  $\sqrt[n]{V(H_t)}$  есть функция от  $t$ . Изобразив ее графически (рис. 144), мы видим, что неравенство (7) означает, что график функции  $\sqrt[n]{V(H_t)}$  проходит над хордой, соединяющей его концы. При любых  $t_1, t, t_2$  с условием  $0 < t_1 < t < t_2 < 1$

$$H_t = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} H_{t_1} + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} H_{t_2}, \tag{8}$$

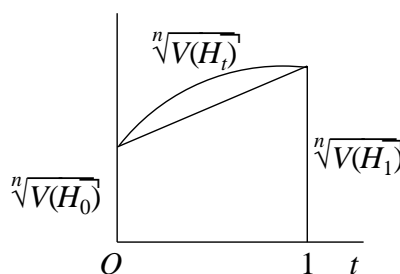


Рис. 144

что проверяется прямым вычислением на основании простых алгебраических свойств линейной комбинации тел. Поэтому на основании того же неравенства (7), примененного теперь к  $H_{t_1}$ ,  $H_{t_2}$  и  $H_t$ , убеждаемся, что график функции  $\sqrt[n]{V(H_t)}$  лежит также над хордой, соединяющей точки, соответствующие взятым  $t_1$  и  $t_2$ , т. е. он лежит над любой своей хордой и тем самым представляет собой выпуклую кривую.

Таким образом, теорема Брунна может быть сформулирована так:

$\sqrt[n]{V(H_t)}$ , где  $H_t = (1-t)H_0 + tH_1$  и  $0 \leq t \leq 1$ , есть выпуклая функция от  $t$ , сводящаяся к линейной лишь в том случае, когда тела  $H_0$  и  $H_1$  гомотетичны.

Доказательство этой замечательной теоремы мы наметим потом; оно, кстати, не очень сложно. Сейчас же выясним ее связь с неравенством Минковского, введенным в § 2.

5. Докажем, что из теоремы Брунна следует неравенство Минковского

$$V^n(H_1 H_0 \dots H_0) \geq V(H_1 \dots H_1) \cdot V^{n-1}(H_0 \dots H_0), \quad (9)$$

причем знак равенства стоит здесь тогда и только тогда, когда  $H_0$  и  $H_1$  гомотетичны. Здесь  $V(H_0 \dots H_0) = V(H_0)$ ,  $V(H_1, \dots, H_1) = V(H_1)$  — объемы тел  $H_0$ ,  $H_1$ .

Так как график функции  $\sqrt[n]{V(H_t)}$  лежит над хордой, то

$$f(t) = \sqrt[n]{V(H_t)} - (1-t)\sqrt[n]{V(H_0)} - t\sqrt[n]{V(H_1)} \geq 0.$$

А так как  $f(0) = 0$ , то производная  $f'(0) \geq 0$  и в силу выпуклости функции  $f(t)$ ,  $f'(0) = 0$  лишь в том случае, когда  $f(t) \equiv 0$ , т. е. когда тела  $H_0$  и  $H_1$  гомотетичны.

Покажем, что это неравенство  $f'(0) \geq 0$  и есть неравенство Минковского (9).

Согласно формуле (4), которая, как показано, верна для любых выпуклых тел, объем тела  $H_t = (1-t)H_0 + tH_1$  будет

$$V(H_t) = \sum_{k=1}^n (1-t)^{n-k} t^k C_n^k V_k,$$

где

$$V_k = V(\underbrace{H_0 \dots H_0}_{n-k} \underbrace{H_1 \dots H_1}_k).$$

Пользуясь этой формулой, легко вычислить  $f'(0)$ ; при этом оказывается, что

$$f'(0) = \frac{V_1 - V_0}{V_0^{\frac{n-1}{n}}} + V_0^{\frac{1}{n}} - V_n^{\frac{1}{n}}.$$

Поэтому неравенство  $f'(0) \geq 0$  равносильно неравенству  $V_1 \geq V_0^{\frac{n-1}{n}} V_n^{\frac{1}{n}}$  или  $V_1^n \geq V_0^{n-1} V_n$ , что в принятых нами обозначениях и есть неравенство Минковского. Знак равенства стоит в нем тогда, когда  $f'(0) = 0$ , т. е. когда  $H_0$  и  $H_1$  гомотетичны.

Докажем теперь, что и обратно, *неравенство Брунна следует из неравенства Минковского.*

Из предыдущего вывода ясно, что неравенство Минковского эквивалентно условию  $f'(0) \geq 0$ , где функция  $f(t)$  есть разность обеих частей неравенства Брунна. Это условие означает, что график функции  $\sqrt[n]{V(H_t)}$  хотя бы в начальной точке идет над хордой. Но в силу формулы (8) при любых  $t_1 < t_2$  тело  $H_t$  с  $t_1 < t < t_2$  представимо как комбинация тел  $H_{t_1}$ ,  $H_{t_2}$  с коэффициентами, в сумме равными единице и, следовательно, имеющими вид  $1 - s$ ,  $s$ . Поэтому всякое  $t_1$  может играть роль начальной точки  $s = 0$ , т. е. предыдущее замечание оказывается применимым в любой точке графика функции  $\sqrt[n]{V(H_t)}$ , если воспользоваться неравенством Минковского для тел  $H_{t_1}$ ,  $H_{t_2}$ . Следовательно, график функции  $\sqrt[n]{V(H_t)}$  всюду идет над хордой. А в этом и состоит неравенство Брунна.

Если в неравенстве Минковского (9) именно для тел  $H_0$ ,  $H_1$  стоит знак равенства, то  $f'(0) = 0$  и тогда ввиду выпуклости графика функции  $\sqrt[n]{V(H_t)}$  он неизбежно сводится к отрезку, т. е. и в неравенстве Брунна стоит знак равенства.

В §2 неравенство Минковского было доказано для трехмерных многогранников. Теперь в силу полученного результата мы можем вывести отсюда неравенство Брунна для этих многогранников, а очевидным предельным переходом и для любых трехмерных выпуклых тел. Однако условие о знаке равенства не может быть доказано предельным переходом.

**6.** Теперь выясним еще связь между неравенством Минковского и его же теоремой о равенстве многогранников с равновеликими гранями.

В §2 мы получили неравенство Минковского для трехмерных многогранников, пользуясь простыми соображениями о максимуме и существенно используя названную теорему о равенстве многогранников. Легко видеть, что все приведенные там выводы применимы в пространстве любого числа измерений. Это позволяет утверждать, что *неравенство Минковского для  $n$ -мерных многогранников (вместе с условием обращения его в равенство) вытекает из теоремы о равенстве  $n$ -мерных многогранников с параллельными и равновеликими гранями.*

Покажем, что и обратно, *последняя теорема следует из неравенства Минковского и условия обращения его в равенство.*

Пусть многогранники  $P^0$ ,  $P^1$  имеют соответственно параллельные и равновеликие грани, так что  $F_i^0 = F_i^1$ . Тогда для смешанного объема



$V(P^0 P^1 \dots P^1)$  имеем (теорема 2)

$$V(P^0 P^1 \dots P^1) = \frac{1}{n} \sum_i h_i^0 F_i^1 = \frac{1}{n} \sum_i h_i^0 F_i^0 = V(P^0 \dots P^0). \quad (10)$$

По неравенству Минковского

$$V^n(P^0 P^1 \dots P^1) \geq V(P^0 \dots P^0) V^{n-1}(P^1 \dots P^1), \quad (11)$$

а отсюда вследствие (10)

$$V(P^0 \dots P^0) \geq V(P^1 \dots P^1). \quad (12)$$

Но, меняя ролями  $P^0$  и  $P^1$ , мы точно так же получим, что  $V(P^1 \dots P^1) \geq V(P^0 \dots P^0)$ . Следовательно,

$$V(P^0 \dots P^0) = V(P^1 \dots P^1).$$

А тогда, как ясно из вывода неравенства (12), знак равенства должен стоять также в неравенстве Минковского (11). Поэтому многогранники  $P^0$ ,  $P^1$  должны быть гомотетичны. Но так как к тому же площади их граней равны, то  $P^0$  и  $P^1$  равны и параллельно расположены.

Итак, неравенство Брунна через неравенство Минковского ведет к теореме о равенстве многогранников с равновеликими параллельными гранями<sup>11)</sup>. Через то же неравенство Минковского оно приводит к максимальному свойству многогранников, описанных около шара, как показано в § 2. Остается доказать неравенство Брунна.

**7.** Доказательство теоремы 3 — неравенства Брунна с дополнением Минковского — короче всего вести индукцией по числу измерений. В одномерном пространстве, т. е. на прямой, теорема тривиальна: здесь неравенство всегда сводится к равенству, которое очевидно из самого определения линейной комбинации отрезков.

Допустим, что теорема верна в  $(n-1)$ -мерном пространстве, и докажем ее для  $n$ -мерного пространства. Для этого покажем сначала, что достаточно доказать следующее:

<sup>11)</sup> Аналогично доказывается приведенная в § 6 гл. VI общая теорема о равенстве выпуклых тел с равными поверхностными функциями. Если  $F_i(M)$  — поверхностная функция тела  $H_i$ , то аналогично теореме 2  $V(H_0 H_1 \dots H_1) = \frac{1}{n} \int h_0(\mathbf{n}) F_1(dM)$ . Поэтому из равенства  $F_0(M) = F_1(M)$  следует равенство  $V_0(H_0 H_1 \dots H_1) = V(H_0 \dots H_0)$ , а в силу неравенства Минковского  $V(H_0 \dots H_0) \geq V(H_1 \dots H_1)$ , и повторяется то же рассуждение, что для многогранников.

**Теорема 3\*.** *Если выпуклые тела  $H_0$  и  $H_1$  имеют равные объемы, то при любом  $t > 0$  и  $< 1$  тело  $H_t = (1 - t)H_0 + tH_1$  имеет больший объем, кроме того случая, когда тела  $H_0$  и  $H_1$  равны и параллельно расположены, так что  $H_t$  также равно им.*

Покажем, что общая формулировка теоремы 3 вытекает из этой частной. Пусть  $H_0$  и  $H_1$  — любые выпуклые тела; тогда тела

$$K_0 = \frac{1}{\sqrt[n]{V_0}} H_0 \quad \text{и} \quad K_1 = \frac{1}{\sqrt[n]{V_1}} H_1$$

имеют объем, равный единице. Поэтому, согласно частной формулировке теоремы Брунна, должно быть

$$V(K_s) \geq 1, \tag{13}$$

где  $K_s = (1 - s)K_0 + sK_1$ ,  $0 < s < 1$ . Положим

$$s = \frac{tV_1^{\frac{1}{n}}}{(1 - t)V_0^{\frac{1}{n}} + tV_1^{\frac{1}{n}}}.$$

Тогда

$$K_s = \frac{(1 - t)H_0 + tH_1}{(1 - t)V_0^{\frac{1}{n}} + tV_1^{\frac{1}{n}}} = \frac{H_t}{(1 - t)V_0^{\frac{1}{n}} + tV_1^{\frac{1}{n}}}.$$

Поэтому (13) равносильно тому, что

$$V(H_t) \geq \left[ (1 - t)V_0^{\frac{1}{n}} + tV_1^{\frac{1}{n}} \right]^n,$$

а это и есть общее неравенство Брунна. При этом знак равенства стоит здесь только тогда, когда он стоит в (13), т.е. когда  $K_0$  и  $K_1$  равны и параллельны, а значит,  $H_0$  и  $H_1$  гомотетичны.

**8.** Теперь, предполагая, что теорема 3 верна для  $(n - 1)$ -мерных тел, докажем для  $n$ -мерных тел теорему 3\*.

Пусть  $H_0, H_1$  — выпуклые тела в  $n$ -мерном пространстве, имеющие равные объемы; будем считать эти объемы равными единице. Проведем какую-либо плоскость  $T$  и перенесем тела  $H_0, H_1$  так, чтобы плоскость  $T$  стала опорной к ним обоим. (Это не меняет объема тела  $(1 - t)H_0 + tH_1$ .) Введем переменную  $v$ ,  $0 \leq v \leq 1$ , и будем сопоставлять друг другу сечения тел  $H_0, H_1$  плоскостями, параллельными  $T$  и отсекающими от тел  $H_0, H_1$  равные объемы  $v$ . Расстояния этих сечений  $G_0, G_1$  тел  $H_0, H_1$  от плоскости  $T$  будут

функциями от  $v$ . Мы их обозначим  $x_0(v)$ ,  $x_1(v)$ . Площади сечений обозначим  $F_0(v)$ ,  $F_1(v)$ . Из того, что  $v$  есть объем, отсекаемый соответственно  $G_0$  и  $G_1$ , следует, что  $F_0 dx_0 = dv$ ,  $F_1 dx_1 = dv$  и, следовательно,

$$\frac{dx_0}{dv} = \frac{1}{F_0}, \quad \frac{dx_1}{dv} = \frac{1}{F_1}. \quad (14)$$

Линейная комбинация сечений  $G_0$ ,  $G_1$ :

$$G_t = (1-t)G_0 + tG_1,$$

очевидно, содержится в теле  $H_t$ . Она будет лежать в плоскости, параллельной основной плоскости  $T$ , на расстоянии  $x_t(v)$  от нее, причем

$$x_t(v) = (1-t)x_0(v) + tx_1(v). \quad (15)$$

Если  $F_t(v)$  — площадь фигуры  $G_t$ , то для объема тела  $H_t$  имеем неравенство

$$V(H_t) \geq \int_0^1 F_t(v) dx_t(v) = \int_0^1 F_t(v) x_t'(v) dv. \quad (16)$$

По предположению индукции неравенство Брунна применимо к сечениям  $G_0$ ,  $G_1$  и потому

$$F_t(v) \geq \left[ (1-t) F_0^{\frac{1}{n-1}}(v) + t F_1^{\frac{1}{n-1}}(v) \right]^{n-1}. \quad (17)$$

Кроме того, в силу формул (14) и (15)

$$\frac{dx_t}{dv} = \frac{1-t}{F_0} + \frac{t}{F_1}. \quad (18)$$

На основании (17), (18) из (16) получаем, что

$$V(H_t) \geq \int_0^1 \left[ (1-t) F_0^{\frac{1}{n-1}} + t F_1^{\frac{1}{n-1}} \right]^{n-1} \left[ \frac{1-t}{F_0} + \frac{t}{F_1} \right] dv. \quad (19)$$

Покажем, что подынтегральная функция всегда  $\geq 1$ , т. е. при любых  $F_0, F_1 > 0$  и при  $0 < t < 1$

$$\left[ (1-t) F_0^{\frac{1}{n-1}} + t F_1^{\frac{1}{n-1}} \right]^{n-1} \left[ \frac{1-t}{F_0} + \frac{t}{F_1} \right] \geq 1, \quad (20)$$

причем равенство имеет место, лишь если  $F_0 = F_1$ .

Деля и умножая на  $F_0$  и полагая  $F_1/F_0 = \xi$ , получим, что левая часть этого неравенства есть

$$f(\xi) = \left[1 - t + t\xi^{\frac{1}{n-1}}\right]^{n-1} \left(1 - t + \frac{t}{\xi}\right).$$

При  $\xi = 0$  и при  $\xi = \infty$   $f(\xi) = \infty$ . Поэтому при  $\xi > 0$   $f(\xi)$  имеет минимум. Вычисляя производную, получаем

$$f'(\xi) = \frac{t(1-t)}{\xi^2} \left(1 - t + t\xi^{\frac{1}{n-1}}\right)^{n-2} \left(\xi^{\frac{-n}{n-1}} - 1\right),$$

так что при  $0 < t < 1$  и  $\xi > 0$  производная обращается в нуль лишь при  $\xi = 1$ . Этому значению  $\xi$ , следовательно, и отвечает минимум  $f(\xi)$ , равный  $f(1) = 1$ . Поэтому  $f(\xi) \geq 1$ , причем  $f(\xi) = 1$ , лишь если  $\xi = 1$ . А это и есть неравенство (20) с сопровождающим его условием.

Из этого неравенства следует, что интеграл (19) не меньше единицы и тем самым  $V(H_t) \geq 1$ , а это и требовалось доказать.

Покажем теперь, что  $V(H_t) = 1$  лишь тогда, когда тела  $H_0, H_1$  равны и параллельно расположены.

Для этого проследим цепь неравенств, приведшую нас к тому, что  $V(H_t) \geq 1$ . Если  $V(H_t) = 1$ , то в каждом из них должен стоять знак равенства. Поэтому должно быть  $f(\xi) = 1$ , т. е.  $\xi = 1$ , или, иными словами,

$$F_0(v) = F_1(v). \tag{21}$$

Но тогда из формул (14) при условии  $x_0(0) = x_1(0) = 0$  (т. е. при условии, что тела  $H_0$  и  $H_1$  упираются в одну и ту же плоскость  $T$ ) вытекает, что

$$x_0(v) = x_1(v), \tag{22}$$

т. е. плоскости, отсекающие от тел  $H_0, H_1$  равные объемы, совпадают.

Отсюда следует, что центры тяжести обоих тел находятся на одной высоте над плоскостью  $T$ <sup>12)</sup>. Поэтому, перенося тело  $H_0$  так, чтобы центры тяжести обоих тел совпали, мы оставим плоскость  $T$  опорной к обоим.

Но плоскость  $T$  была выбрана произвольно! Поэтому, когда центры тяжести совпадают, то и все опорные плоскости тел  $H_0, H_1$  должны совпадать, а значит, совпадают и сами эти тела. Следовательно, до переноса они были равными и параллельно расположенными.

Итак, теорема Брунна с дополнением Минковского доказана. Тем самым доказаны неравенство Минковского, теорема о равенстве многогранников с

<sup>12)</sup> Это очевидно из формулы  $X = \frac{1}{V} \int xF dx$  для координаты центра тяжести.

одинаковыми площадями и направлениями граней, а также максимальное свойство многогранника, описанного около шара, причем все это теперь уже в  $n$ -мерном пространстве.

**9.** Выведем еще общее выражение для смешанного объема нескольких многогранников, аналогичное выражению (5) для смешанного объема  $V(P^0 P^1 \dots P^1)$ .

**Теорема 4.** Пусть  $P^1, \dots, P^n$  — выпуклые многогранники и  $V(P^1, P^2, \dots, P^n)$  — их смешанный объем, т. е. деленный на  $n!$  коэффициент при произведении  $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$  в выражении объема многогранника  $P = \lambda_1 P^1 + \dots + \lambda_n P^n$ . Пусть  $Q_i^1, Q_i^2, \dots, Q_i^n$  — грани многогранников  $P^1, P^2, \dots, P^n$ , дающие в своей комбинации  $(n-1)$ -мерную грань  $Q_i = \lambda_1 Q_i^1 + \dots + \lambda_n Q_i^n$  многогранника  $P$ . Тогда, если  $F(Q_i^2 \dots Q_i^n)$  обозначает смешанную площадь (смешанный  $(n-1)$ -мерный объем) граней  $Q_i^2, \dots, Q_i^n$ , то

$$V(P^1 \dots P^n) = \frac{1}{n} \sum_i h_i^1 F(Q_i^2 \dots Q_i^n). \quad (23)$$

Положим  $\lambda_2 P^2 + \dots + \lambda_n P^n = P^*$ , тогда  $P = \lambda_1 P^1 + P^*$  и

$$V(P) = V(P^* \dots P^*) + n \lambda_1 V(P^1 P^* \dots P^*) + \dots \quad (24)$$

По теореме 2

$$V(P^1 P^* \dots P^*) = \frac{1}{n} \sum h_i^1 F(Q_i^* \dots Q_i^*),$$

а так как грань  $Q_i^*$  есть линейная комбинация граней  $Q_i^2, \dots, Q_i^n$ , то

$$V(P^1 P^* \dots P^*) = \sum_{j_1, \dots, j_{n-1}=2}^n \lambda_{j_1} \dots \lambda_{j_{n-1}} \frac{1}{n} \sum_i h_i^1 F(Q_i^{j_1} \dots Q_i^{j_{n-1}}). \quad (25)$$

Деленный на  $(n-1)!$  коэффициент при произведении  $\lambda_1 \dots \lambda_n$  будет здесь равен

$$\frac{1}{n} \sum_i h_i^1 F(Q_i^2 \dots Q_i^n).$$

Но вследствие (24) это же будет деленный на  $n!$  коэффициент в многочлене  $V(P) = \sum \lambda_{j_1} \lambda_{j_2} \dots \lambda_{j_n} V(P^{j_1} \dots P^{j_n})$  при произведении  $\lambda_1 \dots \lambda_n$ . Тем самым формула (23) доказана.

В частности, некоторые из многогранников  $P^j$  могут совпадать, так что формула (23) применима в любом случае. Так, для простейшего смешанного объема  $V(P^0 P^1 \dots P^1)$  получаем выражения

$$V(P^0 P^1 \dots P^1) = \frac{1}{n} \sum_i h_i^0 F(Q_i^1 \dots Q_i^1) = \frac{1}{n} \sum_i h_i^1 F(Q_i^0 Q_i^1 \dots Q_i^1). \quad (26)$$

**10.** «Теория смешанных объемов» была построена Г. Минковским в его работе [323]. Там содержатся, помимо изложенных нами результатов, еще другие неравенства между смешанными объемами и их применения к экстремальным задачам теории выпуклых тел, а также к теоремам единственности выпуклых тел с данными функциями кривизны.

Разнообразие и оригинальность устанавливаемых здесь связей между отдельными трудными задачами делают эту теорию смешанных объемов одной из интереснейших глав геометрии. Обзор ее результатов, полученных до 1934 г., дан в книге [250]. Дальнейшее развитие теории осуществлено в моей работе [4–7]. (Одновременно часть тех же результатов была получена В. Фенхелем [277]<sup>13)</sup>.) Работы в плане этой теории время от времени появляются и теперь<sup>14)</sup>.

В §3 главы XI будет изложено применение теории смешанных объемов к доказательству теорем о жесткости многогранников<sup>15)</sup>.

---

<sup>13)</sup> Различные доказательства неравенства Александра — Фенхеля для смешанных объемов теперь можно найти также в [70, 288, 309, 343]. — Прим. В. А. Залгаллера.

<sup>14)</sup> Время подтвердило обширность связей теории смешанных объемов с другими разделами математики, см. [274, 280, 288, 343]. — Прим. В. А. Залгаллера.

<sup>15)</sup> Исследования устойчивости некоторых неравенств [98, 287] дают иногда и новые доказательства теорем единственности и устойчивости в теории поверхностей. См. подробнее в [98]. — Прим. В. А. Залгаллера.

---

---

## Глава IX

### Многогранники с вершинами на данных лучах

---

---

#### § 1. ЗАМКНУТЫЕ МНОГОГРАННИКИ

1. Мы будем рассматривать замкнутые выпуклые многогранники, содержащие внутри данную точку  $O$  и такие, что все их вершины лежат на данных лучах  $e_1, \dots, e_n$ , исходящих из  $O$  по одной вершине на каждом луче. Для того чтобы при данных  $O$  и  $e_1, \dots, e_n$  такие многогранники существовали, необходимо и достаточно, чтобы лучи  $e_1, \dots, e_n$  не были направлены в одно (замкнутое) полупространство.

Действительно, если все лучи  $e_i$  идут в полупространство, ограниченное плоскостью  $Q$ , проходящей через точку  $O$ , то и многогранник с вершинами на этих лучах оказывается с одной стороны от плоскости  $Q$ , так что точка  $O$  не лежит внутри него. Если же лучи  $e_i$  не идут в одно полупространство, то, взяв на них точки  $A_i$  на равных расстояниях от  $O$  и построив выпуклую оболочку совокупности этих точек, получим многогранник  $P$  с вершинами  $A_i$ , вписанный в шар. Точка  $O$  будет лежать внутри него, потому что иначе через нее проходила бы плоскость, ограничивающая полупространство, содержащее в себе многогранник  $P$ . В это полупространство были бы тогда направлены все лучи  $e_i$ , вопреки условию.

В связи с этим замечанием мы будем неизменно предполагать, что данные лучи  $e_1, \dots, e_n$  не идут в одно полупространство.

2. Если лучи  $e_i$  заданы, то многогранник  $P$  полностью определяется расстояниями  $r_i$  его вершин от точки  $O$ . Эти числа  $r_i$  не могут быть произвольными; для того чтобы точка  $A_k$  на луче  $e_k$  была вершиной многогранника  $P$ , необходимо и достаточно, чтобы она не лежала в выпуклой оболочке совокупности остальных точек  $A_i$ . Это требование налагает определенные условия, которым должны удовлетворять числа  $r_i$ . Для вывода этих условий будем считать, что  $e_1, \dots, e_n$  обозначают не только сами лучи,

но и единичные векторы, указывающие их направления. Данную точку  $O$  мы считаем началом координат.

**Теорема 1.** *Для того чтобы данные положительные числа  $r_1, \dots, r_n$  могли служить расстояниями вершин выпуклого многогранника, лежащих на данных лучах  $e_1, \dots, e_n$  от начала координат, необходимо и достаточно выполнение следующего условия:*

если

$$e_k = \alpha_{ki_1} e_{i_1} + \alpha_{ki_2} e_{i_2} + \alpha_{ki_3} e_{i_3} \quad (1)$$

есть разложение одного из векторов  $e_i$  по трем другим с неотрицательными коэффициентами, то имеет место неравенство

$$\frac{1}{r_k} < \frac{\alpha_{ki_1}}{r_{i_1}} + \frac{\alpha_{ki_2}}{r_{i_2}} + \frac{\alpha_{ki_3}}{r_{i_3}}. \quad (2)$$

**Необходимость.** Пусть многогранник  $P$  имеет все вершины  $A_1, \dots, A_n$  на лучах  $e_1, \dots, e_n$ . Если  $r_1, \dots, r_n$  суть расстояния вершин от начала  $O$ , то векторы  $\overrightarrow{OA_i}$  равны  $r_i e_i$ . Пусть для вектора  $e_k$  имеет место разложение (1) с неотрицательными коэффициентами  $\alpha$ . Это означает, что луч  $e_k$  проходит в трехгранном угле, натянутом на лучи  $e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}$ .

Если точка  $A_k$  на луче  $e_k$  действительно является вершиной многогранника  $P$ , то она отделяется от начала плоскостью  $Q$ , проходящей через точки  $A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}$ . Поэтому если

$$nx = p \quad (3)$$

есть уравнение плоскости  $Q$  в нормальной форме, то для вектора  $\overrightarrow{OA_k} = r_k e_k$  имеем

$$ne_k r_k > p. \quad (4)$$

Подставляя сюда вместо  $e_k$  его разложение (1), получим

$$\alpha_{ki_1} (e_{i_1} n) + \alpha_{ki_2} (e_{i_2} n) + \alpha_{ki_3} (e_{i_3} n) > \frac{p}{r_k}. \quad (5)$$

Так как точка  $A_{i_j}$  лежит на плоскости  $Q$ , то вектор  $\overrightarrow{OA_{i_j}} = r_{i_j} e_{i_j}$  удовлетворяет уравнению (3). Поэтому

$$(ne_{i_j}) r_{i_j} = p \quad \text{или} \quad ne_{i_j} = \frac{p}{r_{i_j}}. \quad (6)$$

Подставляя эти выражения скалярных произведений  $ne_{i_j}$  в неравенство (5) и сокращая на  $p$ , получим неравенство (2).

**Достаточность.** Пусть положительные числа  $r_1, \dots, r_n$  удовлетворяют условию теоремы. Взяв точки  $A_1, \dots, A_n$  на лучах  $e_1, \dots, e_n$  и построив



выпуклую оболочку совокупности этих точек, получим многогранник  $P$ . Допустим, однако, что, например, точка  $A_1$  не будет его вершиной. Тогда она лежит в выпуклой оболочке совокупности остальных точек  $A_2, \dots, A_n$ .

Пусть  $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$  ( $k \leq n-1$ ) — вершины многогранника  $P$ . Так как по условию лучи  $e_i$  не идут в одно полупространство, то точка  $O$  лежит внутри многогранника  $P$  и потому он может быть разложен на тетраэдры с общей вершиной  $O$  и с остальными вершинами в точках  $A_{i_1}, \dots, A_{i_k}$ . Точка  $A_1$  оказывается в одном из этих тетраэдров, например в тетраэдре  $OA_2A_3A_4$ . Тогда она лежит по ту же сторону от плоскости его основания  $A_2A_3A_4$ , что и точка  $O$ , а потому для вектора  $\vec{OA_1} = r_1 e_1$  имеет место неравенство, обратное (4), т. е.

$$n e_1 r_1 \leq p. \quad (7)$$

Вместе с тем луч  $e_1$  оказывается в трехгранном угле, натянутом на лучи  $e_2, e_3, e_4$ , а потому его вектор  $e_1$  разлагается по векторам  $e_2, e_3, e_4$  с неотрицательными коэффициентами. Поэтому, применяя предыдущий вывод, исходя из неравенства (7), мы приходим к неравенству, обратному (2), что противоречит условию. Следовательно, точка  $A_1$  не может лежать в выпуклой оболочке совокупности остальных точек  $A_i$  и тем самым является вершиной многогранника  $P$ .

Доказанная таким образом теорема 1 выясняет, между прочим, строение многообразия замкнутых выпуклых многогранников с вершинами на данных лучах. Именно рассмотрим  $n$ -мерное пространство, в котором за координаты примем числа  $x_i = 1/r_i$ , обратные расстояниям вершин от начала  $O$ . Тогда неравенства (2) оказываются линейными и вместе с условиями положительности  $x_i > 0$  определяют в этом пространстве выпуклый многогранный угол с вершиной в начале координат. Каждой точке внутри него отвечает определенный многогранник. Подобным многогранникам с центром подобия в  $O$  отвечают точки на одной полупрямой, исходящей из начала в нашем  $n$ -мерном многогранном угле.

**3.** Нашей задачей является выяснить, в какой мере многогранник с вершинами на данных лучах определяется кривизнами своих вершин и какие значения можно заранее приписать этим кривизнам для того, чтобы соответствующий многогранник заведомо существовал. Кривизна вершины есть  $2\pi$  минус сумма плоских углов, сходящихся в ней, и она равна также площади сферического изображения вершины (§ 5 главы I). Поэтому у подобных многогранников кривизны соответственных вершин равны. Оказывается, что и обратно, из равенства кривизн вытекает подобие многогранников с вершинами на данных лучах; это есть частный случай следующей теоремы:

**Теорема 2.** Пусть вершины замкнутых выпуклых многогранников  $P$  и  $P'$  лежат на одних и тех же лучах, исходящих из точки  $O$ , лежащей внутри

этих многогранников. Тогда либо эти многогранники подобны (с центром подобия  $O$ ), либо на каждом из них есть такая вершина, что многогранный угол при этой вершине может быть путем параллельного переноса помещен внутри многогранного угла при соответственной вершине другого многогранника. (При этом мы считаем, что многогранный угол  $V_1$  помещается внутри угла  $V_2$ , если вершины их совпадают, и  $V_2$  содержит  $V_1$ , но не совпадает с ним. Многогранный угол рассматривается, как всегда, с неопределенно продолженными гранями.)

Можно сказать и иначе: если у многогранников  $P$  и  $P'$  многогранные углы при соответственных вершинах непомещаемы один внутри другого, то многогранники подобны.

Ввиду простой взаимосвязи между многогранным углом и его сферическим изображением эту теорему можно формулировать, говоря о возможности поместить сферическое изображение одной вершины в сферическом изображении другой. (Увеличению угла отвечает, очевидно, уменьшение сферического изображения.)

Так как сумма плоских углов объемлющего многогранного угла  $V_2$  больше, чем у объемлемого  $V_1$ , а кривизна соответственно меньше, то из равенства кривизн соответственных вершин многогранников  $P$  и  $P'$  сразу следует, что для них условие теоремы 2 о непомещаемости многогранных углов одного в другой выполнено. Следовательно, подобие многогранников  $P$  и  $P'$  с равными кривизнами вершин действительно является лишь частным случаем теоремы 2.

Доказательство теоремы 2 чрезвычайно просто и было уже проведено в § 5 главы II. Напомним его. Пусть многогранники  $P$  и  $P'$  содержат точку  $O$  внутри и имеют вершины на одних и тех же лучах  $e_i$ , исходящих из  $O$ . При подобном преобразовании многогранника  $P'$  эти условия не нарушаются и многогранные углы его не меняются (а лишь передвигаются параллельно), и потому мы можем подвергать многогранник  $P'$  любому такому преобразованию. Сожмем его к точке  $O$  настолько, чтобы он оказался целиком внутри многогранника  $P$ , а потом будем его непрерывно подобно увеличивать до тех пор, пока одна из его вершин не совпадет впервые с соответствующей вершиной многогранника  $P$ . Так как при этом все вершины остаются все же в телесном многограннике  $P$ , то и сам  $P'$  остается в  $P$ , поскольку  $P'$  есть выпуклая оболочка совокупности своих вершин.

Если при этом многогранник  $P'$  совпадет с  $P$ , то, значит, до преобразования он был подобен  $P$ , что соответствует первой возможности, указанной в теореме. Поэтому допустим, что многогранник  $P'$  не совпадает с  $P$ , но лишь кое-где касается его, а в остальном лежит внутри  $P$ .

Если многогранник  $P'$  заключен в  $P$ , а вершина  $A'$  на  $P'$  совпала с вершиной  $A$  на  $P$ , то многогранный угол  $V'$  при вершине  $A'$  многогранника  $P'$

оказывается заключенным в многогранном угле  $V$  при вершине  $A$  многогранника  $P$ .

Если при этом углы  $V$  и  $V'$  не совпадают, то мы уже нашли у многогранника  $P'$  угол, помещаемый внутри соответствующего угла многогранника  $P$ . Если же углы  $V$  и  $V'$  совпадают, то совпадают их ребра и, следовательно, совпадают также вершины многогранников  $P$  и  $P'$ , служащие концами этих ребер, потому что по условию эти вершины лежат еще на одних и тех же лучах, исходящих из точки  $O$ . Для этих вершин мы можем повторить то же рассуждение и т. д. до тех пор, пока не дойдем до некоторой пары совпавших вершин  $E, E'$ , многогранные углы при которых не совпадают: иначе все вершины многогранников  $P$  и  $P'$  оказались бы совпавшими, вопреки сделанному предположению.

Таким образом, предполагая, что многогранники  $P$  и  $P'$  не подобны, мы найдем у них такую пару соответственных вершин, что многогранный угол при вершине многогранника  $P'$  помещается внутри многогранного угла при вершине многогранника  $P$ . Теорема доказана.

Из теоремы 2, очевидно, вытекает следующий результат.

Будем говорить, что  $f(V)$  есть монотонная функция выпуклого многогранного угла, если для равных и параллельных углов  $V$  и  $V'$   $f(V) = f(V')$ , а когда угол  $V$  содержится внутри  $V'$ , то  $f(V) < f(V')$ .

**Теорема 3.** *Если у двух многогранников с вершинами на данных лучах для каждой пары соответственных вершин какие-либо монотонные функции многогранных углов при них равны, то многогранники подобны.*

Действительно, из условия монотонности следует, что соответственные многогранные углы непомещаемы один в другом, а потому в силу теоремы 2 многогранники должны быть подобными.

Здесь для каждой пары соответственных вершин можно брать свою монотонную функцию. Кроме суммы плоских углов (или кривизны), примером монотонной функции может служить площадь сферического многоугольника, вырезаемого многогранным углом на единичной сфере с центром в вершине угла.

4. Вопрос о допустимых значениях кривизн вершин многогранника с вершинами на данных лучах решается следующей теоремой:

**Теорема 4.** *Пусть из точки  $O$  исходят лучи  $e_1, \dots, e_n$ , не направленные в одно полупространство. Пусть  $\sigma_{i_1 i_2 \dots i_m}$  — кривизна многогранного угла, являющегося границей выпуклой оболочки совокупности лучей  $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_m}$ .*

*Если имеется замкнутый выпуклый многогранник с вершинами на лучах  $e_i$ , то кривизны  $\omega_i$  его вершин удовлетворяют неравенству*

$$\sum \omega_i > \sigma_{i_1 i_2 \dots i_m}, \quad (8)$$

где сумма берется по всем лучам, не попавшим в выпуклую оболочку совокупности лучей  $e_{i_1}, \dots, e_{i_m}$ , и так для всех возможных совокупностей лучей  $e_{i_1}, \dots, e_{i_m}$ , выбранных из данных<sup>1)</sup>.

Обратно, если даны положительные числа  $\omega_i$ , удовлетворяющие всем неравенствам (1) и такие, что их сумма равна  $4\pi$ , то существует замкнутый выпуклый многогранник, вершины которого лежат на данных лучах и вершина на каждом луче  $e_i$  имеет кривизну  $\omega_i$ .

Так как условия, что все  $\omega_i$  положительны и в сумме дают  $4\pi$ , очевидно, необходимы, то теорема утверждает, что эти два условия вместе со всеми неравенствами (8) необходимы и достаточны для существования многогранника с данными кривизнами вершин  $\omega_i$ .

Необходимость неравенств (8) была доказана в § 5 главы II; напомним это доказательство.

Пусть имеем многогранник  $P$  с вершинами на данных лучах  $e_i$ . Берем лучи  $e_{k_1}, \dots, e_{k_m}$ , идущие в одно полупространство, и строим их выпуклую оболочку  $V$ . Это будет телесный угол с вершиной в точке  $O$ . Пусть лучи  $e_{j_1}, \dots, e_{j_p}$ , а соответственно и вершины  $A_{j_1}, \dots, A_{j_p}$  оказываются вне  $V$ .

Плоскость, опорная к  $V$ , пересекает многогранник  $P$ , а при движении от точки  $O$  она становится в некоторый момент опорной к многограннику  $P$  в какой-то его вершине, не попавшей в  $V$ . Следовательно, всякая опорная плоскость к  $V$  имеет параллельную ей опорную плоскость к  $P$  в одной из вершин  $A_{j_1}, \dots, A_{j_p}$ . Кроме того, в этих вершинах имеются и другие опорные плоскости, например плоскости граней, пересекающие  $V$ . Это означает, что сферическое изображение совокупности вершин  $A_{j_1}, \dots, A_{j_p}$  больше сферического изображения угла  $V$ , т. е. имеет место неравенство (8).

**5.** Теперь докажем, что при выполнении всех условий теоремы многогранник с данными кривизнами  $\omega_i$  существует. Для этого воспользуемся леммой об отображении (§ 2 главы II).

Рассмотрим все замкнутые выпуклые многогранники с вершинами на данных лучах  $e_1, \dots, e_n$ . Пусть  $r_i$  означает расстояние вершины на  $i$ -м луче от начала  $O$ . Как выяснено в конце п<sup>о</sup> 2, в  $n$ -мерном пространстве с координатами  $x_i = 1/r_i$  совокупность всех рассматриваемых многогранников изображается выпуклым телесным углом с вершиной в точке  $(0, \dots, 0)$ . Классу подобных многогранников отвечает луч, идущий внутри этого угла из его вершины. Поэтому множество всех классов подобных многогранников можно изобразить той частью единичной сферы с центром в точке  $(0, \dots, 0)$ , какую вырезает указанный телесный угол. Эта  $(n - 1)$ -мерная

<sup>1)</sup>С условием, что лучи  $e_{i_1}, \dots, e_{i_m}$  идут внутрь одного полупространства, потому что иначе неравенство (8) тривиально или бессмысленно (если выпуклая оболочка совокупности этих лучей есть все пространство).

сферическая область представляет собой многообразие  $\mathbf{P}$  классов подобных многогранников.

Пусть  $\mathbf{K}$  — многообразие совокупностей  $K$  по  $n$  положительных чисел  $(\omega_1, \dots, \omega_n)$  с суммой, равной  $4\pi$ , удовлетворяющих неравенствам (8). В  $n$ -мерном пространстве с координатами  $\omega_1, \dots, \omega_n$  линейные неравенства (8) вместе с неравенствами  $\omega_i > 0$  ограничивают выпуклое множество; пересечение этого множества с плоскостью  $\sum_{i=1}^n \omega_i = 4\pi$  и дает многообразие  $\mathbf{K}$ . Это многообразие, следовательно,  $(n-1)$ -мерно и связно.

Каждый из рассматриваемых многогранников имеет кривизны вершин, удовлетворяющие условиям, определяющим многообразие  $\mathbf{K}$ . Подобные многогранники имеют одинаковые кривизны. В силу этого многообразие  $\mathbf{P}$  однозначно отображается в многообразие  $\mathbf{K}$ .

Это отображение  $\varphi$  взаимно однозначно, так как по доказанному в п<sup>о</sup> 3 многогранники с равными кривизнами подобны. Это отображение очевидным образом также и непрерывно. Так как многообразие  $\mathbf{K}$  связно и имеет ту же размерность, что  $\mathbf{P}$ , то остается еще проверить только выполнение последнего условия леммы об отображении.

Пусть последовательность  $K_1, K_2, \dots$  сходится к точке  $K$ , причем  $K_i = \varphi(P_i)$ , т. е. точки  $K_i$  из  $\mathbf{K}$  суть образы точек  $P_i$  из  $\mathbf{P}$ . Нужно доказать, что существует сходящаяся подпоследовательность  $P_{i_j}$ , предел которой  $P$  отображается в  $K$ :  $P_{i_j} \rightarrow P, \varphi(P) = K$ .

Так как многообразие  $\mathbf{P}$  есть область на  $(n-1)$ -мерной сфере, то из последовательности  $P_i$  заведомо можно выбрать сходящуюся последовательность. Однако предельная точка  $P_0$  такой последовательности  $P_{i_j}$  могла бы лежать не в самой области  $\mathbf{P}$ , а на ее границе. Покажем, что этого не может быть.

Каждая точка из  $\mathbf{P}$  представляет многогранник, у которого расстояния вершин от начала подчинены условию

$$\sum x_i^2 = \sum \frac{1}{r_i^2} = 1.$$

Поэтому точка на границе  $\mathbf{P}$  также представляет выпуклый многогранник с тем же условием, но с некоторыми «координатами»  $x_i = 1/r_i$ , быть может, равными нулю. Такой многогранник  $P_0$  оказывается бесконечным, и выпуклая оболочка совокупности тех лучей  $e_i$ , которым отвечают расстояния  $r_i = \infty$  ( $x_i = 1/r_i = 0$ ), есть не что иное, как его предельный угол  $V$ . Действительно, пусть  $r_1, \dots, r_m$  конечны, а  $r_{m+1}, \dots, r_n$  стремятся к бесконечности. Многогранник  $P$  при всех конечных  $r_i$  есть, очевидно, выпуклая оболочка совокупности вершин, лежащих на лучах  $e_1, \dots, e_m$ ,

и многогранника  $R$ , являющегося выпуклой оболочкой множества, образованного точкой  $O$  и вершинами, лежащими на лучах  $e_{m+1}, \dots, e_n$ . Когда эти последние вершины удаляются в бесконечность, многогранник  $R$  сходится к многогранному углу  $V$  — выпуклой оболочке совокупности лучей  $e_{m+1}, \dots, e_n$ . Поэтому многогранник  $P$  сходится к выпуклой оболочке совокупности вершин, лежащих на лучах  $e_1, \dots, e_m$ , и угла  $V$ . Следовательно, этот угол  $V$  и будет предельным углом предельного многогранника  $P_0$ .

Кривизна многогранника  $P_0$  равна кривизне его предельного угла  $V$ , т. е. сумма кривизн его вершин  $A_1, \dots, A_m$  равна кривизне выпуклой оболочки совокупности лучей  $e_{m+1}, \dots, e_n$ . В наших обозначениях это запишется равенством

$$\sum_{i=1}^m \omega_i = \sigma_{m+1, \dots, n}. \quad (9)$$

Однако когда многогранники  $P_i$  сходятся, кривизны их вершин сходятся к кривизнам вершин предельного многогранника  $P_0$ . По условию же кривизны вершин многогранников  $P_{i_j}$  сходятся к совокупности чисел  $\omega$ , принадлежащей многообразию  $\mathbf{K}$ , т. е. для предельных значений чисел  $\omega$  выполняются все неравенства (8).

Следовательно, равенство (9) невозможно, и тем самым многогранник  $P_0$  не может быть бесконечным.

Итак, подпоследовательность многогранников  $P_{i_j}$  сходится к конечному многограннику  $P_0$  с предельными значениями кривизн вершин. Таким образом, многограннику  $P_0$  отвечает как раз предельная совокупность  $K_0$  чисел  $\omega$ ; это означает, что

$$\varphi(P_0) = K_0.$$

Этим доказано, что отображение  $\varphi$  удовлетворяет также последнему условию леммы об отображении. И раз все ее условия удовлетворены, то верен и ее результат: многообразию  $\mathbf{P}$  отображается на все многообразию  $\mathbf{K}$ , т. е. каждой допустимой по условиям теоремы совокупности значений чисел  $\omega$  отвечает класс подобных многогранников. Таким образом, существование многогранника с данными значениями кривизн доказано.

**6.** Для многогранников с границей могут быть установлены разные теоремы, аналогичные теоремам 2–4. Приведем две самые простые из них.

Пусть на плоскости  $T$  дан конечный выпуклый многоугольник  $Q$ , внутри которого отмечены точки  $A_1, \dots, A_m$ . Пусть в пространстве задана замкнутая ломаная  $L$ , проектирующаяся на границу многоугольника  $Q$ . Рассмотрим выпуклые многогранники, обладающие следующими свойствами: 1) они ограничены ломаной  $L$ ; 2) имеют вершины, проектирующиеся в точки  $A_i$ , и не имеют никаких других внутренних вершин; 3) они обращены выпуклостью в одну сторону (скажем, к плоскости  $T$  или от нее).

О таких многогранниках можно утверждать:

**Теорема 5.** *У двух таких многогранников (если они не совпадают) всегда есть пара соответственных вершин, многогранные углы при которых могут быть помещены один внутри другого путем параллельного переноса.*

Действительно, пусть  $P_1$  и  $P_2$  — два таких многогранника, причем  $P_1$  имеет точки, лежащие «ниже» точек  $P_2$  с той же проекцией на плоскость  $T$  (которую мы мыслим горизонтальной). Тогда, «поднимая» многогранник  $P_1$ , приведем его в такое положение, что он будет еще где-либо касаться  $P_2$ , но в остальном будет лежать «выше»  $P_2$ . При таком положении очевидно, что на  $P_1$  есть вершина, угол при которой лежит внутри угла при соответствующей вершине многогранника  $P_2$ , и теорема доказана.

**Теорема 6.** *Для всяких положительных чисел  $\omega_1, \dots, \omega_m$ , сумма которых меньше  $2\pi$ , существует и притом единственный такой выпуклый многогранник указанного выше типа, у которого числа  $\omega_i$  суть кривизны вершин: именно  $\omega_i$  есть кривизна вершины, проектирующейся в точку  $A_i$ .*

Единственность указанного многогранника следует из теоремы 5. Существование получается сразу на основе леммы об отображении. Действительно, рассмотрим  $m$ -мерное многообразие  $\mathbf{K}$ , точками которого будут совокупности положительных чисел  $\omega_1, \dots, \omega_m$ , с условием, что сумма их меньше  $2\pi$ . Пусть, далее,  $\mathbf{P}$  — многообразие многогранников рассматриваемого типа; оно также  $m$ -мерно (и, как легко доказать, не пусто). Мы имеем естественное отображение многообразия  $\mathbf{P}$  в  $\mathbf{K}$ , и легко доказать, что оно удовлетворяет всем условиям леммы об отображении. В результате теорема 6 оказывается доказанной. (Детальное осуществление намеченного рассуждения мы оставляем читателю.)

В теоремах 5, 6 речь идет о многогранниках, вершины которых лежат на параллельных лучах, проходящих через точки  $A_1, \dots, A_m$  перпендикулярно к плоскости  $T$ ; такие лучи «пересекаются в бесконечно удаленной точке». Совершенно аналогично можно рассматривать многогранники с вершинами на данных лучах, исходящих из данной точки  $O$ . Тогда точно так же можно сформулировать теоремы о многогранниках с границей, аналогичные теоремам 5, 6. Здесь возможны разные случаи: лучи могут идти внутрь одного полупространства или нет; можно рассматривать многогранники, ограниченные одной ломаной или несколькими. (На ломаные нужно наложить условие, чтобы вообще они могли ограничивать выпуклый многогранник с вершинами на данных лучах.) Простейшим будет случай, когда все лучи идут внутри выпуклого телесного угла, на поверхности которого лежит данная ломаная  $L$ , причем нужно рассматривать отдельно многогранники, обращенные выпуклостью к вершине угла и от нее. Формулировки и доказательства возможных здесь теорем могут служить в качестве хорошей задачи. Дальнейшей темой может служить обобщение на тот случай, когда

лучи не исходят из одной точки, но «проходят сквозь» данную ломаную  $L$ .

7. Теореме 2 можно сопоставить теорему, относящуюся к бесконечно малым деформациям многогранника.

Возьмем внутри замкнутого выпуклого многогранника  $P_0$  точку  $O$  и проведем из нее лучи  $L_i$  через все вершины многогранника  $P_0$ . Если вершины перемещать вдоль лучей  $L_i$ , то многогранник  $P_0$  будет деформироваться.

При достаточно малых смещениях ни одна из вершин не попадет в выпуклую оболочку совокупности других и, следовательно, останется вершиной деформированного многогранника  $P$ .

Мы будем предполагать, что с изменением параметра  $t$  вершины движутся по лучам  $L_i$  с определенными скоростями. Тогда, как очевидно, грани и ребра многогранника будут вращаться также с определенными скоростями.

При движении вершин строение многогранника может, конечно, меняться. Так будет, например, если выдвигать от центра  $O$  куба рис. 145 его вершины  $A_1$  и  $A_3$ , оставляя вершины  $A_2$  и  $A_4$  неподвижными, или наоборот, причем в обоих случаях грань  $A_1A_2A_3A_4$  будет ломаться, но в первом случае по диагонали  $A_1A_3$ , а во втором — по диагонали  $A_2A_4$ .

Но при малых деформациях уже имеющиеся ребра не могут исчезнуть, а могут только появиться новые, бывшие в начальный момент диагоналями граней.

При рассмотрении многогранных углов при вершинах многогранника мы будем такие диагонали считать «новыми» ребрами этих углов в отличие от настоящих или «старых» ребер; «новые» ребра лежат на «старых» гранях.

В порядке обобщения можно допустить деформации с нарушением выпуклости многогранника, вызванным тем, что грани переламываются по диагоналям не так, как при сохранении выпуклости. Например, при движении вершин  $A_1$  и  $A_2$  куба на рис. 145 наружу можно допустить переламывание грани по диагонали  $A_2A_4$ , что приведет к невыпуклому многограннику.

Также и в этом случае мы будем вообще говорить, что многогранник деформируется вследствие движения его вершин.

Многогранные углы мы будем рассматривать с точностью до переноса и подобного преобразования; последнее также не меняет ни форму, ни размеры многогранного угла. Мы будем говорить, что многогранный угол  $V_0$  уменьшается, если при деформации, оставляющей его вершину на месте, ни одно его ребро не движется наружу с положительной скоростью и хотя

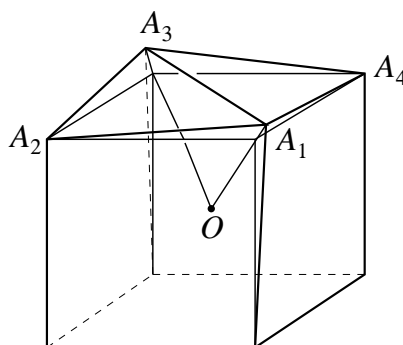


Рис. 145



бы одно настоящее ребро вращается, заходя внутрь угла  $V_0$  со скоростью, отличной от нуля. Угол будет считаться увеличивающимся, если с изменением скоростей на противоположные он оказывается уменьшающимся<sup>2)</sup>.

**Теорема 7.** Пусть замкнутый выпуклый многогранник деформируется вследствие движения его вершин по данным лучам, исходящим из его внутренней точки  $O$ . Тогда либо его начальная деформация есть подобие с центром  $O$ , т. е. начальные скорости движения вершин пропорциональны их расстояниям от точки  $O$ , либо существует вершина, многогранный угол при которой убывает, и вершина, при которой многогранный угол возрастает (помня условие о том, что углы рассматриваются с точностью до переноса или подобия, так что при сравнении их вершины всегда можно считать совмещенными).

Доказательство столь же просто, как доказательство теоремы 2.

Назовем *относительной скоростью* вершины  $A_i$  скорость изменения расстояния  $OA_i$ , отнесенную на единицу длины, т. е. величину  $v_i = \dot{r}_i/r_i$ , где  $r_i = OA_i$ . Подобное преобразование характеризуется равенством всех  $v_i$ .

Допустим, что деформация не сводится к подобию, так что не все  $v_i$  равны между собой.

Возьмем вершину с наибольшим значением относительной скорости; пусть это будет вершина  $A_1$ . Прибавим ко всем относительным скоростям величину  $-v_1$ , т. е. относительную скорость вершины  $A_1$  с обратным знаком. Этим мы добавляем к рассматриваемой начальной деформации ее подобное преобразование и потому не меняем, по существу, деформации многогранных углов многогранника.

Но так как  $v_1$  была наибольшей относительной скоростью, то теперь у всех вершин относительные скорости не положительны, а у  $A_1$  скорость равна нулю, т. е.  $A_1$  стоит на месте, а прочие вершины либо также стоят на месте, либо движутся внутрь многогранника. При этом не все они стоят на месте, так как иначе их относительные скорости  $v_i$  до прибавления скорости  $-v_1$  были бы равны, вопреки предположению.

Если хотя бы одна вершина  $A_i$ , соединенная с  $A_1$  ребром, движется внутрь (т. е. если  $v'_i = v_i - v_1 < 0$ ), то это и будет означать, что многогранный угол при вершине  $A_1$  уменьшается.

Если же все вершины, соединенные с  $A_1$  ребрами, неподвижны, то берем вместо  $A_1$  любую из них и т. д. Так в конце концов мы дойдем до вершины с уменьшающимся многогранным углом, потому что не все вершины неподвижны.

<sup>2)</sup> Вращению настоящего ребра наружу из угла  $V$  может не отвечать противоположное вращение внутрь: таким свойством обладает вращение в любой опорной плоскости, проходящей через ребро. Поэтому при рассмотрении настоящих ребер нельзя налагать условие на скорость движения наружу.

Совершенно аналогично, вычитая из всех относительных скоростей наименьшую из них, докажем, что есть вершина с увеличивающимся многогранным углом, и теорема доказана.

Из теоремы 5 можно вывести теорему о жесткости, аналогичную теореме 3 о подобии многогранников. Напомним, что величина  $x$ , зависящая от  $t$ , называется стационарной, если  $(\frac{dx}{dt})_{t=0} = 0$ . Многогранник называется жестким при данных условиях, если в этих условиях он не допускает деформаций помимо тривиальных, причем имеются в виду только начальные скорости деформации. В данном случае тривиальной деформацией будет подобие, т. е. деформация, при которой начальные скорости вершин пропорциональны их расстояниям от точки  $O$ .

Введем еще понятие существенно монотонной (возрастающей) функции многогранного угла, понимая под этим величину  $f$ , зависящую от многогранного угла, так что при увеличении угла она растет с положительной скоростью, т. е.  $df/dt > 0$ .

Воспользовавшись понятиями, введенными в связи с теоремой 7, немедленно извлекаем следующую теорему о жесткости:

**Теорема 8.** *Замкнутый выпуклый многогранник — жесткий в определенном выше смысле, если его вершины остаются на данных лучах, исходящих из его внутренней точки, и для каждого его многогранного угла какая-нибудь существенно монотонная функция стационарна.*

Пользуясь взаимностью между многогранным углом и его сферическим изображением, теоремы 5 и 6 можно пересказать в терминах сферического изображения. Рассмотрим для этого деформацию сферического изображения любой вершины многогранника, вызванную деформацией самого многогранника при движении его вершин по данным лучам  $L_i$ , исходящим из точки  $O$ .

Если вершины движутся с определенными скоростями, то и ребра вращаются с определенными скоростями. А так как стороны сферического многоугольника  $S_{A_i}$ , являющегося сферическим изображением вершины  $A_i$ , лежат в плоскостях, перпендикулярных к сходящимся в  $A_i$  ребрам, то и они движутся с определенными скоростями. Строго говоря, речь должна идти о вращении больших кругов, ограничивающих многоугольник  $S_{A_i}$ ; каждый такой круг перпендикулярен к соответствующему ребру, подходящему к вершине  $A_i$ , и вращается вместе с вращением этого ребра.

Если ребро движется внутрь многогранного угла  $V$  при вершине  $A$ , то соответствующая сторона многоугольника  $S$  выдвигается от этого многоугольника. Поэтому уменьшению угла  $V$  в смысле, принятом в теореме 5, отвечает увеличение многоугольника  $S$  в том смысле, что его стороны выдвигаются наружу с определенными скоростями вследствие вращения несущих их больших кругов.

Определив в соответствии с этим понятия «уменьшения» и «увеличения» сферического изображения вершины многогранника, а также понятие его существенно монотонной функции, можно пересказать теоремы 5 и 6 в терминах сферического изображения. Существенно монотонная возрастающая функция многогранного угла будет существенно монотонной убывающей для его сферического изображения, и обратно.

8. В п<sup>о</sup> 6 § 5 главы II была выяснена возможность полярного преобразования теорем о многогранниках с вершинами на данных лучах в теоремы о многогранниках с гранями, перпендикулярными к данным лучам. Там были сформулированы теоремы, полярные теоремам 2 и 4. Теоремы 5 и 6 допускают такое же полярное преобразование.

Все выводы этого параграфа совершенно дословно переносятся в пространство любого числа измерений  $n \geq 2$  с тем лишь отличием, что в теореме 1 нужно рассматривать разложения вектора  $e_k$  по  $n$  другим, а в теореме 4 вместо  $4\pi$  нужно взять площадь единичной сферы в  $n$ -мерном пространстве. Кроме того, речь должна идти о кривизне, как о  $(n - 1)$ -мерной площади сферического изображения.

## § 2. БЕСКОНЕЧНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

1. Мы будем рассматривать бесконечные выпуклые многогранники, расположенные над некоторой данной плоскостью  $T$  так, что 1) каждая прямая, перпендикулярная к плоскости  $T$ , либо не пересекает многогранник, либо содержит в нем целую полупрямую; 2) вершины многогранника проектируются в данные точки  $A_0, A_1, \dots, A_n$  на плоскости  $T$ .

Эти условия предполагаются, далее, выполненными без особых оговорок.

Так как при подобном сжатии многогранника первое условие, наложенное на его расположение, не нарушается, то тем же свойством обладает и его предельный угол. Мы говорим, что он «однозначно<sup>3)</sup> проектируется на плоскость  $T$ ».

Мы не исключаем из рассмотрения многогранники, у которых предельный угол сводится к полупрямой; эта полупрямая тогда перпендикулярна к плоскости  $T$ .

В связи с этим, говоря о многогранном угле  $V$ , служащем предельным углом многогранника, мы всегда будем допускать, что  $V$  может быть плоским углом или полупрямой. Далее, к бесконечным многогранникам мы причисляем также бесконечные выпуклые многоугольники. Например, если предельный угол  $V$  сводится к плоскому углу, а точки  $A_0, \dots, A_n$  лежат

<sup>3)</sup> Термин этот — в известной мере условный, так как угол может иметь грани, перпендикулярные к плоскости  $T$ .

на одной прямой, то многогранник  $P$  неизбежно сводится к многоугольнику. Эта возможность неизменно будет иметься в виду без особых напоминаний.

Пусть точки  $A_0, \dots, A_n$  на плоскости  $T$  заданы произвольным образом и пусть дан многогранный угол  $V$ , однозначно проектирующийся на плоскость  $T$ . Докажем, что в таком случае существует бесконечный выпуклый многогранник с предельным углом  $V$  и с вершинами, проектирующимися в данные точки  $A_i$ .

Доказательство проведем индукцией по числу точек  $A_i$ . Для одной точки  $A_0$  утверждение очевидно, так как сам данный угол  $V$  с вершиной в точке  $A_0$  и будет искомым многогранником. Предположим теперь, что утверждение верно для  $n$  точек, и докажем его для  $n + 1$  точки  $A_0, A_1, \dots, A_n$ .

Допустим сначала, что ни одна из точек  $A_0, \dots, A_n$  не лежит в выпуклой оболочке остальных точек. Тогда, поместив вершину угла  $V$  в точку  $A_0$ , построим выпуклую оболочку угла  $V$  и точек  $A_0, \dots, A_n$ . По теореме 5 § 4 главы I это будет выпуклый многогранник с предельным углом  $V$  и с вершинами в точках  $A_0, \dots, A_n$ , т. е. как раз искомым многогранником.

Остается поэтому допустить, что среди точек  $A_0, \dots, A_n$  хотя бы одна, скажем  $A_n$ , содержится в выпуклой оболочке остальных  $n$  точек  $A_0, \dots, A_{n-1}$ . Согласно предположению, что утверждение верно для  $n$  точек, существует многогранник  $P$  с предельным углом  $V$  и с вершинами, проектирующимися в точки  $A_0, \dots, A_{n-1}$ . Так как точка  $A_n$  лежит в выпуклой оболочке этих точек, то прямая  $L$ , проходящая через точку  $A_n$  перпендикулярно к плоскости  $T$ , необходимо пересекает многогранник  $P$ , входя в него в некоторой точке  $B$  (рис. 146). Если на отрезке  $A_nB$  взять точку  $B'$ , достаточно близкую к  $B$ , и построить выпуклую оболочку многогранника  $P$  и точки  $B'$ , то получим новый многогранник  $P'$ . Он имеет вершину  $B'$ , проектирующуюся в точку  $A_n$ . Вместе с тем, если смещение от  $B$  к  $B'$  достаточно мало, то все вершины многогранника  $P$  останутся также вершинами многогранника  $P'$ . В результате многогранник  $P'$  будет иметь предельный угол  $V$  и вершины, проектирующиеся в точки  $A_0, \dots, A_n$ . Таким образом, наше утверждение доказано.

Бесконечный выпуклый многогранник есть граница выпуклой оболочки своих вершин и предельного угла, т. е. полностью определяется их заданием, причем заранее предписанный предельный угол  $V$  можно расположить вершиной в любой предписанной вершине многогранника.

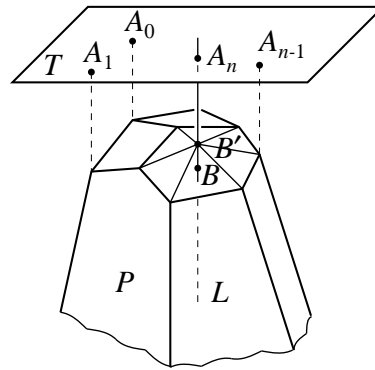


Рис. 146

Если заданы проекции  $A_0, \dots, A_n$  вершин на плоскость  $T$ , то сами вершины полностью определяются их расстояниями  $h_0, \dots, h_n$  от плоскости  $T$ , считая эти расстояния положительными в ту сторону от плоскости  $T$ , куда обращена бесконечная часть многогранника, и отрицательными — в другую сторону.

Следовательно, при заданных проекциях вершин и предельном угле  $V$  многогранник полностью определяется заданием  $n + 1$  чисел  $h_0, \dots, h_n$ .

Числа эти не могут быть произвольными, потому что данная точка  $B_k$  может быть вершиной выпуклой оболочки угла  $V$  и всех точек  $B_i$  с проекциями  $A_i$  тогда и только тогда, когда она не принадлежит выпуклой оболочке остальных точек  $B_i$  и угла  $V$  с условием, что его вершина лежит в любой из этих точек. Это, очевидно, накладывает на высоты  $h_i$  точек  $B_i$  определенные условия в виде некоторых неравенств. Вывод этих неравенств представляет собой совершенно элементарную задачу. Ее решение не будет нужно в дальнейшем, и мы оставляем его читателю.

2. Аналогично теореме 2 § 1 имеет место

**Теорема 1.** *Если два бесконечных выпуклых многогранника имеют одни и те же предельные углы  $V$  и проекции  $A_0, \dots, A_n$  вершин на плоскость  $T$ , то либо эти многогранники совмещаются параллельным переносом в направлении, перпендикулярном к  $T$ , либо на любом из них есть вершина, многогранный угол при которой можно путем такого переноса поместить внутри многогранного угла при соответственной вершине другого многогранника.*

Иными словами, два многогранника с общими данными  $V$  и  $A_0, \dots, A_n$  равны и параллельны, если только известно, что многогранные углы при их соответственных вершинах неполагаемы один внутри другого.

Здесь, как и в § 1, мы считаем угол  $W$  находящимся внутри  $W'$ , если  $W$  содержится в (телесном) угле  $W'$ , но не совпадает с ним.

Доказательство столь же просто, как доказательство теоремы 2 § 1.

Действительно, пусть многогранники  $P$  и  $P'$  имеют общие данные  $V$  и  $A_0, \dots, A_n$ . Вершины их предельных углов можно считать расположенными в каких-либо их соответственных вершинах. Тогда при переносе многогранника  $P'$  в направлении, перпендикулярном к плоскости  $T$ , его предельный угол претерпевает такой же перенос, а проекции вершин не меняются, и мы можем подвергать многогранник  $P'$  любому такому переносу.

Сместим многогранник  $P'$  так, чтобы все его вершины оказались над соответственными вершинами многогранника  $P$  (т. е. все  $h'_i > h_i$ ). Его предельный угол окажется тогда содержащимся в предельном угле многогранника  $P$  и сам  $P'$  окажется содержащимся в  $P$ , как это ясно из того, что бесконечный многогранник есть выпуклая оболочка совокупности своих вершин и предельного угла.

Если теперь двигать многогранник  $P'$  к плоскости  $T$ , то в некоторый момент одна из его вершин, скажем  $B'$ , впервые совпадет с соответствующей вершиной  $B$  многогранника  $P$ . При этом многогранник  $P'$  еще не выйдет из  $P$ , так как все его вершины и предельный угол остаются в  $P$  (вернее, в теле, ограниченном  $P$ ). Это ясно из того, что телесный многогранник есть выпуклая оболочка совокупности его вершин и предельного угла. Поэтому многогранный угол  $W'$  при вершине  $B'$  многогранника  $P'$  окажется заключенным в угле  $W$  при вершине  $B$  многогранника  $P$ .

Если эти углы  $W'$  и  $W$  не совпадают, то мы как раз получаем, что угол  $W'$  путем переноса помещен внутри угла  $W$ , т. е. осуществляется вторая возможность, указанная в теореме. Если же углы  $W$  и  $W'$  совпадают, то совпадают их ребра и, следовательно, совпадают также вершины многогранников  $P$  и  $P'$ , служащие концами этих ребер, потому что по условию эти вершины лежат на общих перпендикулярах к плоскости  $T$ . Для многогранных углов при этих вершинах мы можем повторить то же рассуждение и т. д., пока не дойдем до пары соответственных вершин, многогранные углы при которых не совпадают. Тогда угол  $U'$  при такой вершине на многограннике  $P'$  будет содержаться внутри соответственного угла  $U$ . Если же мы не найдем пары несовпадающих углов, то, значит, все они совпадают, т. е. многогранник  $P'$  совпадает с  $P$ . Следовательно, он совместился с  $P$  путем переноса, и тем самым осуществляется первая возможность, предусмотренная в теореме.

Из теоремы 1 аналогично теореме 3 § 1 очевидно вытекает

**Теорема 2.** *Если у двух бесконечных выпуклых многогранников с общими предельными углами и проекциями вершин на плоскость  $T$  для каждой пары многогранных углов при соответственных вершинах равны значения какой-либо монотонной функции, то многогранники совмещаются параллельным переносом.*

В частности, это имеет место, если соответственные вершины имеют равные кривизны.

**3.** Теореме 4 § 1 в случае бесконечных многогранников соответствует

**Теорема 3.** *Пусть на плоскости  $T$  заданы точки  $A_0, \dots, A_n$  и задан многогранный угол  $V$ , однозначно проектирующийся на плоскость  $T$ . Для того чтобы существовал бесконечный выпуклый многогранник с вершинами, проектирующимися в точки  $A_0, \dots, A_n$ , с предельным углом  $V$  и кривизнами вершин  $\omega_0, \dots, \omega_n$ , необходимо и достаточно, чтобы числа  $\omega_i$  удовлетворяли следующим условиям:*

- 1)  $0 < \omega_i < 2\pi$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ );
- 2) сумма всех  $\omega_i$  равна кривизне угла  $V$ .

Согласно теореме 2, такой многогранник — единственный с точностью до переноса в направлении, перпендикулярном к плоскости  $T$ .

Необходимость первого условия очевидна. Необходимость второго также становится очевидной, если вспомнить, что, как указано еще в п<sup>о</sup> 3 § 5 главы I, сферическое изображение бесконечного выпуклого многогранника совпадает со сферическим изображением его предельного угла. Поэтому в теореме вместо задания угла  $V$  можно иметь в виду задание выпуклого сферического многоугольника, который должен служить сферическим изображением искомого многогранника.

Теперь остается доказать достаточность условий теоремы, т. е. доказать существование многогранника с данными кривизнами вершин. Для этого мы опять воспользуемся леммой об отображении.

Пусть точки  $A_0, \dots, A_n$  и угол  $V$  заданы. Мы будем рассматривать бесконечные выпуклые многогранники  $P$ , у которых одна вершина закреплена в точке  $A_0$ , прочие вершины проектируются в остальные точки  $A_i$ , а предельный угол есть  $V$ . По доказанному в п<sup>о</sup> 1 такие многогранники существуют и потому их многообразие  $\mathbf{P}$  не пусто.

Каждый такой многогранник определяется заданием  $n$  высот  $h_1, \dots, h_n$  его вершин, проектирующихся в точки  $A_1, \dots, A_n$ . Если данные числа  $h_1^0, \dots, h_n^0$  служат высотами вершин многогранника  $P^0$ , то и любые достаточно близкие к ним числа  $h_1, \dots, h_n$  служат высотами вершин некоторого многогранника  $P$ . Действительно, условие, налагаемое на высоты вершин, состоит в том, что никакая вершина не должна попадать в выпуклую оболочку совокупности других вершин и угла  $V$ ; если это верно при каких-либо высотах  $h_1^0, \dots, h_n^0$ , то то же верно и при любых достаточно близких к ним значениях высот. Отсюда следует, что каждая точка  $P^0$  в множестве  $\mathbf{P}$  имеет кубическую  $n$ -мерную окрестность, так что  $\mathbf{P}$  есть открытое множество в  $n$ -мерном пространстве с введенными в нем координатами  $h_1, \dots, h_n$ .

Рассмотрим теперь  $(n+1)$ -мерное пространство с координатами  $\omega_0, \dots, \omega_n$ . Пусть  $\Omega$  — кривизна данного угла  $V$ . Тогда условие 2 теоремы дает

$$\omega_0 + \omega_1 + \dots + \omega_n = \Omega, \quad (1)$$

т. е. определяет в нашем пространстве некоторую плоскость. Условие 1 теоремы определяет в этом пространстве внутренность куба и пересечение ее с плоскостью (1) определяет область значений  $\omega_i$ , удовлетворяющих обоим условиям теоремы. Это будет многообразие  $\mathbf{K}$  допустимых совокупностей чисел  $\omega_i$ . Оно представляет собой  $n$ -мерное связное многообразие.

Так как каждому многограннику  $P$  из многообразия  $\mathbf{P}$  отвечает совокупность значений кривизн его вершин, удовлетворяющая условиям теоремы, то мы получаем естественное отображение  $\varphi$  многообразия  $\mathbf{P}$  в многообразие  $\mathbf{K}$ . Это отображение, очевидно, непрерывно. Так как у многогранников  $P$  одна вершина закреплена, то по теореме 3 многогранники с равными

кривизнами вершин просто совпадают. Это означает, что отображение  $\varphi$  взаимно однозначно.

Наконец, многообразие  $\mathbf{K}$  связно и имеет ту же размерность, что и  $\mathbf{P}$ . Таким образом, мы видим, что первые три условия леммы об отображении выполнены, и остается лишь показать, что четвертое условие этой леммы также выполнено.

Пусть последовательность точек  $K_j$  из многообразия  $\mathbf{K}$ , представляющих совокупности кривизн вершин многогранников  $P_j$ , сходится к точке  $K$  из  $\mathbf{K}$ :

$$K_j = \varphi(P_j) \rightarrow K = (\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n) \in \mathbf{K}. \quad (2)$$

Так как точка  $K = (\omega_0, \dots, \omega_n)$  принадлежит  $\mathbf{K}$ , то, согласно первому условию теоремы, все ее координаты  $\omega_i > 0$ , т. е. кривизны вершин многогранников  $P_j$  сходятся к положительным значениям. Поэтому найдется такое  $\varepsilon > 0$ , что для всех кривизн их вершин будет

$$\omega_i^j > \varepsilon \quad (i = 0, \dots, n; j = 1, 2, \dots). \quad (3)$$

Перенесем каждый многогранник  $P_j$  в направлении, перпендикулярном к плоскости  $T$  так, чтобы  $T$  стала его опорной плоскостью. Так как все вершины многогранников  $P_j$  проектируются в данные точки  $A_i$ , то из многогранников  $P_j$  можно выбрать последовательность, все многогранники которой упираются в плоскость  $T$  в одной и той же из точек  $A_i$ , скажем в точке  $A_n$ . Чтобы не усложнять обозначений, многогранники этой последовательности мы будем обозначать также  $P_j$ .

Пусть вершина  $B_i^k$  многогранника  $P_{m_k}$  лежит на высоте  $h_i^k$  над плоскостью  $T$  и пусть расстояние ее проекции  $A_i$  на плоскость  $T$  от точки  $A_n$  равно  $r_i$ . Точка  $A_n$  является вершиной многогранника  $P_{m_k}$ , и потому никакая опорная плоскость к  $P_{m_k}$  в вершине  $B_i^k$  не может пересекать луч, идущий из  $A_n$  в многогранник  $P_{m_k}$  перпендикулярно к плоскости  $T$ . Отсюда на основании очевидных элементарных соображений мы заключаем, что если  $\theta$  — угол, образуемый этим лучом с опорной плоскостью в вершине  $B_i^k$ , то

$$\operatorname{tg} \theta \leq \frac{r_i}{h_i^k}. \quad (4)$$

Пусть  $\theta_0$  таково, что

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{r_i}{h_i^k}. \quad (5)$$

Тогда из неравенства (4) вытекает, что сферическое изображение вершины  $B_i^k$  лежит в полосе шириной  $\theta_0$  около экватора единичной сферы, если за полюс принять сферическое изображение плоскости  $T$ . Площадь такой



полосы равна  $2\pi \sin \theta_0$ . Вместе с тем вследствие неравенства (3) эта площадь больше  $\varepsilon$ . Следовательно,

$$2\pi \sin \theta_0 > \varepsilon \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \theta_0 > \frac{\varepsilon}{2\pi}. \quad (6)$$

На основании равенства (5) отсюда следует, что

$$h_i^k < \frac{2\pi r_i}{\varepsilon}.$$

Это означает, что расстояния всех вершин многогранников  $P_{m_k}$  от плоскости  $T$  ограничены. Поэтому из многогранников  $P_{m_k}$  можно выбрать сходящуюся последовательность<sup>4)</sup>. Предельный многогранник будет, очевидно, иметь предельные площади сферических изображений вершин  $\omega_0, \dots, \omega_n$ . Этим доказано, что если  $K_m = \varphi(P_m) \rightarrow K$ , то существует подпоследовательность  $P_{m_j}$  такая, что  $P_{m_j} \rightarrow P$  и  $K = \varphi(P)$ .

Таким образом, все условия леммы об отображении оказываются выполненными, и, применяя ее, мы получаем доказательство существования многогранника с данными кривизнами вершин.

4. Полученный результат можно сформулировать еще так:

Пусть на плоскости  $T$  заданы точки  $A_0, \dots, A_n$  и каждой из них отнесено по числу  $\omega_i$  с условиями 1)  $0 < \omega_i < 2\pi$ , 2)  $\sum_{i=0}^n \omega_i \leq 2\pi$ . Тогда существует бесконечный выпуклый многогранник, однозначно проектирующийся на плоскость  $T$ , с вершинами, лежащими над точками  $A_i$  и имеющими соответственно кривизны  $\omega_i$ . При этом еще можно произвольно задать предельный угол такого многогранника, лишь бы его кривизна равнялась сумме чисел  $\omega_i$ . Так как  $\sum \omega_i \leq 2\pi$ , то такой угол заведомо найдется.

В этой формулировке особенно ясно, что кривизны вершин бесконечного выпуклого многогранника не подчиняются никаким условиям, кроме тривиальных. (Условие  $\omega_i < 2\pi$  очевидно, но при  $n \geq 1$  оно лишнее, так как следует из условий  $\omega_i > 0$  и  $\sum \omega_i \leq 2\pi$ .)

В этом данная теорема отличается от теоремы 4 § 1 для замкнутых многогранников: там имеется дополнительное условие (8), которое нельзя считать столь же тривиальным. Оно связано, однако, с расположением лучей  $e_i$ . В этой связи естественно поставить вопрос: каковы условия, необходимые и достаточные для того, чтобы данные числа  $\omega_1, \dots, \omega_n$  могли быть кривизнами всех вершин хоть какого-нибудь замкнутого выпуклого многогранника?

<sup>4)</sup> Многогранники этой последовательности мы, конечно, переносим обратно так, что они имеют одну из вершин в точке  $A_0$ . При этом сходимость, очевидно, не нарушается.

Необходимыми являются условия: 1)  $0 < \omega_i < 2\pi$  и 2)  $\sum_{i=1}^n \omega_i = 4\pi$ . Достаточны ли эти условия<sup>5)</sup>? (Из условий 1 и 2 следует, что должно быть  $n \geq 3$ . Если  $n = 3$ , то положительный ответ дается построением треугольника с углами, равными  $\pi - \omega_i/2$ ; это и будет многогранник, хотя и вырождающийся, с кривизнами вершин, равными  $\omega_i$ .)

5. Воспользовавшись понятиями, введенными в п<sup>о</sup> 6 § 1, в частности понятием об уменьшении и увеличении многогранного угла, можно сформулировать теорему, относящуюся к теореме 1 так же, как теорема 5 § 1 относится к теореме 2 § 1.

**Теорема 4.** *Если бесконечный выпуклый многогранник с неизменным предельным углом, однозначно проектирующимся на плоскость  $T$ , деформируется вследствие движения его вершин вдоль прямых, перпендикулярных к этой плоскости, то хотя бы один его многогранный угол уменьшается и хотя бы один — увеличивается.*

Отсюда, далее, можно извлечь теорему о жесткости, совершенно сходную с теоремой 6 § 1. Наконец, теорему 4, так же как эту теорему о жесткости, можно пересказать в терминах сферического изображения вершин. Все это, так же как доказательство теоремы 4, вполне аналогично тому, что было выведено в п<sup>о</sup> 6 § 1. Поэтому мы не станем на этом останавливаться.

6. В предыдущих пунктах речь шла о бесконечных многогранниках с вершинами на данных параллельных лучах. Это соответствовало как бы тому, что общее начало всех лучей находится в бесконечности. Можно, однако, рассматривать бесконечные выпуклые многогранники с вершинами на данных лучах, исходящих из данной точки  $O$ , которая должна находиться внутри многогранника. В этом случае естественно располагать вершину предельного угла в точке  $O$ .

Тогда встают вопросы, совершенно аналогичные тем, какие были решены в § 1 для замкнутых многогранников.

1) При каких условиях расположения лучей  $e_1, \dots, e_n$  и угла  $V$  существуют бесконечные выпуклые многогранники с вершинами на этих лучах и с предельным углом  $V$ ?

2) Каковы необходимые и достаточные условия, определяющие области возможных значений расстояний  $r_i$  вершин многогранника от начала  $O$  (при условии, что лучи  $e_i$  и предельный угол  $V$  заданы)?

3) Каковы условия, необходимые и достаточные для того, чтобы данные числа  $\omega_1, \dots, \omega_n$  могли служить кривизнами вершин многогранника с данным предельным углом и с вершинами на данных лучах?

<sup>5)</sup> Положительный ответ на этот вопрос получила А. А. Зильберберг [112, 113]. См. также [345]. — Прим. В. А. Залгаллера.

То, что лучи  $e_i$ , кривизны  $\omega_i$  и предельный угол  $V$  определяют многогранник с точностью до подобного преобразования с центром  $O$ , доказывается буквально так же, как аналогичный результат для замкнутых многогранников. Конечно, и в данном случае имеют место общие теоремы, совершенно аналогичные теоремам 2 и 3 § 1.

Поставленные вопросы допускают полное решение теми же методами, какие мы применяли в § 1. Поэтому мы предоставляем читателю самому сформулировать и доказать соответствующие теоремы.

7. Как было отмечено еще в § 1 главы I, рассмотрение бесконечного выпуклого многогранника, по существу, равносильно рассмотрению неопределенно продолжаемого конечного многогранника. При этом условием такой продолжаемости без появления новых пересечений крайних граней является выпуклость сферического изображения. Вместе с тем задание предельного угла эквивалентно заданию сферического изображения многогранника. В связи с этими замечаниями видно, что наши теоремы о бесконечных многогранниках можно пересказать для многогранников с границей<sup>6)</sup>.

8. Заметим в заключение, что результаты этого параграфа вместе с их доказательствами переносятся в пространство любого числа измерений  $n \geq 2$ ; лишь в теореме 3 вместо  $2\pi$  нужно взять площадь полусферы в соответствующем пространстве.

### § 3. ОБОБЩЕНИЯ

1. Как уже было указано, результаты § 1 и 2 обобщаются на многогранники в  $n$ -мерном пространстве, по существу, дословно, и на этом нет надобности останавливаться.

Они переносятся с соответствующими изменениями и на многогранники в пространстве Лобачевского. Ввиду отсутствия в этом пространстве подобия и параллельного переноса теоремы единственности и условия теорем существования формулируются там иначе. Кривизна вершины определяется так же: она равна  $2\pi$  минус сумма плоских углов при вершине, а это равно, в свою очередь, величине телесного угла, заполняемого нормальными к опорным плоскостям, проведенным в вершине. Приведем результат для замкнутых многогранников:

*Пусть из точки  $O$  в пространстве Лобачевского исходят лучи  $l_1, \dots, l_m$ , не направленные в одно полупространство. Для того чтобы существовал замкнутый выпуклый многогранник с вершинами на данных лучах и с данными кривизнами вершин  $\omega_1, \dots, \omega_m$ , необходимо и достаточно, чтобы числа  $\omega_i$  удовлетворяли условиям: 1)  $0 < \omega_i < 2\pi$  ( $i = 1, \dots, m$ ); 2) при любой совокупности лучей  $l_{i_1}, \dots, l_{i_k}$ , идущих внутрь одного полупространства, должно быть  $\sum \omega_i > \sigma_{i_1, \dots, i_k}$ , где  $\sigma_{i_1, \dots, i_k}$  — кривизна вершины многогранного угла, являющегося выпуклой оболочкой лучей  $l_{i_1}, \dots, l_{i_k}$ , а сумма  $\sum \omega_i$  распространяется по всем остальным лучам; 3) сумма всех  $\omega_i$  больше  $4\pi$ . При этом такой многогранник единственный.*

Сравнивая эту теорему с теоремами 3 и 4 § 1, мы видим, что, во-первых, многогранник с вершинами на данных лучах и с данными кривизнами вершин единственный уже

<sup>6)</sup> Для многогранников с границей см. работы [111], [167, с. 52], [275, 285]. — Прим. В. А. Залгаллера.

без добавлений о подобии. Во-вторых, условия 1 и 2 сформулированной теоремы повторяют условия теоремы 4 §1 (с тем отличием, что теперь нужно добавлять необходимое условие, что  $\omega_i < 2\pi$ , которое в теореме 4 §1 автоматически следовало из других), но условие 3 отлично от условия, что сумма кривизны вершин равна  $4\pi$ , как это имеет место в евклидовом пространстве; в пространстве Лобачевского она может быть любой, большей  $4\pi$ .

Другие теоремы, аналогичные теоремам §1, 2, мы не формулируем. Их формулировки и доказательства не представляют принципиальных трудностей; в частности, все доказательства существования легко проводятся с помощью леммы об отображении.

**2.** Теперь обратимся к обобщениям на любые выпуклые тела евклидова пространства.

Пусть  $H$  — выпуклое тело,  $O$  — точка внутри него и  $r(\mathbf{e})$  — расстояние от  $O$  до границы тела  $H$  в направлении единичного вектора  $\mathbf{e}$ .

Отнесем любому вектору  $\mathbf{x}$  число

$$D(\mathbf{x}) = \frac{|\mathbf{x}|}{r\left(\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}\right)}, \quad (1)$$

т. е. отношение длины вектора  $\mathbf{x}$  к расстоянию от  $O$  до границы тела  $H$  в направлении этого вектора  $\mathbf{x}$ . (При  $\mathbf{x} = 0$  направление не определено, и полагаем  $D(0) = 0$ .) Определенную таким образом функцию вектора  $\mathbf{x}$  ввел Г. Минковский и назвал ее *дистанционной функцией* тела  $H$ .

Сравнительно просто доказывается теорема:

*Для того чтобы данная функция  $D(\mathbf{x})$  вектора  $\mathbf{x}$  была дистанционной функцией какого-либо выпуклого тела, необходимы и достаточны следующие условия:*

- 1)  $D(\lambda\mathbf{x}) = \lambda D(\mathbf{x})$  при любом  $\lambda \geq 0$ ;
- 2)  $D(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq D(\mathbf{x}) + D(\mathbf{y})$  при любых  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ ;
- 3)  $D(\mathbf{x}) > 0$ , если только  $\mathbf{x} \neq 0$ .

Необходимость условий 1 и 3 очевидна из самого определения дистанционной функции; условие 2 легко получается из выпуклости тела  $H$ .

В силу первого условия функция  $D(\mathbf{x})$  полностью определяется ее значениями для единичных векторов  $\mathbf{e}$ . Тогда, поскольку  $|\mathbf{e}| = 1$ , из определения (1) следует, что

$$D(\mathbf{e}) = \frac{1}{r(\mathbf{e})},$$

т. е.  $D(\mathbf{e})$  есть обратная величина расстояния от точки  $O$  до границы тела  $H$  в направлении вектора  $\mathbf{e}$ .

Из условий 1 и 2 легко вывести, что если

$$\mathbf{e} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3$$

со всеми  $\alpha_i > 0$ , то

$$D(\mathbf{e}) < \alpha_1 D(\mathbf{e}_1) + \alpha_2 D(\mathbf{e}_2) + \alpha_3 D(\mathbf{e}_3)$$

или

$$\frac{1}{r(\mathbf{e})} < \frac{\alpha_1}{r(\mathbf{e}_1)} + \frac{\alpha_2}{r(\mathbf{e}_2)} + \frac{\alpha_3}{r(\mathbf{e}_3)}.$$

Это есть не что иное, как неравенство (2) теоремы 1 §1. Совершенно ясно, что теорема 1 §1 есть частный случай приведенной только что теоремы Минковского. Для многогранников нет надобности рассматривать функцию  $D(\mathbf{x})$ : достаточно взять конечное число ее значений — обратные величины расстояний вершин от начала  $O$ .

Легко убедиться, что дистанционная функция многогранника — кусочно-линейная. Именно она линейна в каждом телесном угле, проектирующем грань многогранника из точки  $O$ . Тем самым она определяется ее значениями для векторов  $e_i$ , направленных в вершины многогранника.

**3.** Формальная аналогия между дистанционной и опорной функциями и соответственно между теоремой 1 §1 и теоремой 1 §5 главы VII имеет интересное геометрическое основание.

Рассмотрим полярность относительно единичной сферы, т.е. преобразование, ставящее в соответствие точке с вектором  $re$ , где  $e$  — единичный вектор и  $r > 0$ , плоскость с нормальным уравнением  $e\mathbf{x} = 1/r$ . Легко доказать, что при таком преобразовании<sup>7)</sup> каждому выпуклому телу  $H$  ставится в соответствие выпуклое тело  $H'$  по следующему правилу: каждой внутренней точке тела  $H$  отвечает плоскость, не пересекающая тела  $H'$ , а граничным точкам тела  $H$  отвечают опорные плоскости тела  $H'$ . (Тело  $H'$  есть пересечение полупространств, определяемых этими плоскостями.) Так как преобразование, обратное полярности, есть она сама, то эта связь между телами  $H$  и  $H'$  — взаимная.

Пусть начало лежит внутри тела  $H$ ; тогда оно будет также внутри  $H'$ . Из определения полярности и взаимосвязи между телами  $H$  и  $H'$  легко вывести, что дистанционная функция одного из них оказывается опорной функцией другого, и обратно. Если  $H$  — многогранник, то  $H'$  — тоже многогранник, причем граням одного соответствуют вершины другого, и обратно.

**4.** Пусть  $F$  — замкнутая выпуклая поверхность,  $O$  — точка внутри нее и  $E$  — единичная сфера с центром в точке  $O$ . Пусть  $M$  — множество точек на сфере  $E$  и  $\omega(M)$  — площадь сферического изображения того множества на поверхности  $F$ , центральная проекция которого из точки  $O$  на сферу  $E$  есть данное множество  $M$ . Функцию множества  $\omega(M)$  мы назовем *перенесенной на сферу  $E$  кривизной поверхности  $F$* . Эта функция определена для всякого борелевского множества  $M$  на сфере  $E$ . Пользуясь этим понятием, можно сформулировать теорему, обобщающую теорему 4 §1 на любые замкнутые выпуклые поверхности:

*Для того чтобы функция  $\omega(M)$  (борелевского) множества  $M$  на сфере  $E$  была перенесенной на сферу  $E$  кривизной некоторой выпуклой поверхности, содержащей внутри центр  $O$  сферы  $E$ , необходимо и достаточно, чтобы 1)  $\omega(M)$  была неотрицательной и вполне аддитивной; 2)  $\omega(E) = 4\pi$ <sup>8)</sup>; 3) для всякого сферически выпуклого множества  $M$  выполнялось неравенство*

$$\omega(E \setminus M) > \sigma(M^*),$$

где  $\sigma(M^*)$  — площадь множества  $M^*$  «двойственного  $M$ », т.е. образуемого концами нормалей к опорным плоскостям конуса с вершиной  $O$ , вырезающего на сфере  $E$  множество  $M$ .

Если функция  $\omega$  состоит из конечного числа «точечных нагрузок»  $\omega_1, \dots, \omega_m$  в точках  $A_1, \dots, A_m$  (т.е.  $\omega(M) = 0$ , если  $M$  не содержит ни одной из  $A_i$ , и  $\omega(A_i) = \omega_i$ ), то данная теорема превращается в теорему 4 §1.

Доказательство сформулированной теоремы проводится предельным переходом от многогранников (см. [10]).

Соответствующая теорема единственности гласит:

<sup>7)</sup>Ср. п<sup>о</sup> 4 §5 гл. I.

<sup>8)</sup>В  $n$ -мерном пространстве  $\omega(E)$  равно площади всей единичной сферы.

Если две замкнутые выпуклые поверхности  $F$  и  $F'$  имеют одну и ту же кривизну, перенесенную на одну и ту же сферу  $E$ , то эти поверхности переводятся одна в другую подобным преобразованием с центром подобия в центре сферы  $E$  (см. [13]<sup>9)</sup>).

Теоремам 2 и 3 § 1 также отвечают общие и столь же просто доказываемые теоремы об общих выпуклых поверхностях. Так, теореме 2 соответствует совершенно тривиальное утверждение: если две замкнутые выпуклые поверхности  $F_1$  и  $F_2$  имеют общую внутреннюю точку  $O$ , то либо они подобны с центром подобия  $O$ , либо путем подобного преобразования с центром  $O$  поверхность  $F_1$  можно сделать касающейся в какой-то точке, но все же охватывающей поверхность  $F_2$ , или наоборот. Отличие от теоремы 2 § 1 о многогранниках состоит в том, что в случае многогранников речь идет только о вершинах, и потому теорема о них несколько менее тривиальна.

Переходя к сферическому изображению, теореме 2 § 1 можно сопоставить уже не столь непосредственно очевидное, но все же очень легко доказываемое утверждение:

Пусть  $F_1$  и  $F_2$  — замкнутые выпуклые поверхности с общей внутренней точкой  $O$ . Такие поверхности либо подобны с центром подобия  $O$ , либо на них имеются множества  $M_1$  и  $M_2$  с общим проектирующим их из точки  $O$  конусом и такие, что сферическое изображение множества  $M_1$  есть только часть сферического изображения множества  $M_2$ .

Отсюда следует теорема о подобии поверхностей  $F_1$  и  $F_2$ , у которых сферическим изображениям множеств  $M_1$  и  $M_2$  с общим проектирующим конусом отвечают равные значения какой-либо монотонной функции множества на сфере. В частности, получаем теорему о подобии поверхностей с одинаковой кривизной, «перенесенной на сферу  $E$  с центром в  $O$ ».

В моей заметке [13], где установлена эта теорема о подобии, по существу доказана, хотя и не сформулирована, именно общая теорема.

5. Пусть  $F$  — бесконечная полная выпуклая поверхность и  $e$  — направление какого-либо луча, содержащегося внутри  $F$ . Пусть  $T$  — плоскость, перпендикулярная к  $e$ , и  $M$  — произвольное борелевское множество на плоскости  $T$ . Обозначим  $\omega(M)$  площадь сферического изображения того множества на поверхности  $F$ , которое проектируется (вдоль  $e$ ) на множество  $M$ . Может случиться, что проекция поверхности  $F$  не покрывает всей плоскости. Тогда не всякое  $M$  может служить проекцией какой-либо части поверхности  $F$ ; но в таком случае, если  $M$  не пересекается с проекцией  $F$ , считаем  $\omega(M) = 0$ . Если же  $M$  покрывается проекцией  $F$  только отчасти, то имеется в виду сферическое изображение того множества на  $F$ , проекция которого все-таки попадает в  $M$ .

Таким путем оказывается определенной функция множества  $\omega(M)$  на плоскости  $T$ ; мы назовем ее *кривизной поверхности  $F$ , перенесенной на плоскость  $T$* .

Пользуясь этим понятием, сформулируем обобщение теоремы 4 § 2 на любые бесконечные выпуклые поверхности:

Для того чтобы данная функция  $\omega(M)$  (борелевского) множества на плоскости  $T$  была перенесенной на  $T$  кривизной некоторой выпуклой поверхности с данным предельным конусом  $K$ , необходимо и достаточно, чтобы 1)  $\omega(M)$  была неотрицательной и вполне аддитивной; 2) для  $M$ , состоящего из одной точки,  $\omega(M) < 2\pi$ ; 3) значение функции  $\omega$  для всей плоскости равнялось кривизне конуса  $K$ .

Здесь конус  $K$  может вырождаться в дважды покрытый плоский угол или в полупрямую, но во всяком случае подразумевается, что всякая прямая, перпендикулярная к плоскости  $T$ , либо вовсе его не пересекает, либо содержит в нем целую полупрямую.

<sup>9)</sup> В [119] А. Е. Каганом получены оценки изменения формы выпуклого многогранника и поверхности при изменении распределения кривизны, спроектированной на сферу. Из этих оценок, конечно, тоже следует указанная теорема. — Прим. В. А. Залгаллера.

Эта теорема особенно интересна, так как показывает, что кривизна выпуклой поверхности как функция множества не подчиняется никаким условиям, кроме очевидных (хотя и не совсем просто доказываемых со всей строгостью). Теорема доказывается предельным переходом от многогранников.

Соответствующая теорема единственности гласит:

Если две бесконечные полные выпуклые поверхности с равными и параллельными предельными конусами имеют одну и ту же кривизну, перенесенную на плоскость  $T$ , то эти поверхности совмещаются параллельным перемещением в направлении, перпендикулярном к  $T$  (при условии, что  $\omega(T) > 0$ ; если  $\omega(T) = 0$ , то поверхность может быть любым бесконечным цилиндром и ее предельный конус сводится к двугранному углу).

Это есть следствие общей теоремы: если две бесконечные поверхности с равными предельными конусами однозначно проектируются на плоскость  $T$ , то либо они совмещаются переносом в направлении, перпендикулярном к плоскости  $T$ , либо на них имеются такие множества  $M_1$  и  $M_2$  с общей проекцией на  $T$ , что сферическое изображение множества  $M_1$  есть лишь часть такового для  $M_2$ . Если поверхность  $F$  регулярна и представлена уравнением  $z = f(x, y)$ , то ее кривизна, перенесенная на плоскость  $(x, y)$ , будет

$$\omega(M) = \int K dF = \iint_M \frac{z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^{3/2}} dx dy,$$

как это сразу следует из известного выражения для гауссовой кривизны  $K$  и элемента площади  $dF$ . Поэтому в регулярном случае наши теоремы равносильны теоремам существования и единственности (с точностью до слагаемого) решения уравнения  $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2 = (1 + z_x^2 + z_y^2)^{3/2} g(x, y)$  на всей плоскости, где  $g(x, y)$  — данная функция ( $g = \frac{d\omega}{dx dy}$ ).

Правда, из самих наших теорем не следует, что функция  $z = f(x, y)$  будет даже дважды дифференцируемой; поэтому разрешимость уравнения нужно понимать в обобщенном смысле. Однако если функция  $g(x, y)$  достаточное число раз дифференцируема, то функция  $z = f(x, y)$  будет дважды дифференцируемой, т. е. будет решением уравнения в обычном смысле.

Обобщение теоремы 6 §1 гласит: пусть в выпуклой области  $G$  на плоскости  $T$  задана вполне аддитивная, неотрицательная функция множества  $\omega(M)$  такая, что  $\omega(G) < 2\pi$ . Пусть  $L$  — замкнутая кривая в пространстве, проектирующаяся на границу области  $G$ . Существует ограниченная кривой  $L$  выпуклая поверхность, у которой  $\omega(M)$  есть ее кривизна, перенесенная на плоскость  $T$ . Таких поверхностей только две: они обращены выпуклостью в противоположные стороны. Для регулярного случая в переводе на язык дифференциальных уравнений это означает разрешимость краевой задачи для указанного выше уравнения в любой выпуклой области, при любых непрерывных заданиях на границе.

6<sup>10)</sup>. Дальнейшие обобщения тесно связаны с теорией эллиптических уравнений типа Монжа — Ампера. Эти уравнения выступают, во-первых, как объект исследования геометрическими средствами и, во-вторых, как средство решения геометрических задач.

Рассмотрим простейший пример такого уравнения

$$R(z_x, z_y)(z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2) = \varphi(x, y), \quad (2)$$

где  $R$  и  $\varphi$  — заданные неотрицательные функции. Пусть  $z(x, y)$  — решение (2), оно задает выпуклую поверхность  $\Phi: z(x, y)$ . Интегрируя равенство (2) по множеству  $e$  из

<sup>10)</sup>Пункты 6 и 7 добавлены В. А. Залгаллером в качестве примечаний.

плоскости  $(x, y)$  и замечая, что  $z_{xx}z_{yy} - z_{xy}^2$  есть якобиан отображения  $\psi$  плоскости  $(x, y)$  в плоскость  $(p, q)$  по правилу  $p = z_x, q = z_y$  (это  $\psi$  называют *опорным* (иногда говорят *нормальным*) отображением поверхности  $\Phi$ ), получаем

$$\iint_{\psi(\mathbf{e})} R(p, q) dp dq = \iint_{\mathbf{e}} \varphi(x, y) dx dy. \quad (3)$$

Стоящую в (3) слева функцию множества  $\mathbf{e}$  называют *условной кривизной поверхности*  $\Phi$ . (При  $R(p, q) = (1 + p^2 + q^2)^{-3/2}$  это — гауссова кривизна поверхности  $\Phi$ .) Тогда (2) можно трактовать как задачу (3) нахождения поверхности  $\Phi$  по ее условной кривизне, перенесенной на борелевские множества плоскости или сферы. Такая задача допускает исследование геометрическими методами, изложенными в этой главе. То есть сначала решается ее аналог в классе многогранных поверхностей, затем используется предельный переход. Предельная поверхность служит обобщенным решением для (2). Этим путем впервые А. Д. Александров [29] исследовал многомерное уравнение Монжа — Ампера  $\det \|z_{ij}\| = \varphi(x_i, z, z_i)$ , а его ученик И. Я. Бакельман [58] одновременно рассматривал обобщенную задачу Дирихле для уравнения (2).

Вопрос о существовании регулярного решения краевых задач для уравнений Монжа — Ампера сводится к доказательству гладкости обобщенного решения. Получены также условия удовлетворения граничным условиям в классическом смысле и теоремы единственности решений краевых задач, см. [171]. Из обширной литературы по этим вопросам выделим работы [44, 59, 61, 173], содержащие систематическое изложение. Отметим еще обзор [282]. Многомерным аналогам уравнений Монжа — Ампера посвящены работы [174, 175, 241]. Вопросам устойчивости обобщенных и регулярных решений посвящены работы [60, 85, 87, 119, 240].

Обратное применение теорем разрешимости уравнений Монжа — Ампера к геометрическим задачам также широко использовалось. Приведем пример. Пусть в  $E^3$  (или  $H^3$ , или римановом  $M^3$ ) задано достаточно гладкое скалярное поле  $K > 0$ . Существует ли замкнутая выпуклая поверхность  $S$ , в каждой точке которой внешняя кривизна совпадает со значением  $K$  в этой точке? Эта задача исследована в [74, 121, 216]. Поле  $K$  задавалось в сферических координатах  $\varphi, \theta, \rho$  для  $E^3$  и  $H^3$  и в полярно-геодезических для  $M^3$ ; поверхность  $S$  искалась как функция  $\rho = \rho(\varphi, \theta)$  из уравнения Монжа — Ампера

$$\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2 = (1 + \Delta_1\rho)^2 \det \|g_{ij}\| \cdot K(\varphi, \theta, \rho),$$

где  $\rho_{ij}$  — вторые ковариантные производные,  $\Delta_1$  — первый дифференциальный параметр Бельтрами. Решение сводилось к получению априорных оценок в  $C^2$  и последующему применению принципа Лере — Шаудера. В указанных работах найдены достаточные условия разрешимости и доказана соответствующая теорема единственности. Обобщению результатов [74] на многомерный случай посвящены статьи [271, 327].

**7.** Задачам о восстановлении выпуклой поверхности (в частности, многогранника) по внешней кривизне, перенесенной проектированием на другую поверхность (сферу, орисферу, плоскость и т. п.) и различным обобщениям этой задачи посвящено много работ, например [57, 62, 76, 78, 79, 81, 114, 131, 132, 151, 211].



---

---

## Глава X

### Жесткость выпуклого многогранника со стационарной разверткой

---

---

Пусть многогранник  $P$  деформируется с изменением некоторого параметра  $t$ , который удобно понимать как время; начальному положению соответствует  $t = 0$ . Предполагается, что при деформации ребра и грани многогранника могут ломаться, так что возникают новые вершины и новые ребра.

В этой главе нас будут интересовать только *бесконечно малые деформации первого порядка*, т. е. иными словами, скорости в момент  $t = 0$ . Дальше, говоря о деформации, мы обычно будем иметь в виду именно бесконечно малую деформацию; отсутствие соответствующей оговорки не поведет к недоразумениям. Скорости всегда относятся к начальному моменту  $t = 0$ .

Если для какой-либо величины  $x$  ее производная по  $t$  при  $t = 0$  равна нулю:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = 0,$$

то мы говорим, что величина  $x$  стационарна.

Фигура называется *жесткой*, если (при данных условиях) ее деформация necessarily сводится к движению, т. е. скорости в начальный момент такие, как у твердого тела.

Еще в § 6 главы II была выяснена общая аналогия теорем о жесткости с теоремами единственности; теоремы, которые будут установлены в этой главе, аналогичны теоремам единственности, доказанным в главе III, и метод их доказательства будет по существу тот же. Однако здесь есть существенное различие: в теоремах о жесткости речь идет не об истинной деформации, а только о ее главной части первого порядка относительно  $t$ . С этим связаны обстоятельства, не имеющие места для конечных деформаций и соответственно теорем о единственности или о равенстве. (В частности, в отличие от результатов главы III доказываемые здесь теоремы не имеют места для многогранников, вырождающихся в дважды покрытые многоуголь-

ники, как было уже показано в § 6 главы II. Поэтому такие многогранники мы вовсе исключаем из рассмотрения.)

### § 1. ДЕФОРМАЦИИ МНОГОГРАННОГО УГЛА

**1.** Пусть  $V$  — выпуклый многогранный угол<sup>1)</sup>. Мы будем допускать, что некоторые грани угла  $V$  могут лежать в одной плоскости, образовывая тем самым одну «истинную» грань. Ребра, разделяющие такие грани, будут «ненастоящими»; двугранные углы при них равны  $\pi$ . Дальше, говоря просто о ребрах, мы имеем в виду как настоящие, или истинные, ребра, так и ненастоящие. Мы будем также допускать, что угол  $V$  сводится к двугранному углу, но не к плоскости. Тогда все его двугранные углы равны  $\pi$ , кроме двух, меньших  $\pi$ ; ребра этих углов образуют одну прямую.

Мы будем рассматривать деформацию угла  $V$ , вызванную вращением его ребер вокруг вершины. Вместе с вращением ребер вращаются и деформируются грани угла  $V$ ; предполагается, что новых ребер не появляется, но «ненастоящие» ребра могут становиться «настоящими».

Не исключается, что в результате деформации угол  $V$  перестает быть выпуклым. При достаточно малых конечных деформациях это возможно лишь в том случае, если имеются ненастоящие ребра и истинные грани переламываются по этим ребрам внутрь. Тогда двугранные углы при этих ребрах возрастают и становятся больше  $\pi$ .

Задача состоит в рассмотрении знаков начальных скоростей изменения двугранных углов деформируемого угла  $V$  при том условии, что все плоские его углы стационарны. Задача аналогична той, которая была исследована в § 1 главы III для конечных деформаций без нарушения выпуклости и ее можно решать аналогичным методом, рассматривая, однако, не приращение углов, а только их главные части, или, что то же самое, производные по  $t$  при  $t = 0$ <sup>2)</sup>. Однако мы воспользуемся другим приемом, который не только скорее приведет к цели, но имеет также некоторый самостоятельный интерес<sup>3)</sup>.

**2.** Так как движение угла  $V$  как целого можно исключить, то можно считать, что любое какое-то его ребро  $p_1$  и одна из плоскостей граней, сходящихся в  $p_1$ , неподвижны. Тогда плоскость другой грани с ребром  $p_1$  будет вращаться вокруг этого ребра. И если плоский угол на этой грани стационарен, то (в начальный момент) вся эта грань вращается вокруг ребра  $p_1$

<sup>1)</sup>Вырождение угла  $V$  в дважды покрытый плоский угол не допускается.

<sup>2)</sup>Дальше будет видно, что даже при сохранении выпуклости в случае бесконечно малой деформации возможно распределение знаков, невозможное при конечной деформации. Это лишний раз показывает, что, следуя аналогии с выводами главы III, нужно все же пользоваться производными, а не конечными приращениями.

<sup>3)</sup>Этот прием не нов, хотя мне не известно, от кого он исходит.

как твердое тело. Не исключая теперь вращения ребра  $p_1$  и ранее закрепленной грани, можно сказать, что деформация двугранного угла состоит в относительном вращении плоскостей граней вокруг их общего ребра. Этот вывод верен, конечно, для любой пары граней с общим ребром.

Вращение твердого тела задается вектором угловой скорости, направленным по оси вращения так, что вместе с направлением самого вращения он образует правый винт. Сложение вращений вокруг пересекающихся осей сводится, как известно, к векторному сложению их угловых скоростей<sup>4)</sup>.

Выберем на угле  $V$  направление обхода вокруг вершины и соответственно с ним определим порядок следования ребер и граней. На каждом ребре  $p_i$  возьмем вектор  $\omega_i$  угловой скорости вращения следующей за ним грани относительно предыдущей. Вектор  $\omega_i$  считается лежащим на ребре и может

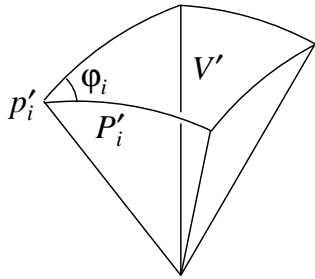


Рис. 147

быть поэтому направлен либо к вершине угла  $V$ , либо от нее. Длина вектора  $\omega_i$  есть не что иное, как абсолютная величина начальной скорости  $\dot{\varphi}_i$  изменения двугранного угла  $\varphi_i$  при ребре  $p_i$ . Направление вектора  $\omega_i$  определяет знак этой скорости, потому что с изменением направления  $\omega_i$  меняется направление вращения. Эта связь направления вектора  $\omega_i$  со знаком скорости  $\dot{\varphi}_i$  — одна и та же для всех ребер, т. е. если на одном ребре направлению  $\omega_i$  от вершины отвечает  $\dot{\varphi}_i$  (или наоборот), то и на всех ребрах будет так же. Действительно, пересечем угол  $V$  единичной сферой  $S$  с центром в его вершине; на сфере  $S$  мы получим многоугольник  $V'$  с вершинами  $p'_i$  и сторонами  $P'_i$ , отвечающими ребрам к граням угла  $V$  (рис. 147). Углы  $\varphi_i$  этого многоугольника равны двугранным углам угла  $V$ . Направление обхода, заданное на угле  $V$ , определяет обход многоугольника  $V'$  и тем самым ориентацию сферы  $S$ <sup>5)</sup>.

<sup>4)</sup> Пусть  $O$  — закрепленная точка твердого тела, которую примем за начало координат. Тогда, если  $\omega$  — вектор угловой скорости и  $\mathbf{x}$  — вектор из  $O$  в любую точку  $X$  твердого тела, то скорость этой точки будет  $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{x}$ . При сложении двух вращений с угловыми скоростями  $\omega_1, \omega_2$  вокруг осей, пересекающихся в точке  $O$ , получим  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \omega_1 \times \mathbf{x} + \omega_2 \times \mathbf{x} = (\omega_1 + \omega_2) \times \mathbf{x}$ , т. е. угловая скорость суммарного вращения есть  $\omega = \omega_1 + \omega_2$ .

<sup>5)</sup> Ориентация, как всегда, задается обходом малого контура. Возьмем малый круг  $C$  с центром на границе многоугольника  $V'$ . Образует контур  $C'$ , составленный из дуги круга  $C$ , лежащей в  $V'$ , и отрезка границы многоугольника  $V'$ . Ориентация этого контура, а тем самым и контура круга  $C$ , задается направлением обхода границы многоугольника  $V'$ . (Если двигать круг  $C$  вдоль границы многоугольника  $V'$ , то из соображений непрерывности очевидно, что данное определение ориентации не зависит от выбора точки на границе многоугольника  $V'$ , служащей центром круга  $C$ .)

Допустим для определенности, что эта ориентация вместе с направлением от центра сферы образует правый винт. (Так как ребра угла  $V$  идут из центра сферы  $S$ , то это означает, что все винты, определяемые обходом на  $V$  и его ребрами, — правые.) Пусть, например, вектор  $\omega_i$  направлен от вершины угла  $V$ . По самому определению вектора  $\omega_i$  это означает, что направление ребра  $p_i$  с направлением вращения грани  $P_i$  относительно  $P_{i-1}$  образуют правый винт. Поэтому сторона  $P'_i$  многоугольника  $V'$  должна вращаться относительно  $P'_{i-1}$  в направлении, указанном ориентацией сферы  $S$ , т. е. внутрь многоугольника  $V'$ . Скорость  $\dot{\varphi}_i$  изменения угла  $\varphi_i$  будет, следовательно, отрицательной.

Это заключение верно для всех ребер, и тем самым связь между направлением вектора  $\omega_i$  и знаком скорости  $\dot{\varphi}_i$  — одна и та же для них всех. (Если изменить обход угла  $V$ , то эта связь станет только обратной: векторам  $\omega_i$ , идущим от вершины, будут отвечать  $\dot{\varphi}_i > 0$ .)

Таким образом, вопрос о распределении знаков скоростей  $\dot{\varphi}_i$  сводится к вопросу о распределении направлений векторов  $\omega_i$ . Для решения последнего вопроса докажем следующее предложение:

*Сумма всех векторов  $\omega_i$  равна нулю.*

Действительно, как было отмечено, сложение вращений сводится к сложению векторов угловых скоростей. Поэтому сумма  $\omega_i + \omega_{i+1}$  определяет вращение  $(i+2)$ -й грани относительно  $i$ -й. Складывая все скорости  $\omega_i$  от первой до последней, убедимся, что полученная сумма определяет вращение первой грани относительно ее самой, т. е. отсутствие вращения. Поэтому сумма всех векторов  $\omega_i$  равна нулю.

**3<sup>6)</sup>**. Теперь докажем следующую лемму, содержащую нужный нам результат о распределении знаков скоростей изменения двугранных углов.

**Лемма 1.** *Пусть выпуклый многогранный угол  $V$ , может быть сводящийся к двугранному, но не к плоскости, деформируется так, что все его плоские углы стационарны. Сопоставим каждому его ребру знак начальной скорости изменения двугранного угла с этим ребром; ребра стационарных двугранных углов оставим неотмеченными. Тогда для распределения этих знаков имеются только четыре возможности:*

- 1) ни одно ребро не отмечено;
- 2) число перемен знака не менее четырех;
- 3) имеются только две переменные знака, но тогда все отмеченные ребра принадлежат одной истинной грани и крайние из этих ребер имеют один знак;
- 4) имеются только два отмеченных ребра; тогда они образуют вместе одну прямую и не только отмечены одним знаком, но скорости изменения

<sup>6)</sup> В связи с этим пунктом см. заметку [83]. — Прим. В. А. Залгаллера.

их двугранных углов равны. Этот случай возможен, очевидно, только на угле  $V$ , сводящемся к двугранному, так как только при этом условии два ребра могут образовывать вместе одну прямую, а именно ребро того двугранного угла, к которому сводится угол  $V$ . (То, что скорости изменения двугранных углов при этих двух ребрах равны, а при всех прочих ребрах углы стационарны, поскольку ребра не отмечены, означает, что угол  $V$ , деформируясь, остается двугранным, если пренебрегать величинами выше первого порядка.)

Пользуясь выводами п<sup>о</sup> 2, эту лемму можно переформулировать на языке векторов  $\omega_i$ <sup>7)</sup>:

**Лемма 1а.** Пусть на ребрах выпуклого многогранного угла  $V$ , быть может, сводящегося к двугранному, но не к плоскости, заданы векторы  $\omega_i$  так, что сумма их всех равна нулю. Тогда для распределения направлений этих векторов к вершине угла  $V$  или от нее имеются только следующие возможности:

- 1) все векторы равны нулю;
- 2) число перемен направлений — не менее четырех;
- 3) имеется только две переменны направлений, и тогда все ненулевые векторы  $\omega_i$  лежат на одной истинной грани и крайние из этих векторов одинаково направлены (т. е. либо оба к вершине, либо оба от нее);
- 4) имеется только два ненулевых вектора. Но тогда из равенства их суммы нулю очевидно, что они лежат на одной прямой, равны по величине и направлены либо оба от вершины, либо оба к вершине. (Этот случай возможен лишь, если угол  $V$  — двугранный).

В силу выводов п<sup>о</sup> 2 лемма 1а содержит лемму 1, а потому достаточно доказать лемму 1а<sup>8)</sup>.

Векторы, равные нулю, не имеют направления и их можно не принимать во внимание; соответственно будем считать, что есть хотя бы один

<sup>7)</sup>Все случаи 1–4 действительно осуществляются: первый — при отсутствии деформации; четвертый — при любой деформации двугранного угла без переламывания его (истинных) граней; второй легче всего видеть на примере деформации четырехгранного угла: здесь два ребра, при которых углы возрастают, разделяются ребрами, при которых углы убывают. Третий случай получим на четырехгранном угле, выродившемся в трехгранный: углы при ребрах  $p, q, r$  меньше  $\pi$ , четвертое ребро  $s$  лежит на истинной грани ( $q, r$ ) и угол при нем равен  $\pi$ . Если ребро  $s$  двигать в плоскости, перпендикулярной к содержащей его грани, то все плоские углы стационарны и стационарен также угол при ребре  $p$ , но углы при  $q, r, s$  не стационарны, и если угол при  $s$  убывает, то углы при  $p$  и  $r$  возрастают.

<sup>8)</sup>Обе леммы эквивалентны. То, что лемма 1 содержится в лемме 1а, уже показано в п<sup>о</sup> 2. Вместе с тем если на ребрах угла  $V$  задать векторы  $\omega_i$ , в сумме равные нулю, то, приняв их за векторы угловых скоростей, определим тем самым деформацию угла  $V$ , при которой, как легко убедиться, все плоские углы будут стационарны.

ненулевой вектор; этим первая возможность исключается. Число перемен направлений при замкнутом обходе заведомо четно. Поэтому приходится различать три случая:

а) все векторы направлены одинаково, т. е. либо все к вершине, либо все от нее;

б) имеется только две переменны направлений;

в) перемен направлений — не менее четырех.

Для доказательства леммы остается показать, что в случае *a* имеем четвертую возможность, указанную в лемме, а в случае *b* — третью.

**4.** Рассмотрим случай *a*: для определенности будем считать, что все векторы направлены от вершины (в противном случае достаточно изменить их знаки).

Так как угол  $V$  — выпуклый, то он лежит по одну сторону от плоскости  $P$  любой своей грани, и потому все векторы  $\omega_i$  направлены в одно замкнутое полупространство, ограниченное плоскостью  $P$  и содержащее угол  $V$ . Если бы векторы не лежали все в плоскости  $P$ , то их сумма не могла бы равняться нулю. Следовательно, все векторы  $\omega_i$  должны лежать в плоскости  $P$  и тем самым на ребрах, принадлежащих одной истинной грани угла  $V$ .

Так как истинная грань выпукла, то она лежит в одной полуплоскости  $P'$ . Пусть  $L$  — прямая, ограничивающая эту полуплоскость на плоскости  $P$ . Векторы  $\omega_i$  направлены в полуплоскость  $P'$  и если бы они не лежали на прямой  $L$ , то их сумма не могла бы равняться нулю. Следовательно, они могут лежать только на прямой  $L$ . Но тогда, очевидно, что если векторы вообще имеются, то их только два и они равны и направлены оба либо к вершине, либо от нее. Этим доказано, что при отсутствии перемен направлений осуществляется только четвертая возможность, указанная в лемме.

**5.** Рассмотрим теперь случай *b*, когда имеется только две переменны направлений. Нужно доказать, что тогда все векторы  $\omega_i$  лежат на одной истинной грани и крайние из них направлены одинаково.

Так как имеется только две переменны направлений, то имеется только две последовательности векторов одинаковых направлений; надлежащим образом нумеруя векторы, можно считать, что векторы  $\omega_1, \dots, \omega_m$  направлены к вершине, а векторы  $\omega_{m+1}, \dots, \omega_n$  — от нее. Проведем на гранях угла  $V$  из его вершины полупрямые  $p, q$  так, чтобы они разделяли эти последовательности векторов (рис. 148). Плоскость  $(pq)$ , проходящая через эти полупрямые, либо будет плоскостью одной из граней угла  $V$ , либо разобьет его на два угла  $V_1$  и  $V_2$ . Так как полупрямые  $p, q$  разделяют одну последовательность векторов от другой, то векторы одной из них лежат в одном замкнутом полупространстве, ограниченном плоскостью  $(pq)$ , а векторы другой — в другом.

Такое положение мы имеем, считая, что каждый вектор лежит на своем ребре. Но если все эти векторы отложить из вершины угла  $V$ , то векторы, направленные от нее, окажутся идущими в то же полупространство, куда идут векторы, направленные к вершине. Так как сумма всех векторов равна нулю, то, очевидно, ни один из них не может быть направлен вовнутрь

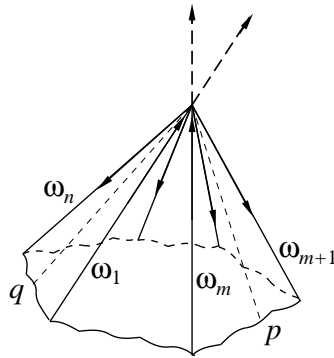


Рис. 148

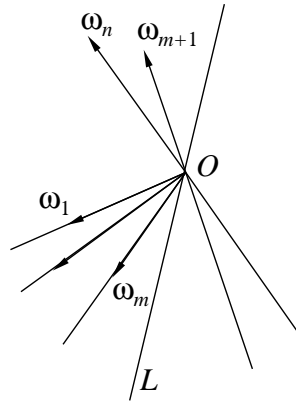


Рис. 149

этого полупространства. Все они лежат, следовательно, в плоскости  $(pq)$ . Но тогда эта плоскость есть плоскость одной из граней угла  $V$ , так как она содержит его ребра с векторами  $\omega_i$ . Итак, доказано, что все векторы  $\omega_i$  лежат в плоскости одной грани.

Допустим теперь, вопреки второй части доказываемого утверждения, что крайние векторы, которые мы теперь (в новой нумерации) обозначим  $\omega_1$  и  $\omega_n$ , направлены по-разному: вектор  $\omega_1$  — к вершине, а  $\omega_n$  — от нее. Тогда при переходе от  $\omega_n$  к  $\omega_1$  есть перемена направления, а так как мы предполагаем, что таких перемен всего две, то в последовательности  $\omega_1, \dots, \omega_n$  есть только одна перемена направления, происходящая, скажем, при переходе от вектора  $\omega_m$  к вектору  $\omega_{m+1}$ .

Пусть  $P$  — плоскость, содержащая все векторы  $\omega_1, \dots, \omega_n$ . Пусть  $L$  — прямая, проходящая в плоскости  $P$  через вершину  $O$  угла  $V$  и отделяющая ребра, несущие векторы  $\omega_1, \dots, \omega_m$ , от ребер, несущих векторы  $\omega_{m+1}, \dots, \omega_n$ . Когда векторы лежат на соответствующих ребрах, то они направлены соответственно к вершине и от нее. Если же их отложить из вершины, то они все будут направлены из вершины в одну полуплоскость, ограниченную прямою  $L$  (рис. 149). Но в таком случае их сумма, очевидно, не может равняться нулю. Следовательно, предположение о том, что крайние векторы направлены по-разному, невозможно: они должны быть направлены одинаково.

Таким образом, в случае  $b$  действительно имеет место только третья возможность, указанная в лемме, и лемма полностью доказана.

**6.** Если многогранный угол  $V$  сводится к плоскости, то совершенно очевидно, что все векторы  $\omega_i$  могут быть направлены к вершине (или от нее), хотя их сумма равна нулю. Соответственно все плоские углы могут быть стационарными, а двугранные углы нестационарными и именно могут все меняться в одну сторону, так что угол  $V$  будет оставаться выпуклым. В этом можно убедиться непосредственно. Для этого закрепим на ребрах угла  $V$  точки  $A_i$  на расстоянии  $a$  от вершины  $O$  и будем поднимать вершину над плоскостью, к которой в начальный момент сводился угол  $V$ . Точки же  $A_i$  оставим неподвижными. Тогда, как легко проверить, длины отрезков  $OA_i$ , а вместе с ними плоские углы треугольников  $OA_iA_{i+1}$  будут стационарны, в то время как двугранные углы при ребрах  $OA_i$  будут убывать со скоростями, не равными нулю.

## § 2. УСИЛЕННАЯ ЛЕММА КОШИ

**1.** Пусть замкнутый выпуклый многогранник  $P$  деформируется так, что некоторые его грани могут переламываться по диагоналям. Эти диагонали будут «новыми» ребрами многогранника. Нашей целью является доказать, что если при этом плоские углы многогранника стационарны, то и двугранные его углы также стационарны. В частности, следовательно, стационарны углы при «новых» ребрах, т. е. начальная скорость возникновения этих ребер равна нулю. Эта теорема аналогична доказанной в § 2 главы III теореме о равенстве двугранных углов при условии равенства плоских углов. Однако здесь мы не можем воспользоваться леммой Коши, потому что, как показано в предыдущем параграфе, при стационарности плоских углов вокруг вершины может быть и не четыре, а только две перемены знака. (Там указана еще возможность, что вокруг некоторой вершины  $A$  перемен знака нет, но тогда только два ребра отмечены и оба одним знаком. Этот случай можно исключить вовсе: достаточно исключить все неотмеченные ребра, а оба отмеченных ребра принять за одно, тогда вершина  $A$  просто исчезнет.) Однако в лемме, доказанной в § 1, указаны особые свойства расположения знаков, если их перемен — только две. Оказывается, что с соблюдением этих свойств результат леммы Коши остается все-таки верным: такая расстановка знаков невозможна. Так как этот результат будет использован в разных случаях: в § 3–5 этой главы и в главе XI, то мы сформулируем и докажем его здесь в общем виде в качестве «усиленной леммы Коши».

Вместо расстановки знаков на ребрах многогранника можно, конечно, говорить о расстановке знаков на отрезках — «ребрах» некоторой сети на поверхности, гомеоморфной сфере, подчинив эту сеть некоторым необходи-



мым условиям. Эта более абстрактная точка зрения полезна в приложениях леммы.

**2. Усиленная лемма Коши.** Пусть на поверхности, гомеоморфной сфере, дана сеть линий — «ребер», не имеющих попарно общих точек, кроме концов — «вершин» сети, причем эта сеть обладает тремя свойствами: а) никакие две вершины не соединены двумя ребрами; б) каждая из областей — «граней», на которые сеть разбивает поверхность, ограничена одной замкнутой цепью ребер без кратных точек; в) ребро, соединяющее две вершины грани, принадлежит этой грани.

Пусть на некоторых гранях проведены еще «новые ребра», являющиеся их непересекающимися диагоналями, и притом так, что условия а и в не нарушаются. Эти ребра делят «старые» грани на «новые» грани<sup>9)</sup>.

Пусть некоторым ребрам, как «старым», так и «новым», сопоставлены знаки плюс или минус, причем некоторые ребра могут остаться неотмеченными. Вершину, к которой подходит хотя бы одно отмеченное ребро, назовем отмеченной; число их обозначим  $E$ .

Назовем вершину *особой*, если расстановка знаков на сходящихся в ней ребрах отвечает случаю 3 леммы 1 § 1. То есть число перемен знака вокруг такой вершины равно двум и все подходящие к ней ребра не отмечены, кроме ребер, принадлежащих одной «старой» грани, причем два крайних из этих ребер отмечены одним знаком. Число особых вершин обозначим  $E^*$ .

*Усиленная лемма Коши* состоит в утверждении, что *общая сумма  $N$  перемен знаков при обходах вокруг всех вершин удовлетворяет неравенству*

$$N \leq 4E - 2E^* - 8. \quad (1)$$

Отсюда следует, что *не может быть такой расстановки знаков, при которой вокруг каждой неособой отмеченной вершины имеется не менее четырех перемен знака.* Действительно, при такой расстановке было бы  $N \geq 4(E - E^*) + 2E^*$ , поскольку вокруг  $E^*$  особых вершин имеется по две переменные знака. А это противоречит неравенству (1).

Более того, в неравенстве (1) есть еще «запас»:  $-8$ . Поэтому *можно допустить одну вершину вовсе без перемен знака или три вершины с двумя (произвольными) переменными знака: все равно вследствие этого «запаса» такая расстановка знаков будет невозможной.*

Доказательство этой усиленной леммы Коши будет аналогично доказательству простой леммы Коши § 1 главы II.

<sup>9)</sup>Эти условия, конечно, выполняются для сети ребер выпуклого многогранника и непересекающихся диагоналей его граней. Слово «линия» означает гомеоморфный образ прямолинейного отрезка.

**3.** Рассмотрим сеть, образованную одними отмеченными ребрами; неотмеченные ребра мы вовсе исключим из рассмотрения. Она разбивает рассматриваемую поверхность на области. Из условия *a* леммы следует, что областей, ограниченных только двумя ребрами, нет.

Если подсчитывать общее число перемен знака при обходах вокруг областей, то получим то же самое число  $N$ , потому что переход от одного ребра к соседнему происходит одновременно как вокруг вершины, так и вокруг области. При этом ребро, принадлежащее области, но не отделяющее ее от других областей, проходится дважды (см. рис. 61, с. 86). В связи с этим такое ребро считается за две стороны области. Поэтому, если  $F_n$  означает число областей с  $n$  сторонами, а  $K$  — общее число ребер, то

$$2K = \sum_n nF_n. \quad (2)$$

Если  $E, K, F$  — числа вершин, ребер и областей, то по обобщенной теореме Эйлера

$$E - K + F \geq 2. \quad (3)$$

Отсюда, умножая на 4 и пользуясь формулой (2), получаем

$$4E - 8 \geq \sum_n 2(n - 2)F_n. \quad (4)$$

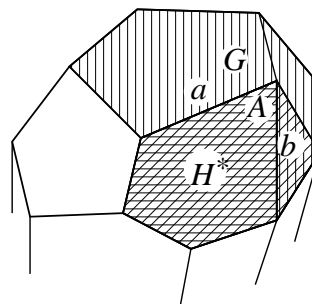


Рис. 150

Поэтому если мы докажем, что общее число перемен знака удовлетворяет неравенству

$$N \leq \sum_n 2(n - 2)F_n - 2E^*, \quad (5)$$

то тем более будет верно неравенство (1).

Эту оценку (5) для общего числа перемен знака мы получим подсчетом перемен знака вокруг областей.

**4.** Пусть  $G$  — одна из областей в сети отмеченных ребер. Будем говорить, что ее вершина  $A$  есть *особая вершина в области  $G$* , если 1) вершина  $A$  — особая в смысле определения, данного в лемме; 2) стороны области  $G$ , сходящиеся в  $A$ , суть как раз два крайних ребра в ряду подходящих к  $A$  отмеченных ребер, которые лежат на одной «старой грани»; согласно определению особой вершины, эти крайние ребра отмечены одним знаком.

Из свойств особых вершин сети, указанных в лемме, легко вытекают следующие свойства вершин, особых в любой области  $G$ :

1) Всякая особая вершина сети оказывается особой в одной и только одной области.

2) В особой вершине области  $G$  нет перемены знака при обходе вокруг области  $G$ .

3) Если вершина  $A$  области  $G$  — особая в  $G$ , то сходящиеся в ней стороны  $a, b$  области  $G$  суть ребра или диагонали одной старой грани  $H$ . Во всяком случае они вырезают из  $H$  некоторую часть  $H^*$ , которую мы также назовем «гранью».  $H^*$  совпадает с  $H$  только в том случае, если оба указанных ребра суть (старые) ребра грани  $H$  (рис. 150); грань  $H^*$  покрыта горизонтальной штриховкой, область  $G$  — вертикальной, а грань  $H$  — наклонной. Грань  $H^*$  есть часть старой грани  $H$ , остальная часть грани  $H$  попала в  $G$ . Область  $G$  и грань  $H^*$  лежат по разные стороны от ребер  $a, b$ , по крайней мере вблизи них<sup>10)</sup>.  $H^*$  есть как раз та часть грани  $H$ , на которой лежат подходящие

к  $A$  отмеченные ребра, откуда ясно, что  $H$  отделена от  $G$  крайними из этих ребер.

4) Если две соседние вершины  $A$  и  $B$  области  $G$  — особые в  $G$ , то все три стороны  $AB, AC, BD$  области  $G$  принадлежат одной грани (рис. 151). Действительно, как только

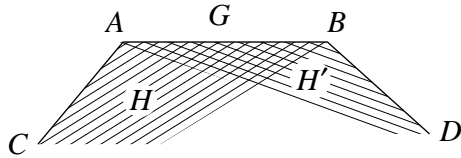


Рис. 151

что отмечено, стороны  $AB, AC$  принадлежат одной грани  $H$ , отделенной от  $G$ , и точно так же стороны  $AB$  и  $BD$  принадлежат одной грани  $H'$ , отделенной от  $G$ . Но по одну сторону от  $AB$  может лежать только одна грань, а потому  $H$  и  $H'$  совпадают.

5. После этих замечаний обратимся к оценке числа перемен знака при обходе вокруг любой области  $G$ .

Пусть  $e_G$  — число всех вершин области  $G$ ,  $e_G^*$  — число ее особых вершин, а  $n_G$  — число перемен знака при обходе вокруг  $G$ . Покажем, что

$$n_G \leq 2(e_G - e_G^* - 2). \quad (6)$$

Так как в особых вершинах нет перемен знака, то

$$n_G \leq e_G - e_G^*,$$

кроме того,  $n_G$  заведомо четно и поэтому

$$n_G \leq 2 \left\lfloor \frac{e_G - e_G^*}{2} \right\rfloor, \quad (7)$$

<sup>10)</sup>Заранее вовсе не ясно, что грань  $H^*$  не может входить в область  $G$ ; хотя  $H^*$  разрезана «новыми ребрами», но некоторые ее куски могли бы входить в  $G$ . Однако вблизи указанных ребер того быть не может, в чем и состоит наше утверждение.

где прямые скобки обозначают, как принято, целую часть заключенного в них числа.

Если  $x \geq 3$ , то, как легко проверить,

$$\left[ \frac{x}{2} \right] \leq x - 2.$$

Поэтому при  $e_G - e_G^* \geq 3$  из (7) следует нужный нам результат:

$$n_G \leq 2(e_G - e_G^* - 2). \quad (8)$$

Предположим теперь, что  $e_G - e_G^* < 3$ , т. е. что у области  $G$  есть максимум две неособые вершины. По доказанному выше областей только с двумя вершинами быть не может, а потому  $e_G \geq 3$  и при  $e_G - e_G^* < 3$  будет  $e_G^* \geq 1$ , т. е. область  $G$  наверное имеет особые вершины. Число же неособых вершин  $e_G - e_G^* \leq 2$ .

Докажем, что неособых вершин не может быть меньше двух, а если их две, то они несоседние.

Допустим противное и пусть идущие подряд вершины  $A_1, \dots, A_{e-2}$  области  $G$  — особые, а две оставшиеся соседние вершины  $A_{e-1}, A_e$  — может быть, и неособые. Тогда из отмеченного выше последнего свойства особых вершин следует, что все стороны  $A_e A_1, A_1 A_2, \dots, A_{e-2} A_{e-1}$  принадлежат одной грани  $H^*$ . В таком случае сторона  $A_{e-1} A_e$  также принадлежит  $H^*$ , потому что по условию в леммы ребро исходной сети, соединяющее две вершины одной грани, принадлежит ей. Следовательно, если сторона  $A_{e-1} A_e$  есть «старое ребро», то она есть ребро грани  $H^*$ , если же она есть «новое ребро», то она является диагональю грани  $H^*$ . В последнем случае сторона  $A_{e-1} A_e$  отделяет от грани  $H^*$  некоторую ее часть. Так или иначе, оказывается, что все стороны области  $G$  ограничивают область  $H^{**}$ , гомеоморфную кругу.

По основному свойству особых вершин из всех вершин  $A_1, \dots, A_{e-2}$  должны исходить ребра, лежащие между ребрами  $A_i A_{i+1}$ . Эти ребра должны быть, очевидно, диагоналями грани  $H^*$  и тем самым области  $H^{**}$ . По условию они не могут пересекаться. Но  $A_1, \dots, A_{e-2}$  суть все вершины области  $H^{**}$ , кроме двух соседних  $A_{e-1}, A_e$ , и так как  $H^{**}$  гомеоморфна кругу, то из каждой вершины  $A_1, \dots, A_{e-2}$  нельзя провести хотя бы по одной диагонали так, чтобы эти диагонали не пересекались<sup>11)</sup>. (В частности, если  $e = 3$  и есть только одна особая вершина  $A_1$ , то диагоналей нет вовсе.) Следовательно, если и имеется две неособые вершины, то они несоседние.

<sup>11)</sup> Строгое доказательство получается немедленно индукцией по числу вершин.

Но если все вершины, кроме двух несоседних, — особые, то все стороны области  $G$  подходят к особым вершинам и потому на всех них стоят одинаковые знаки, т. е. число перемен знаков  $n_G = 0$ . Вместе с тем в этом случае разность числа всех вершин и особых вершин  $e_G - e_G^* = 2$ . Поэтому

$$n_G = 2(e_G - e_G^* - 2),$$

т. е. оценка (6) имеет место также в случае  $e_G - e_G^* < 3$ .

6. Сложив числа перемен знаков  $n_G$  для всех областей  $G$ , получим общее число перемен знаков  $N$  и в силу оценки (6) будем иметь

$$N = \sum n_G \leq \sum 2(e_G - 2) - 2 \sum e_G^*. \quad (9)$$

Если  $F_n$  есть число областей  $G$  с  $n$  вершинами, т. е. с  $n$  сторонами, то

$$\sum 2(e_G - 2) = \sum_n 2(n - 2)F_n. \quad (10)$$

Далее, каждая особая вершина сети является вершиной, особой в одной и только одной области. Поэтому сумма чисел особых вершин по всем областям равна числу всех особых вершин сети, т. е.

$$\sum e_G^* = E^*. \quad (11)$$

Поэтому оценку (9) можно переписать так:

$$N \leq \sum_n 2(n - 2)F_n - 2E^*.$$

Таким образом, неравенство (5) доказано, а вместе с ним доказана и вся усиленная лемма Коши.

### § 3. СТАЦИОНАРНОСТЬ ДВУГРАННЫХ УГЛОВ МНОГОГРАННИКА ПРИ СТАЦИОНАРНОСТИ ЕГО ПЛОСКИХ УГЛОВ

1. Пусть  $P$  — выпуклый многогранник; он может быть замкнутым, бесконечным или может иметь границу.

*Разобъем его грани на произвольные части отрезками (или полупрямыми в случае бесконечных граней), не встречающимися внутри граней. Концы этих отрезков могут, следовательно, лежать только на ребрах или в вершинах многогранника<sup>12)</sup>.*

<sup>12)</sup>Без этого условия из стационарности плоских углов не может вытекать стационарность двугранных углов, как это ясно из замечания, сделанного в конце § 1. Если, например, разбить грань куба, проведя в ней две диагонали, то двугранные углы не будут стационарными. (Что касается разбиений старых граней, при которых появляются новые вершины, см. результат Р. Коннелли, упомянутый в подстрочном примечании<sup>32)</sup> на с. 129, 130. — Прим. В. А. Залгаллера.)

Каждую часть грани мы будем считать гранью, отрезки или полупрямые, разбивающие грани, — ребрами, концы этих отрезков (или полупрямых) — вершинами. Таким образом, у многогранника появляются «ненастоящие» ребра, лежащие внутри его истинных граней, и «ненастоящие» вершины, лежащие внутри его истинных ребер. Всюду дальше в этом и в следующих параграфах грани, ребра и вершины будут пониматься в указанном обобщенном смысле.

Будем рассматривать непрерывную деформацию многогранника  $P$  с изменением некоторого параметра  $t$ , причем начальному положению отвечает  $t = 0$ . Деформацию мы подчиняем следующим условиям:

- 1) каждая вершина, включая и «ненастоящие», движется с определенной (может быть, переменной) скоростью, т. е. ее координаты суть дифференцируемые функции от  $t$ ;
- 2) ни новых вершин, ни новых ребер не появляется.

Из этих условий с очевидностью вытекает, что истинные грани многогранника не ломаются иначе, как по заранее введенным ненастоящим ребрам, и что их части, принятые за грани, вращаются вокруг их общих ребер с определенными скоростями, причем самые ребра также вращаются и меняют свою длину. Очевидно также, что все элементы многогранника, в частности плоские и двугранные углы, меняются с определенными скоростями, т. е. суть дифференцируемые функции от  $t$ . Вовсе не предполагается, что многогранник должен оставаться выпуклым.

Дальше речь идет именно о таких деформациях.

Нас интересуют условия, при которых из стационарности плоских углов следует стационарность двугранных углов. Решение этого вопроса получится из соединения леммы 1 § 1 с усиленной леммой Коши, доказанной в § 2.

В лемме 1 § 1 возможен случай 4, когда вокруг вершины нет переменных знаков, но есть отмеченные ребра. Однако, как там указано, этот случай может иметь место лишь в вершине угла, сводящегося к двугранному, и притом только тогда, когда этот угол так и остается двугранным (с точностью первого порядка, конечно). Отсюда ясно, что такие вершины можно исключить вовсе: все ненастоящие ребра, подходящие к ним, не отмечены и могут быть исключены, а оба настоящих ребра, подходящие к одной такой вершине, образуют одно ребро.

Итак, случай 4 леммы 1 § 1 исключается, и остаются, не считая отсутствия отмеченных ребер, только случаи 1–3, которые как раз входят в усиленную лемму Коши. Это приводит к теоремам о стационарности двугранных углов выпуклых многогранников.

**2. Теорема 1.** *Если при деформации замкнутого выпуклого многогранника все углы на его гранях стационарны, то все его двугранные углы также стационарны.*

Сопоставим каждому ребру многогранника знак начальной скорости изменения двугранного угла при этом ребре; ребра со стационарными двугранными углами оставим неотмеченными. Так как плоские углы стационарны, то расположение знаков вокруг каждой вершины должно удовлетворять лемме 1 § 1. Однако по усиленной лемме Коши, доказанной в § 2, расположение знаков с такими условиями невозможно, если хотя бы одно ребро отмечено знаком. Поэтому все ребра должны быть неотмеченными, что и требовалось доказать<sup>13)</sup>.

**3. Теорема 2.** Пусть  $P$  — конечный выпуклый многогранник, ограниченный одной замкнутой ломаной и обладающий тем свойством, что никакая его внутренняя, т. е. не лежащая на границе, вершина не соединена с границей более чем одним ребром. Если при деформации такого многогранника все его плоские углы при внутренних вершинах стационарны, то все двугранные углы также стационарны.

Отождествив мысленно все точки границы многогранника  $P$  в одну точку  $O$ , мы превратим его в поверхность  $\bar{P}$ , гомеоморфную сфере. Она будет разбита на грани сетью  $P'$  внутренних ребер многогранника  $P$  с условием, что в  $P'$  все ребра, подходившие к границе многогранника  $P$ , сходятся в одной точке  $O$ . При этом по условию, наложенному на многогранник  $P$ , никакая вершина не будет соединена с вершиной  $O$  двумя ребрами. Поэтому сеть на поверхности  $\bar{P}$  удовлетворяет условиям, поставленным в усиленной лемме Коши.

Допустим, что многогранник  $P$  деформируется так, что плоские углы при внутренних вершинах стационарны, а двугранные углы не стационарны. Тогда, расставив на его ребрах знаки согласно изменению двугранных углов, получим вокруг внутренних вершин распределения знаков, предусмотренные леммой 1 § 1. Если эти знаки перенести на ребра сети  $P'$ , то только вокруг вершины  $O$  распределение знаков окажется не подчиненным никаким условиям. Но усиленная лемма Коши утверждает, что даже при наличии одной такой исключительной вершины расстановка знаков с условиями леммы 1 § 1 невозможна. Поэтому двугранные углы не могут не быть стационарными.

<sup>13)</sup> В отличие от теоремы 1 § 2 гл. III о равенстве двугранных углов при равенстве плоских углов, данная теорема для многогранников, вырождающихся в дважды покрытые многоугольники, неверна даже при том условии, что, деформируясь, многогранник остается выпуклым (исключая тривиальный случай дважды покрытого треугольника). Возьмем, например, дважды покрытый квадрат  $ABCD$  со стороной, равной  $a$ , и выдвинем вершину  $D$  из его плоскости на высоту  $h = vt$ , где  $v$  — скорость движения вершины  $D$ . Получим тетраэдр с ребром  $CD = \sqrt{a^2 + h^2} \approx a + \frac{1}{2} \frac{h^2}{a} = a + \frac{1}{2} \frac{v^2}{a} t^2$ . Отсюда легко видеть, что изменение плоских углов будет порядка  $t^2$ , т. е. все они стационарны, в то время как изменение двугранных углов будет, очевидно, порядка  $t$ .

**Теорема 3.** *Если на бесконечном выпуклом многограннике, из каждой вершины которого исходит не более одного бесконечного ребра, все плоские углы стационарны, то и двугранные углы стационарны.*

Для доказательства нужно только отрезать от многогранника конечную часть так, чтобы к ее границе подходили только бесконечные ребра. Тогда останется сослаться на теорему 2.

Так как на бесконечном многограннике с кривизной  $2\pi$  все бесконечные ребра параллельны и потому заведомо не могут исходить из вершин более чем по одному, то в теореме 3 заключается

**Теорема 4.** *Если при деформации бесконечного выпуклого многогранника с полной кривизной  $2\pi$  плоские углы стационарны, то двугранные углы тоже стационарны.*

4. Для бесконечного многогранника, не удовлетворяющего условию теоремы 3, из стационарности плоских углов стационарность двугранных углов, вообще говоря, не следует. Пример тому дает деформация многогранного угла.

Бесконечный выпуклый многогранник, обладающий непараллельными бесконечными ребрами, имеет предельный угол, не вырождающийся в полупрямую. Ребра этого угла параллельны бесконечным ребрам многогранника, а потому при рассматриваемых деформациях многогранника они вращаются с определенными скоростями, и предельный угол соответственно деформируется.

**Теорема 5.** *Если бесконечный выпуклый многогранник, предельный угол которого не вырождается в полупрямую, деформируется так, что все углы на его гранях и его предельный угол стационарны<sup>14)</sup>, то двугранные углы многогранника также стационарны.*

Пусть  $P$  — бесконечный выпуклый многогранник с предельным углом  $V$ , не сводящимся к полупрямой. Возьмем любое бесконечное ребро многогранника  $P$  и пусть  $p_1, \dots, p_n$  — все бесконечные ребра, параллельные данному, включая его самого, и принадлежащие последовательно смежным бесконечным граням (см. рис. 84 на с. 170). Все эти ребра  $p_1, \dots, p_n$  объединим в один класс. Так, совокупность всех бесконечных ребер распадается на классы. В частности, класс может содержать только одно ребро, если у граней, смежных по этому ребру, нет ребер, ему параллельных.

<sup>14)</sup> Ребра предельного угла параллельны бесконечным ребрам многогранника. Поэтому условие его стационарности равносильно стационарности направлений бесконечных ребер. С другой стороны, плоские углы предельного угла полностью определяются плоскими углами бесконечных граней многогранника: они равны углам между их бесконечными сторонами. Поэтому достаточно требовать лишь стационарности двугранных углов предельного угла. Это — двугранные углы при классах параллельных бесконечных ребер в смысле §4 гл. III.



Дополним многогранник  $P$  несобственными вершинами и ребрами по следующему правилу:

1) все бесконечные ребра одного класса сходятся в одной несобственной вершине, а ребра разных классов — в разных вершинах;

2) несобственные вершины естественно образуют циклическую последовательность. Каждые две последовательные несобственные вершины соединяем одним несобственным ребром.

Дополненный таким образом многогранник  $P$  мы обозначим  $\overline{P}$ ; он будет гомеоморфен простому многоугольнику: «граница» его складывается из несобственных ребер. Каждая грань многогранника  $P$  будет ограничена замкнутой ломаной без кратных точек. Именно границы бесконечных граней с параллельными ребрами замыкаются в несобственных вершинах, а границы бесконечных граней с непараллельными бесконечными ребрами замыкаются несобственными ребрами.

Каждые две вершины  $A, B$  многогранника  $P$  могут быть соединены только одним ребром и это ребро принадлежит грани с вершинами  $A, B$ . Действительно, если обе вершины  $A, B$  — одновременно собственные или несобственные, то это утверждение очевидно. Пусть теперь вершина  $A$  — собственная, а  $B$  — несобственная. Тогда соединяющее их ребро  $AB$  — бесконечное. В несобственной вершине  $B$  могут сходитьсь еще только бесконечные ребра, параллельные  $AB$ , но они не могут соединять ее с той же собственной вершиной  $A$ . Поэтому ребро  $AB$  — единственное, соединяющее вершины  $A, B$ , и оно принадлежит двум смежным по нему граням. Никакие другие грани не могут содержать обе вершины  $A, B$ , потому что другие грани с несобственной вершиной  $B$  по условию имеют ребра, параллельные  $AB$ , и смежны по этим ребрам, а тогда они, очевидно, не могут иметь  $A$  своей вершиной.

Возьмем теперь второй экземпляр  $\overline{P}'$  многогранника  $P$  и отождествим у обоих этих многогранников соответственные несобственные ребра и вершины. В результате получим абстрактный многогранник  $\overline{P} + \overline{P}'$ , который будет гомеоморфен сфере и будет обладать теми же свойствами строения, какие только что установлены для многогранника  $\overline{P}$ :

а) каждая грань на  $\overline{P} + \overline{P}'$  ограничена одной замкнутой ломаной без кратных точек;

б) если две вершины одной грани соединены ребром, то последнее принадлежит этой грани.

Это как раз те условия, которым подчинены сети ребер, рассматриваемые в усиленной лемме Коши. Поэтому эта лемма может быть применена к многограннику  $\overline{P} + \overline{P}'$ .

Если исходный многогранник  $P$  деформируется, то отметим ребра многогранника  $\overline{P} + \overline{P}'$  знаками по следующему правилу. Каждому собственному

ребру на  $\bar{P}$  сопоставляем знак начальной скорости изменения двугранного угла в  $P$  при этом ребре. Соответствующему ребру на  $\bar{P}'$  сопоставляем противоположный знак. Ребра стационарных двугранных углов, а также все несобственные ребра оставляем неотмеченными.

Для доказательства теоремы нужно показать, что если все плоские углы многогранника  $P$  и его предельный угол  $V$  стационарны, то отмеченных ребер быть не может.

Вследствие стационарности плоских углов расположение знаков вокруг каждой собственной вершины многогранника  $\bar{P} + \bar{P}'$  обладает свойствами, указанными в лемме 1 §1 (только на  $\bar{P}'$  знаки противоположные, что не может играть роли для применимости усиленной леммы Коши, как ясно из ее формулировки).

Покажем теперь, что вокруг каждой несобственной вершины либо все ребра не отмечены, либо имеется не менее четырех перемен знака.

Пусть в несобственной вершине  $A$  сходятся бесконечные ребра  $p_1, \dots, p_n$  многогранника  $\bar{P}$  и соответственно ребра  $p'_1, \dots, p'_n$  многогранника  $\bar{P}'$ . Несобственные ребра по условию не отмечены и потому их можно не рассматривать. Все ребра  $p_i$  параллельны и при бесконечном подобном сжатии многогранника  $P$  к вершине его предельного угла  $V$  дают одно ребро  $p$  на угле  $V$ . Бесконечные грани, подходящие к крайним ребрам  $p_1$  и  $p_n$ , дают грани угла  $V$ , сходящиеся в ребре  $p$ . Поэтому если  $\alpha$  — двугранный угол предельного угла  $V$  при ребре  $p$ , а  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  — двугранные углы многогранника  $P$  при ребрах  $p_1, \dots, p_n$ , то

$$\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

Если предельный угол стационарен, то  $\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{t=0} = 0$  и потому

$$\left(\frac{d\alpha_1}{dt}\right)_{t=0} + \dots + \left(\frac{d\alpha_n}{dt}\right)_{t=0} = 0.$$

Следовательно, либо все углы  $\alpha_i$  стационарны, либо начальные скорости их изменения меняют знак.

Так как на ребрах  $p'_1, \dots, p'_n$  ставятся противоположные знаки, то в первом случае все ребра вокруг вершины  $A$  не отмечены, а во втором случае получается не менее четырех перемен знака (минимум по одной перемене в каждой последовательности  $p_1, \dots, p_n$  и  $p'_1, \dots, p'_n$  и две перемены при переходе от одной из них к другой).

Итак, оказывается, что если бы были отмеченные ребра, то расстановка знаков на ребрах многогранника  $\bar{P} + \bar{P}'$  была бы именно такой, невозможность которой устанавливается усиленной леммой Коши. Следовательно, отмеченных ребер быть не может, и теорема доказана.

**5. Теорема 6.** *Если выпуклый многогранник  $P$ , ограниченный одной замкнутой ломаной, деформируется так, что все углы на его гранях, а также углы между каждой парой граничных ребер, сходящихся в одной вершине, стационарны, то и все его двугранные углы стационарны.*

Сопоставим каждому ребру многогранника  $P$  знак начальной скорости изменения соответствующего двугранного угла. Ребра со стационарными углами, а также граничные ребра оставим неотмеченными. Тогда расположение знаков вокруг каждой внутренней вершины будет удовлетворять условиям леммы 1 § 1.

Пусть  $A$  — граничная вершина и  $p, q$  — сходящиеся в ней граничные ребра. Натянув на них плоский угол  $(pq)$ , получим выпуклый многогранный угол с вершиной  $A$ , у которого все плоские углы стационарны. Поэтому либо все ребра, сходящиеся в  $A$ , не отмечены, либо вокруг  $A$  имеется по крайней мере две перемены знака, включая знаки, которые нужно теперь сопоставить ребрам  $p, q$ . Если перемен знака не менее четырех, то на сходящихся в  $A$  внутренних ребрах многогранника  $P$  есть хотя бы одна перемена знака. Если же перемен знака только две, то расстановка знаков должна быть такой, как указано в третьем случае леммы 1 § 1: все отмеченные ребра лежат на одной истинной грани и крайние из них отмечены одним знаком. Эти крайние ребра не могут быть ребрами  $p, q$ , так как на угле  $(pq)$  нет вообще никаких ребер. Поэтому опять-таки на внутренних ребрах многогранника  $P$ , сходящихся в вершине  $A$ , есть перемена знака.

Теперь берем второй экземпляр  $P'$  многогранника  $P$ , расставляем на его ребрах противоположные знаки и отождествляем соответственные граничные ребра на  $P$  и  $P'$ . Тогда, рассуждая так же, как в доказательстве теоремы 5, убедимся, что наличие отмеченных ребер приводит к такой расстановке знаков на абстрактном многограннике  $P + P'$ , которая по усиленной лемме Коши невозможна. Поэтому отмеченных ребер нет, и теорема доказана.

Пользуясь «запасом», имеющимся в усиленной лемме Коши, в теореме 6 достаточно требовать стационарность углов между всеми парами смежных граничных ребер, кроме трех.

Далее, теорема 6 дословно вместе с ее доказательством переносится на «локально выпуклые» многогранники, т. е. такие, у которых все многогранные углы как при внутренних, так и при граничных вершинах — выпуклые (тогда, натягивая угол на пару граничных ребер, сходящихся в одной вершине, получим замкнутый выпуклый многогранный угол).

**6.** Вопрос о дополнительных условиях, обеспечивающих стационарность двугранных углов многогранника, ограниченного несколькими ломаными, остается открытым. Тривиальным было бы потребовать, чтобы плоские углы на выпуклой оболочке многогранника были стационарны, — тогда все

свелось бы к теореме о замкнутом многограннике. Такое условие налагается, однако, на всю границу многогранника сразу, между тем как условие теоремы 6 формулируется для каждой граничной вершины в отдельности. Вопрос стоит о таких локальных условиях, а не об условиях «в целом».

#### § 4. ЖЕСТКОСТЬ МНОГОГРАННИКОВ И РАВНОВЕСИЕ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

1. В этом параграфе мы рассмотрим следствия полученных в § 1 и 3 результатов с точки зрения механики.

**Теорема 1.** *Замкнутый выпуклый многогранник с жесткими гранями — жесткий<sup>15)</sup>.*

Жесткость граней означает, что при всякой деформации многогранника длины их ребер и углы стационарны. Но по теореме 1 § 3 при стационарности плоских углов стационарны также двугранные углы. Отсюда следует, что начальная деформация многогранника должна сводиться к движению.

Этот вывод основан на очевидной общей лемме:

*Если при деформации какого бы то ни было многогранника все его ребра, а также плоские и двугранные углы стационарны, то начальная деформация есть движение<sup>16)</sup>.*

Совершенно так же из других теорем § 3 вытекают соответствующие теоремы о жесткости выпуклых многогранников.

<sup>15)</sup> Другие доказательства этой теоремы и связь со стержневыми системами см. [213, 268, 270, 365, 366]. — Прим. В. А. Залгаллера.

<sup>16)</sup> Для доказательства возьмем какую-либо грань  $Q_1$  многогранника  $P_0$  и закрепим ее вершину  $A$ , направление одной из сторон  $AB$  грани  $Q_1$ , исходящей из  $A$ , и направление плоскости самой грани  $Q_1$ . Этим самым мы заранее исключим только движение многогранника  $P_0$  как твердого тела.

Так как теперь вершина  $A$  и направление стороны  $AB$  неподвижны, а по доказанному длина стороны  $AB$  стационарна, то вершина  $B$  неподвижна. Под этим мы подразумеваем, что ее начальная скорость равна нулю. Далее, угол между стороной  $AB$  и следующей стороной  $BC$  стационарен, а вся плоскость грани  $Q_1$  неподвижна, поэтому направление стороны  $BC$  также неподвижно. А тогда из стационарности длины  $BC$  следует неподвижность вершины  $C$ . Продолжая это рассуждение, убедимся, что все вершины грани  $Q_1$  неподвижны.

Угол между гранью  $Q_1$  и гранью  $Q_2$ , смежной с  $Q_1$  по стороне  $AB$ , стационарен, поэтому плоскость грани  $Q_2$  неподвижна; кроме того, неподвижны ее вершины  $AB$ . Применяя к грани  $Q_2$  предыдущее рассуждение, убедимся, что все ее вершины неподвижны. А переходя к следующим смежным граням и т. д., убедимся, что все вершины многогранника  $P_0$  оказываются неподвижными. Итак, исключив только движение многогранника как целого, мы сделаем все его вершины неподвижными. Тем самым без исключенного движения они могли двигаться только так, как если бы многогранник был твердым, что и требовалось доказать.

**2.** Между кинематикой и статикой твердого тела существует, как известно, полная формальная аналогия. Если векторам угловых скоростей сопоставить силы, а скоростям — моменты пар, то сложению движений будет соответствовать сложение сил. В частности, условиям взаимной компенсации движений будут соответствовать условия равновесия. (Действительно, система сил  $\mathbf{p}_i$  и пар  $\mathbf{m}_j$  эквивалентна силе  $\mathbf{p} = \sum \mathbf{p}_i$  и паре  $\mathbf{m} = \sum \mathbf{m}_j + \sum (\mathbf{p}_i \times \mathbf{r}_i)$ , где  $\mathbf{r}_i$  — вектор от точки приложения силы  $\mathbf{p}$  до точки приложения силы  $\mathbf{p}_i$ . И точно так же движения с угловыми скоростями  $\boldsymbol{\omega}_i$  и линейными скоростями  $\mathbf{v}_j$  дают движение с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega} = \sum \boldsymbol{\omega}_i$  и линейной скоростью  $\mathbf{v} = \sum \mathbf{v}_j + \sum (\boldsymbol{\omega}_i \times \mathbf{r}_i)$ , где  $\mathbf{r}_i$  — вектор от точки на оси вращения  $\boldsymbol{\omega}$  до точки на оси вращения  $\boldsymbol{\omega}_i$ .)

Эта аналогия позволяет пересказывать кинематические утверждения на язык статики, и обратно. Поэтому и наши кинематические теоремы о стационарности двугранных углов или о жесткости многогранника с твердыми гранями должны допускать «силовую» интерпретацию.

Приведем одну такую интерпретацию; в ней речь идет не о многограннике, составленном из твердых граней, а о системе стержней, образующих совокупность ребер выпуклого многогранника. При этом, согласно принятому нами условию, среди ребер допускаются также ненастоящие, проходящие внутри истинных граней между точками их границ. Стержни мыслятся скрепленными в концах на шарнирах.

Мы будем говорить, что такая система находится под напряжениями без воздействия внешних сил, если вдоль каждого стержня действуют растягивающие или сжимающие силы, причем эти силы в вершинах уравниваются. Пример системы стержней под напряжениями был уже приведен в  $\text{п}^\circ 3 \text{ § 6}$  главы II, рис. 71.

Покажем, что теорема 1 эквивалентна следующей:

**Теорема 2.** Система стержней, образующих совокупность ребер замкнутого выпуклого многогранника, не может находиться под напряжениями без воздействия внешних сил.

Для доказательства теоремы 2 вспомним, что при выводе теоремы 1 § 3 о стационарности двугранных углов мы исходили из изображения относительных вращений соседних граней векторами угловых скоростей, направленными вдоль ребер. При этом суммы этих векторов вокруг одной вершины равнялись нулю. Доказательство теоремы 1 § 3 как раз и сводилось к доказательству того, что на ребрах замкнутого выпуклого многогранника такие векторы расположить невозможно (если не все они равны нулю). Стоит лишь интерпретировать эти векторы как напряжения, и мы получим теорему 2.

Видно также, что и обратно, теорема 1 § 3 следует из теоремы 2.

**3.** Можно высказать следующее общее утверждение:

**Теорема 3.** Пусть  $P$  — произвольный односвязный<sup>17)</sup> конечный многогранник, а  $R$  — система его ребер, исключая граничные. Утверждение о жесткости многогранника  $P$  при условии жесткости его граней равносильно утверждению, что система  $R$  не может находиться под напряжениями без воздействия внешних сил, если даже свободные концы ребер, т. е. концы ребер, подходящих к границе многогранника  $P$ , закреплены так, что напряжение в них компенсировано реакцией опоры. (Для замкнутого многогранника оговорка о ребрах со свободными концами отпадает.)

Покажем, что из невозможности напряжений в системе ребер следует жесткость многогранника.

Пусть  $P$  — многогранник, составленный из твердых граней, скрепленных на шарнирах вдоль ребер. Пусть  $\omega_i$  — угловые скорости вращения граней. Тогда условие, что грани скреплены вдоль ребер, означает, что относительное вращение соседних граней  $Q_j, Q_k$  происходит вокруг их общего ребра, т. е. что разность их угловых скоростей  $\omega_j - \omega_k$  направлена вдоль ребра.

Зададим на многограннике ориентацию, указав направление обхода малого контура. Тогда если две грани  $Q_j, Q_k$  имеют общее ребро  $AB$  и при обходе вокруг вершины  $A$  грань  $Q_j$  следует за  $Q_k$ , то при обходе вокруг вершины  $B$  грань  $Q_j$  предшествует  $Q_k$ . Поэтому если условиться рассматривать относительное вращение следующей грани относительно предыдущей, то при обходе вокруг  $A$  будем иметь на ребре  $AB$  вектор  $\omega_j - \omega_k$ , а при обходе вокруг  $B$  — вектор  $\omega_k - \omega_j$ . Естественно при этом считать первый вектор приложенным в вершине  $A$ , а второй — в вершине  $B$ .

Если теперь эти векторы интерпретировать как силы, то окажется, что ребро  $AB$  находится под растягивающим или сжимающим напряжением.

При обходе вокруг вершины по граням  $Q_1, Q_2, \dots$  мы вернемся к исходной грани  $Q_1$ , а потому сумма всех разностей  $\omega_2 - \omega_1, \omega_3 - \omega_2, \dots$  равна нулю. То есть напряжения вдоль ребер в вершинах уравниваются. Это верно для внутренних вершин, а в граничных вершинах напряжения уравниваются по условию реакцией опоры.

Мы приходим к тому, что система ребер многогранника оказывается под напряжениями без воздействия внешних сил. Если это невозможно, то все разности  $\omega_j - \omega_k$  обращаются в нуль, т. е. угловые скорости всех граней равны и двугранные углы стационарны.

<sup>17)</sup>То есть такой, на котором каждый контур ограничивает какую-либо часть многогранника, являясь полной ее границей. Этим свойством обладают только многогранники, гомеоморфные сфере или кругу. Из доказательства будет видно, что односвязность имеет существенное значение, и на примерах легко убедиться, что без нее из жесткости невозможность напряжений может и не следовать. Влияние связности (групп Бетти) поверхности на взаимосвязь между разными аспектами понятия о ее бесконечно малом изгибании и соответственно жесткости замечено Н. В. Ефимовым [104, с. 113–114].

Следовательно, из невозможности напряжений в системе ребер следует жесткость.

Докажем обратное утверждение. Пусть система ребер многогранника  $P$  находится под напряжениями, уравнивающимися в вершинах. Тогда в концах каждого ребра действуют противоположные векторы.

Зададим на  $P$  ориентацию, и пусть при обходе вокруг вершины  $A$  грань  $Q_j$  следует за  $Q_k$ ; вектор напряжения вдоль общего ребра  $AB$  этих граней, приложенный в вершине  $A$ , обозначим  $\mathbf{a}_{jk}$ . В вершине  $B$  будет приложен вектор  $\mathbf{a}_{kj} = -\mathbf{a}_{jk}$ .

Перенумеруем все грани и припишем грани  $Q_1$  произвольный вектор  $\boldsymbol{\omega}_1$ .

Если грань  $Q_i$  смежна с  $Q_1$  по ребру, то приписываем ей вектор  $\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_1 + \mathbf{a}_{1i}$  и так, переходя от каждой грани  $Q_j$  к смежной  $Q_k$ , будем приписывать этой последней вектор  $\boldsymbol{\omega}_k = \boldsymbol{\omega}_j + \mathbf{a}_{kj}$ . Покажем, что таким образом каждой грани будет однозначно приписан некоторый вектор независимо от пути, по которому мы шли к ней от грани  $Q_1$ .

Это равносильно тому, что при обходе по замкнутому пути мы каждый раз получаем то же значение вектора  $\boldsymbol{\omega}$  для исходной грани. Но для обхода вокруг вершины это очевидно, потому что сумма векторов  $\mathbf{a}_{ik}$  вокруг вершины равна нулю. А всякий замкнутый обход на односвязном многограннике можно разложить в сумму обходов вокруг вершин. (Именно здесь используется односвязность.)

Таким образом, каждой грани однозначно приписывается вектор  $\boldsymbol{\omega}$ . Интерпретируя его как угловую скорость, получим, что грани многогранника вращаются вокруг их общих ребер. На если многогранник жесткий, то это невозможно, а тем самым и напряжения в системе его ребер невозможны.

Доказанная таким образом теорема 3 позволяет пересказать в терминах стержневых систем все теоремы § 3, формулируя при этом подходящим образом имеющиеся в них дополнительные условия, как, например, условие теоремы 5 § 3 о стационарности предельного угла. При этом бесконечные многогранники естественно заменяются конечными. Точные формулировки соответствующих теорем мы оставляем читателю.

## § 5. О ДЕФОРМАЦИЯХ РАЗВЕРТОК

1. Мы будем рассматривать выпуклые многогранники, грани, ребра и вершины которых понимаются в обобщенном смысле согласно условию, введенному в начале § 3.

Один и тот же многогранник имеет бесконечно много разных разверток. Мы ограничимся только такими развертками, вершины которых совпадают с вершинами многогранника: каждая вершина развертки есть вершина многогранника, и обратно. Это условие постоянно имеется в виду как в этом, так и в следующем параграфах.

Если  $P$  есть бесконечный выпуклый многогранник, то он имеет бесконечные грани, которые, сходясь друг с другом последовательно по бесконечным ребрам, образуют таким образом то, что мы называем «воронкой» многогранника  $P$ .

Если бесконечные грани встречаются также по конечным ребрам, то производим разрезы также по этим ребрам. Говоря о воронке, мы всегда будем иметь в виду, что эти разрезывания уже произведены заранее, так что все конечные стороны воронки не склеены.

Воронку, разрезанную по любому бесконечному ребру, можно развернуть на плоскость. Разрезывание воронки по бесконечному ребру содержит произвол, для исключения которого мы будем рассматривать саму неразрезанную воронку. С внутренней точки зрения воронка полностью определяется заданием длин ее граничных сторон-ребер и углов между смежными сторонами.

Аналогичные соображения имеют место для любой развертки бесконечного многогранника. Поэтому развертку такого многогранника мы всегда будем считать состоящей из конечного числа конечных многоугольников и еще из «воронки». В частных случаях конечных многоугольников может не быть вовсе, как это будет, например, для развертки многогранного угла. Воронка в общем смысле есть развертка из бесконечных многоугольников, которые в циклическом порядке склеиваются по бесконечным ребрам. Так как в воронке все бесконечные ребра уже считаются склеенными, то в рассматриваемых нами развертках многогранников бесконечных ребер нет.

Под естественной разверткой конечного многогранника мы понимаем развертку, образованную его гранями, а для бесконечного многогранника — развертку, образованную его конечными гранями и воронкой бесконечных граней.

Мы говорим, что задано строение развертки, если развертка задана только как абстрактный комплекс указанием «закона склеивания», т. е. указанием отождествлений сторон и вершин многоугольников. При заданном строении развертка полностью определяется указанием длин сторон и углов ее многоугольников (включая воронку). Если развертка состоит из одних треугольников, то задание углов будет лишним. Для всякого строения развертки легко указать независимые «определяющие параметры», выбранные среди длин сторон и углов многоугольников. Однако такой выбор не будет играть для нас никакой роли, а потому мы будем просто говорить об определяющих параметрах, т. е. о длинах сторон-ребер и об углах.

Сохраняя строение развертки неизменным, можно непрерывно, во всяком случае в некоторых пределах, изменять ее определяющие параметры. Важно иметь в виду, что при указании строения развертки все ее элементы: грани, их стороны и вершины индивидуализированы, например перенумеро-



ваны. Поэтому речь идет о непрерывном изменении параметров, связанных именно с данными элементами, например угла при данной вершине данного многогранника. (Это замечание важно потому, что развертка может, вообще говоря, допускать отображение сама на себя, сохраняющее «закон склеивания»; примером может служить естественная развертка любого правильного многогранника.)

Мы говорим, что *развертка стационарна*, если ее определяющие параметры стационарны, т. е. если они являются функциями некоторого параметра  $t$  и в начальный момент их производные по  $t$  равны нулю.

2. Рассмотрим произвольную развертку  $R$  данного многогранника  $P$ . Пусть ребро  $L$  этой развертки соединяет вершины  $A$  и  $B$ , проходя по каким-то граням многогранника  $P$ . Развернем на плоскость последовательно все эти грани, идя от вершины  $A$  к  $B$ ; они покроют некоторый многоугольник  $Q$ , в котором ребро  $L$  окажется диагональю, соединяющей вершины  $A$  и  $B$  (см. рис. 92 на с. 200). Не исключено, конечно, что ребро  $L$  проходит по одним и тем же граням неоднократно, и тогда эти грани появляются в многоугольнике  $Q$  соответствующее число раз. Ребро  $L$  пересекает каждое ребро многогранника, а потому каждую грань лишь конечное число раз (исключая случай совпадения ребра  $L$  с ребром многогранника). Это легко доказать непосредственно<sup>18)</sup>. Однако мы можем сослаться на то, что это утверждение содержится в более сильном результате, полученном в процессе доказательства леммы 3 § 2 главы IV.

Отсюда следует, что всякая развертка многогранника получается из естественной путем конечного числа разрезываний и склеиваний. Поэтому и любые две развертки одного многогранника получаются одна из другой аналогичным образом.

Отвлекаясь от многогранника, будем рассматривать две развертки  $R$  и  $S$ , получающиеся друг из друга путем конечного числа разрезываний и склеиваний по прямолинейным отрезкам, причем так, что в результате не появляется новых вершин и вершины не исчезают; коротко говоря, развертки имеют общие вершины. Каждое ребро развертки  $S$  составляется из отрезков на гранях развертки  $R$  так, что при последовательном склеивании этих граней на плоскости оно переходит в прямолинейный отрезок.

Мы будем говорить, что задано расположение ребра  $L$  развертки  $S$  в развертке  $R$ , если указано 1) какие вершины развертки  $R$  оно соединяет; 2) по каким ее многоугольникам оно последовательно проходит и 3) какие их стороны оно последовательно пересекает. Если задано расположение всех

<sup>18)</sup> Иначе на  $L$  можно было бы указать точку  $C$ , сколь угодно близко от которой оно пересекает какое-то ребро  $L'$  многогранника. Но так как вблизи  $C$  ребро  $L$  сводится к прямолинейному отрезку, то в таком случае оно совпадает с  $L'$ .

ребер развертки  $S$  в  $R$ , то мы говорим, что задано *расположение развертки  $S$  в  $R$* . Очевидно, задание расположения развертки  $S$  в  $R$  полностью определяет закон разрезывания и склеивания, превращающий развертку  $R$  в  $S$ , и тем самым определяет строение развертки  $S$ .

**Лемма 1.** Пусть две развертки  $R_0$  и  $S_0$  получаются друг из друга разрезываниями и склеиваниями и «имеют общие вершины». Оставляя строение развертки  $R_0$  неизменным, будем менять ее определяющие параметры, получая новые развертки  $R$ . Тогда, если изменения параметров достаточно малы, для каждой развертки  $R$  существует и притом единственная развертка  $S$ , расположенная относительно  $R$  так же, как  $S_0$  расположена относительно  $R_0$ . Определяющие параметры развертки  $S$  суть дифференцируемые функции параметров развертки  $R$ .

Рассмотрим какое-либо ребро  $L_0$  развертки  $S_0$ . Если оно совпадает с одним из ребер развертки  $R_0$ , то сопоставляем ему в развертке  $R$  соответствующее ребро.

Пусть ребро  $L_0$  не совпадает ни с одним ребром развертки  $R_0$ . Тогда развернем на плоскость последовательно все те многоугольники развертки  $R_0$ , по которым оно проходит. Воронку можно развернуть на плоскость, только разрезав ее. Поэтому, если ребро  $L_0$  пересекает воронку, то мы должны ее разрезать. Это разрезывание производим по полупрямой, идущей из данной вершины и образующей данный угол с одной из данных конечных сторон воронки, подходящих к этой вершине. Тогда с изменением определяющих параметров разрезанная воронка меняется однозначно. В результате получим многоугольник  $Q_0$ , в котором  $L_0$  будет диагональю. При малом изменении параметров развертки  $R_0$  многоугольник  $Q_0$  меняется мало. Поэтому существует такое  $\varepsilon_L > 0$ , что если только все параметры изменились меньше чем на  $\varepsilon_L$ , то в измененном многоугольнике все же проходит диагональ  $L$ , соединяющая те же вершины и пересекающая те же стороны составляющих его многоугольников развертки  $R$ . Эту диагональ  $L$  мы сопоставляем ребру  $L_0$ ; она расположена в развертке  $R$  так же, как  $L_0$  расположена в развертке  $R_0$ . Никакого другого отрезка того же расположения, очевидно, нет.

Беря теперь  $\varepsilon > 0$  меньше всех  $\varepsilon_L$  для всех ребер  $L$  развертки  $S_0$ , убеждаемся, что если параметры развертки  $R_0$  изменились меньше чем на  $\varepsilon$ , то каждому ребру развертки  $S_0$  можно сопоставить и притом единственный отрезок, так же расположенный в измененной развертке  $R$ . Принимая все эти отрезки за ребра развертки  $S$ , получим, что  $S$  расположена в  $R$  так же, как  $S_0$  расположена в  $R_0$ .

Так как ребро  $L$  развертки  $S$  есть либо ребро развертки  $R$ , либо диагональ многоугольника  $Q$ , то его длина, а также углы, образуемые им со сторонами многоугольника  $Q$ , суть дифференцируемые функции длин сто-

рон и углов многоугольников развертки  $R$ . (То, что длина диагонали и образуемые ею углы суть дифференцируемые функции длин сторон и углов многоугольника, — достаточно очевидно.)

Угол во всяком многоугольнике развертки  $S$  складывается из углов многоугольников развертки  $R$  и их частей, вырезаемых ребрами, сходящимися в соответствующей вершине. Поэтому и углы развертки  $S$  суть дифференцируемые функции сторон и углов в развертке  $R$ . Тем самым второе утверждение леммы доказано.

**3. Лемма 2.** Пусть выпуклый многогранник  $P_0$  деформируется, быть может, с нарушением выпуклости так, что на нем не появляется ни новых вершин, ни новых ребер, и тем самым строение его естественной развертки  $R_0$  сохраняется. Пусть на  $P_0$  была дана другая его развертка  $S_0$ . Тогда, если деформация достаточно мала, на деформированном многограннике  $P$  существует и притом единственная развертка  $S$ , так же расположенная относительно его естественной развертки  $R$ , как  $S_0$  расположена относительно  $R_0$ . Эта развертка  $S$  — единственная, достаточно близкая к развертке  $S_0$ .

Эта лемма уже содержится в лемме 1. Последнее утверждение леммы очевидно из того, что ребра развертки  $S$  по самому их построению, данному в доказательстве леммы 1, суть единственные отрезки, близкие к ребрам исходной развертки  $S_0$ .

Пусть теперь многогранник  $P_0$  деформируется, может быть, с нарушением выпуклости так, что новых вершин не появляется, но могут появляться новые ребра. Это означает, что конечные грани многогранника могут переламываться по диагоналям, а бесконечные также по каким-то полупрямым, идущим из вершин. Например, можно сместить все вершины замкнутого многогранника  $P_0$  так, чтобы граница их выпуклой оболочки была многогранником, близким к  $P$ . При этом вершины, лежавшие в одной плоскости, могут перестать лежать в одной плоскости, и тогда соответствующая грань сломается.

Число всех возможных диагоналей конечно, а потому число различных строений конечной части деформированного многогранника  $P$  конечно.

Переламывание бесконечных граней по новым бесконечным ребрам не влияет на строение естественной развертки, потому что в ней участвует вся совокупность этих граней, склеенная в воронку.

Если на многограннике  $P_0$  заранее провести диагонали, по которым при данной деформации ломаются его грани, и принять их за ребра, то деформированный многогранник  $P$  будет иметь естественную развертку того же строения, что многогранник  $P_0$  с этими новыми ребрами. Поэтому, согласно лемме 2, при достаточно малой деформации на каждом многограннике  $P$  можно построить развертку  $S$ , соответствующую заранее заданной развертке  $S_0$  многогранника  $P_0$ .

Этот результат можно выразить следующим образом:

**Лемма 3.** *Если выпуклый многогранник  $P_0$  деформируется достаточно мало без появления новых вершин, то на всяком деформированном многограннике  $P$  можно построить и притом единственную развертку  $S$ , близкую к данной развертке  $S_0$  многогранника  $P_0$ .*

В частности, если многогранник  $P_0$  деформируется с изменением некоторой переменной  $t$ , то определяющие параметры развертки  $S$  суть однозначные функции от  $t$ .

### § 6. ЖЕСТКОСТЬ МНОГОГРАННИКА СО СТАЦИОНАРНОЙ РАЗВЕРТКОЙ

**1. Теорема 1.** *Замкнутый выпуклый многогранник со стационарной разверткой — жесткий.*

Подробнее: пусть на замкнутом выпуклом многограннике  $P_0$  задана какая-либо развертка  $S_0$ , вершины которой совпадают с его вершинами. Пусть этот многогранник деформируется с непрерывным изменением некоторой переменной  $t$  без появления новых вершин. (На  $P_0$  допускаются ненастоящие вершины внутри ребер.) Тогда, согласно лемме 3 предыдущего параграфа, на каждом деформированном многограннике  $P_t$  (во всяком случае при  $t$ , близких к начальному значению  $t = 0$ ) однозначно строится развертка  $S_t$ , близкая к  $S_0$ , и определяющие параметры этой развертки суть однозначные функции от  $t$ . Пусть все они стационарны, т. е. при  $t = 0$  их производные равны нулю. Тогда бесконечно малая деформация многогранника  $P_0$  сводится к движению, т. е. начальные скорости движения его вершин (а значит, и скорости вращения ребер и граней) таковы, как если бы многогранник  $P_0$  был твердым телом.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** При деформации многогранника  $P_0$  его грани могут ломаться по диагоналям, что ведет к изменению строения его естественной развертки. При этом возможно, что даже при  $t$ , сколь угодно близких к нулю, одни и те же грани будут ломаться по разным диагоналям. В таком случае мы выберем один из видов такого переламывания граней и будем принимать во внимание только соответствующие значения  $t$ . Если мы при этом докажем, что многогранник жесткий, т. е. его бесконечно малая деформация сводится к движению, то тем самым теорема будет доказана, поскольку этот вывод применим к любому виду переламывания граней.

Действительно, промежуток изменения параметра  $t$  разбивается на некоторые множества  $T_1, T_2, \dots, T_m$ , соответствующие каждому своему виду переламывания граней. Ограничиваясь одним  $k$ -м видом переламывания, мы ограничиваемся значениями  $t$  из множества  $T_k$ . Если  $x(t)$  — координаты вершины многогранника  $P_t$ , то можно вычислять ее производную  $\dot{x}(0)$ , ограничиваясь этими значениями  $t$  (лишь бы только среди них были сколь угодно близкие к нулю). Если мы докажем, что при закрепленных трех

вершинах вычисленная производная равна нулю при любом  $k$ , то будет равна нулю производная, вычисленная при обычном условии, что  $t$  пробегает любые значения. То есть окажется, что при закреплении трех вершин многогранник неподвижен, и тем самым его жесткость будет доказана.

Итак, считаем, что деформированный многогранник  $P_t$  имеет вполне определенное строение. Возникшие на нем новые ребра соответствуют диагоналям граней многогранника  $P_0$ . Поэтому, приняв эти диагонали за ребра самого многогранника  $P_0$ , получим, что многогранники  $P_t$  и  $P_0$  имеют естественные развертки  $R_t$  и  $R_0$  одного строения. По условию данная развертка  $S_0$  многогранника  $P_0$  стационарна, т. е. производные определяющих параметров соответствующей переменной развертки  $S_t$  многогранника  $P_t$  равны нулю при  $t = 0$ .

Согласно лемме 1 § 5, определяющие параметры развертки  $R_t$  суть дифференцируемые функции определяющих параметров развертки  $S_t$ , соответствующей данной развертке  $S_0$  многогранника  $P_0$ . Поэтому естественная развертка многогранника  $P_0$  также стационарна. Но в таком случае все углы и длины сторон на гранях многогранника стационарны, так как грани его и суть грани его естественной развертки. Согласно теореме 1 § 3, при стационарности углов на гранях все двугранные углы также стационарны. А отсюда вследствие леммы, указанной в начале § 4, следует жесткость многогранника.

**2. Теорема 2.** *Бесконечный выпуклый многогранник, все бесконечные ребра которого параллельны, — жесткий, если какая-либо данная его развертка стационарна.*

Детальное содержание этой теоремы раскрывается буквально так же, как было раскрыто содержание теоремы 1. В доказательстве мы сохраним обозначения теоремы 1:  $P_0$  — данный многогранник,  $S_0$  — данная его развертка, а  $P_t$  и  $S_t$  — деформированный многогранник и его соответствующая развертка.

Если грани многогранника  $P_0$  ломаются, то опять выбираем только один вид их переламывания и ограничиваемся только соответствующими значениями  $t$ . Принимая диагонали, по которым ломаются грани многогранника  $P_0$ , за ребра этого многогранника, получим, что естественные развертки  $R_t$  многогранников  $P_t$  имеют то же строение, что и естественная развертка  $R_0$  многогранника  $P_0$ . Так как развертка  $S$  стационарна, а параметры развертки  $R$  суть дифференцируемые функции параметров развертки  $S$ , то развертка  $R$  стационарна. То есть длины ребер и углы конечных граней многогранника  $P_0$  стационарны, а также стационарны длины ребер и углы воронки. Однако углы воронки при ее вершинах, являющихся концами бесконечных ребер многогранника, представляют собой суммы углов бесконечных граней, а не самые эти углы. Поэтому для доказательства ста-

ционарности всех углов на бесконечных гранях требуются дополнительные соображения.

Пусть  $A_0$  — одна из вершин воронки многогранника  $P_0$ , и из этой вершины исходит бесконечное ребро  $L_0$ . Пусть  $\alpha_0, \beta_0$  — углы на бесконечных гранях при вершине  $A_0$ .  $A_t, L_t, \alpha_t, \beta_t$  пусть будут соответствующими элементами деформированного многогранника  $P_t$ . Разрезав воронку многогранника  $P_t$  по ребру  $L_t$  и развернув ее на плоскость, получим бесконечный многоугольник  $V_t$ . При  $t = 0$  это будет развернутая воронка  $V_0$  многогранника  $P_0$  (рис. 152). Бесконечные стороны многоугольника  $V_0$  параллельны, а у  $V_t$  они могут и не быть параллельными. Мы должны доказать, что  $(d\alpha/dt)_{t=0} \equiv \dot{\alpha}(0) = 0$ .

Допустим, однако, что  $\dot{\alpha}(0) \neq 0$  и для определенности  $\alpha(0) > 0$ .

Будем рассматривать деформацию многоугольника  $V_0$  в многоугольнике  $V_t$ . Исключая движение многоугольника как целого, можно считать неподвижными вершину  $A_0$  и направление исходящего из нее конечного ребра. Деформацию разложим на две части: деформацию первого порядка и деформацию высшего порядка. Деформация первого порядка состоит в изменении элементов многоугольника с постоянными скоростями, равными начальным скоростям данной деформации. Деформация высшего порядка дополняет деформацию первого порядка до истинной<sup>19)</sup>.

Рассмотрим сначала деформацию первого порядка. Все длины сторон многоугольника  $V_t$  и все его углы, кроме  $\alpha(t)$  и  $\beta(t)$ , являются соответствующими элементами воронки. Поэтому все они стационарны и при деформации первого порядка не меняются вовсе. Так как к тому же вершина  $A_0$  и исходящая из нее конечная сторона неподвижны, то вообще все вершины многоугольника  $V_0$  при деформации первого порядка остаются на месте. Только его бесконечные стороны вращаются так, что соответствующие углы меняются с начальными скоростями  $\dot{\alpha}(0)$  и  $\dot{\beta}(0)$ . Так как в силу стационарности  $\dot{\alpha}(0) = -\dot{\beta}(0)$ , то при этом бесконечные стороны остаются параллельными. Следовательно, деформация первого порядка превращает многоугольник  $V_0$  в многоугольник  $V'_t$  с теми же вершинами и с параллельными бесконечными сторонами (см. рис. 152).

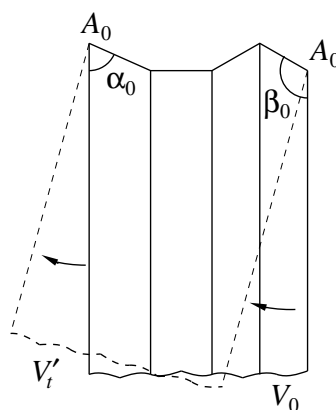


Рис. 152

<sup>19)</sup> Если  $x(t)$  — величина, связанная с многоугольником  $V_t$ , то полагаем  $x(t) = x(0) + \dot{x}(0)t + \varepsilon(t)$ . Здесь  $\dot{x}(0)t$  дает деформацию первого порядка, а  $\varepsilon(t)$  — деформацию высшего порядка.

Если отрезать от  $V'_t$  угол, прибавившийся к углу  $\alpha_0$ , и приложить его с другой стороны, то получим исходный многоугольник  $V_0$ . Следовательно,  $V'_t$  есть развертка воронки многогранника  $P_0$ , только разрезанная не по ребру  $L_0$ , а по линии  $L'_t$ , соответствующей бесконечным сторонам многоугольника  $V'_t$ . Линия  $L'_t$  пересекает  $L_0$  в некоторой точке  $B'_t$ , и так как  $L_0$  соответствует ребру многогранника  $P_0$ , то ее отрезок  $A_0B'_t$  короче отрезка  $A_0B'_t$  линии  $L'_t$ . (Обе вершины  $A_0$  многоугольника  $V_0$  представляют одну вершину воронки, и потому мы их не различаем в этом рассуждении.)

Добавим теперь к деформации первого порядка остающуюся деформацию высшего порядка. Тогда многоугольник  $V'_t$  превратится в  $V_t$ , а его бесконечная сторона  $L'_t$  — в бесконечную сторону  $L_t$  многоугольника  $V_t$ . Если  $t$  достаточно мало, то деформация высшего порядка вызовет столь малый поворот линии  $L'_t$ , что она по-прежнему будет пересекать  $L_0$  в некоторой точке  $B_t$ , причем отрезок  $A_0B_t$  линии  $L_0$  опять-таки будет короче отрезка  $A_0B_t$  линии  $L_t$ .

Однако линия  $L_t$  по условию соответствует ребру многогранника  $P_t$ , а потому никакие две ее точки нельзя соединить более коротким отрезком, чем отрезок самой линии  $L_t$ . Получается противоречие, которое доказывает, что  $\dot{\alpha}(0)$  не может быть отлично от нуля.

Таким образом, доказано, что каждый угол на бесконечной грани многогранника  $P_0$  будет стационарным. Стационарность углов на конечных гранях была установлена вначале. Поэтому, воспользовавшись теоремой 4 §3, приходим к заключению, что все двугранные углы многогранника также стационарны. Теперь, когда известна стационарность длин сторон и углов граней, а также двугранных углов, жесткость многогранника устанавливается буквально тем же простым рассуждением, которое было применено в доказательстве теоремы 1.

**3.** Теперь обратимся к бесконечным многогранникам с непараллельными бесконечными ребрами. Каждый такой многогранник  $P$  имеет предельный угол  $V$ , не вырождающийся в полупрямую. Каждому ребру  $L$  угла  $V$  отвечает хотя бы одно бесконечное ребро многогранника  $P$ , превращающееся в  $L$ , когда  $P$  бесконечно подобно сжимается в угол  $V$ .

Для жесткости многогранника  $P$  недостаточно двух условий стационарности: его развертки и предельного угла. Многогранник  $P$  можно деформировать так, что его развертка и предельный угол не меняются вовсе, но ребро, отвечающее данному ребру  $L$  предельного угла, поворачивается, т. е. угол, образуемый этим ребром с подходящим к нему конечным ребром, меняется. Возможность такой деформации была доказана в §5 главы IV для любого многогранника и там же был приведен очень простой ее пример.

В связи с этим нужно еще третье условие стационарности. Его формулировка и достаточность всех трех условий содержатся в следующей теореме:

**Теорема 3.** Пусть бесконечный выпуклый многогранник  $P$  с предельным углом, не вырождающимся в полупрямую, деформируется так, что выполнены три условия стационарности: 1) некоторой его развертки  $S$ , 2) его предельного угла  $V$  и 3) некоторого его ребра  $L$ , соответствующего данному ребру угла  $V$ . При этих условиях многогранник — жесткий, т. е. его бесконечно малая деформация первого порядка сводится к движению.

Условие 3 означает стационарность угла, образуемого ребром  $L$  с одним из подходящих к его вершине конечных ребер воронки данной развертки  $S$ <sup>20)</sup>. Бесконечное ребро  $L$  заведомо лежит на этой воронке и, грубо говоря, дело идет о его неподвижности на ней.

Доказательство этой теоремы проходит по тому же плану, что и доказательство теоремы 2. Прежде всего, так же как в теореме 2, из стационарности некоторой данной развертки следует стационарность естественной развертки многогранника  $P$ . (При этом опять-таки ограничиваемся одним видом переламывания конечных граней по диагоналям и принимаем эти диагонали за ребра многогранника.) Далее, мы снова замечаем, что углы воронки многогранника образуются, вообще говоря, несколькими углами на его бесконечных гранях. Поэтому опять встает задача — доказать стационарность этих углов.

По условию 3 теоремы угол, образуемый ребром  $L$  с некоторым конечным ребром воронки развертки  $S$ , стационарен. Из стационарности развертки  $S$  и естественной развертки легко заключить, что углы между их ребрами стационарны. Поэтому углы, образуемые ребром  $L$  с конечными ребрами многогранника  $P$ , подходящими к концу этого ребра, стационарны. Речь идет, конечно, об углах, измеренных на многограннике  $P$ ; они могут слагаться из углов нескольких граней.

Пусть  $L_1, \dots, L_n$  — все бесконечные ребра, сходящиеся в конце  $A$  ребра  $L$ ; одно из них, скажем  $L_k$ , есть  $L$ . Кроме того, к  $A$  подходят еще два конечных ребра  $L_0, L_{n+1}$  воронки многогранника. Все ребра перенумерованы в порядке их расположения; через  $\alpha_i$  мы обозначим угол между  $i$ -м и  $(i+1)$ -м ребром (рис. 153).

Углы между ребром  $L_k = L$  и ребрами  $L_0$  и  $L_{n+1}$  равны соответственно  $\alpha_0 + \dots + \alpha_{k-1}$  и  $\alpha_k + \dots + \alpha_n$ . Так как они стационарны, то

$$\dot{\alpha}_0 + \dots + \dot{\alpha}_{k+1} = \dot{\alpha}_k + \dots + \dot{\alpha}_n = 0. \quad (1)$$

Бесконечные ребра  $L_i$  параллельны ребрам предельного угла  $V$ , в которые они переходят при бесконечном подобном сжатии. Поэтому углы между

<sup>20)</sup> Роль  $L$  может выполнять любой луч на многограннике  $P$ , соответствующий данной образующей предельного угла  $V$ .



ними равны углам между ребрами предельного угла  $V$ . Эти же последние по условию теоремы стационарны. Следовательно,

$$\dot{\alpha}_1 = \dot{\alpha}_2 = \dots = \dot{\alpha}_{n-1} = 0. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует, что также

$$\dot{\alpha}_0 = \dot{\alpha}_n = 0. \quad (3)$$

Этим доказано, что все углы на бесконечных гранях при вершине  $A$  стационарны.

Пусть теперь  $Q$  — бесконечная грань, содержащая угол  $\alpha_0$  (рис. 154). Пусть  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$  — другие ее углы, причем  $\beta_m$  есть угол при ее беско-

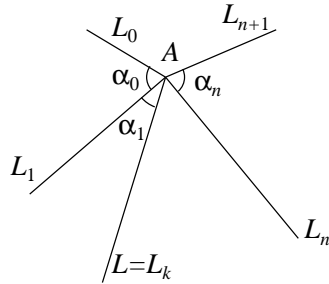


Рис. 153

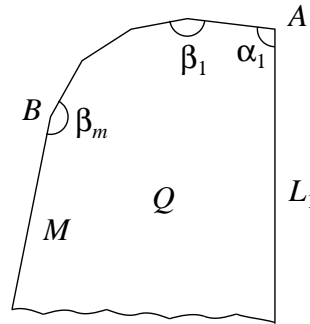


Рис. 154

нечном ребре; бесконечная грань  $Q$  имеет два бесконечных ребра: одно  $L_1$  с концом  $A$ , другое  $M$  с концом  $B$ . Все углы  $\beta_i$ , кроме  $\beta_m$ , являются вместе с тем углами воронки. Поэтому

$$\dot{\beta}_1 = \dot{\beta}_2 = \dots = \dot{\beta}_{m-1} = 0. \quad (4)$$

Угол между ребрами  $L_1$  и  $m$ , как легко подсчитать, равен

$$\alpha_0 + \beta_1 + \dots + \beta_m - m\pi.$$

Но этот угол равен углу между соответствующими ребрами предельного угла  $V$ , и так как этот последний стационарен, то

$$\dot{\alpha}_0 + \dot{\beta}_1 + \dots + \dot{\beta}_m = 0. \quad (5)$$

Пользуясь теперь равенствами (3)–(5), получаем, что

$$\dot{\beta}_m = 0.$$

Таким образом, все углы на грани  $Q$  стационарны и, в частности, стационарен угол между бесконечным ее ребром  $M$  и смежным с ним конечным ребром. Поэтому для всех углов, сходящихся в той же вершине  $B$ , можно повторить рассуждение, которое было проведено выше в применении к углам, сходящимся в вершине  $A$ . Тогда окажется, что все углы при вершине  $B$  стационарны. Продолжая этот вывод, получим, что все углы на бесконечных гранях стационарны.

Теперь доказано, что углы на всех как конечных, так и бесконечных гранях стационарны, а по условию теоремы предельный угол многогранника тоже стационарен. Отсюда на основании теоремы 5 § 3 следует стационарность всех двугранных углов.

После этого жесткость многогранника доказывается буквальным повторением рассуждения, проведенного в заключение доказательства теоремы 1.

**4. Теорема 4.** Пусть  $P$  — конечный выпуклый многогранник, ограниченный одной замкнутой ломаной. Если стационарны некоторая его развертка и все (пространственные) углы между смежными граничными ребрами, то многогранник  $P$  — жесткий.

Доказательство этой теоремы представляет дословное повторение доказательства теоремы 1 с той единственной разницей, что нужно сослаться на теорему 6 § 3 о стационарности двугранных углов многогранника с границей.

(Так же, как в теореме 6 § 3, здесь речь может идти о локально выпуклом многограннике и стационарность углов между смежными граничными ребрами достаточно требовать для всех их пар, кроме трех. И так же, как в § 3, остается открытым вопрос об условиях жесткости многогранника, ограниченного несколькими ломаными.)

Отметим без доказательства еще некоторые теоремы:

**Теорема 5.** Если у шапки стационарна некоторая развертка и граничные вершины могут двигаться только в плоскости края шапки, то шапка — жесткая: она допускает тогда лишь движения вдоль плоскости края.

Доказательство основано на склеивании двух симметричных шапок в один замкнутый многогранник.

**Теорема 6.** Пусть  $P$  — бесконечный выпуклый многогранник с параллельными бесконечными ребрами, ограниченный одной бесконечной ломаной. Если стационарны некоторая его развертка и все (пространственные) углы между смежными граничными ребрами, то многогранник  $P$  — жесткий.

**Теорема 7.** Пусть  $P$  — бесконечный выпуклый многогранник, имеющий непараллельные бесконечные ребра, ограниченный одной бесконечной ломаной. Пусть выполнены следующие условия стационарности: 1) некоторой его развертки, 2) его предельного угла, 3) пространственных углов между смежными граничными ребрами. Тогда многогранник  $P$  — жесткий.

### § 7. ОБОБЩЕНИЯ

1. Мы ограничивались до сих пор рассмотрением таких деформаций многогранников, при которых они остаются многогранниками. Однако можно вообразить себе многогранник, сделанный из гибкого, но нерастяжимого материала, например из бумаги. Тогда естественно рассматривать такие его изгибания, при которых грани и ребра не просто переламываются, но искривляются произвольным образом. Но вследствие условия «нерастяжимости материала» длины всех кривых на гранях должны при этом оставаться неизменными.

Такое изгибание замкнутого выпуклого многогранника с сохранением выпуклости невозможно, как было указано еще в § 6 главы III.

Здесь нас интересует не изгибание, а бесконечно малое изгибание, т. е. мы не требуем неизменности длин кривых на гранях, но лишь их стационарности.

Бесконечно малая деформация определяется указанием скорости  $\mathbf{v}$  движения каждой точки многогранника. Условие стационарности длин приводит к линейному дифференциальному уравнению для поля скорости  $\mathbf{v}$ .

Пусть  $d\mathbf{x}$  — дифференциал вектора, конец которого зачерчивает кривую на поверхности, а  $d\mathbf{v}$  — соответствующий дифференциал скорости. По стационарности длин

$$\frac{\partial}{\partial t} (d\mathbf{x})^2 = 0.$$

Но  $\frac{\partial}{\partial t} (d\mathbf{x})^2 = 2d\mathbf{x} \frac{\partial}{\partial t} d\mathbf{x} = 2d\mathbf{x} d \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} = 2d\mathbf{x} d\mathbf{v}$ , так что

$$d\mathbf{x} d\mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

т. е. дифференциал вектора поверхности перпендикулярен к соответствующему дифференциалу скорости. Это и есть известное уравнение бесконечно малого изгибания. Наглядный смысл его ясен: отрезок  $d\mathbf{x}$  имеет стационарную длину лишь в том случае, когда относительная скорость его концов ему перпендикулярна, т. е. когда один конец лишь вращается вокруг другого.

Если допускать искривления граней, то никакой многогранник не будет жестким, потому что никакая плоская область, а следовательно, и никакая грань не является жесткой, даже если закреплены ее края.

Действительно, если взять скорость  $\mathbf{v}$  в каждой точке плоской области  $G$ , перпендикулярной к плоскости этой области, то уравнение (1) будет заведомо выполнено. А вместе с тем можно обеспечить, чтобы скорость  $\mathbf{v}$  исчезала на границе области.

Таким образом, в такой общей постановке вопрос о жесткости многогранника решается всегда отрицательно по тривиальной причине.

Тем не менее и в этом случае можно получить некоторые нетривиальные результаты. Так, можно доказать:

*Если замкнутый выпуклый многогранник подвергается бесконечно малому изгибанию, т. е. деформируется с искривлением граней, но так, что длины кривых на них*

стационарны, то совокупность его вершин движется при этом как твердое целое, т. е. скорости их движения в начальный момент таковы, как если бы они все принадлежали одному твердому телу. (Сохранение выпуклости при деформации не требуется.)

Пусть замкнутый выпуклый многогранник  $P$  подвергается бесконечно малому изгибанию. Будем рассматривать соответствующую этому деформацию границы выпуклой оболочки совокупности его вершин. В начальный момент она и есть многогранник  $P$ . Поэтому ее изменение также можно рассматривать как некоторую, конечно уже другую, деформацию того же многогранника.

Из уравнения (1) легко вывести, что если при деформации прямолинейного отрезка длина стационарна, то и расстояние между его концами стационарно. Поэтому в условиях сформулированной только что теоремы расстояния между точками каждой грани многогранника оказываются стационарными.

Отсюда легко заключить, что деформация границы выпуклой оболочки совокупности вершин многогранника  $P$  также представляет его бесконечно малое изгибание. А тогда по теореме 1 § 6 эта деформация сводится к движению, и наша теорема доказана.

Аналогичные теоремы можно, очевидно, высказать для бесконечных многогранников и многогранников с границей, привлекая, конечно, условия для предельного угла и соответственно условия на границе. Точные формулировки и доказательства этих теорем представляют нерешенную еще задачу <sup>21)</sup>.

**2.** Обобщение результатов этой главы на многогранники в неевклидовых пространствах: Лобачевского и сферическом, производится дословно там, где речь идет о конечных многогранниках, замкнутых или с границей. Здесь ничего не нужно менять ни в формулировках, ни в доказательствах. В случае бесконечных многогранников вопрос остается открытым из-за того, что в пространстве Лобачевского не исследована замена понятия предельного угла многогранника. Едва ли эта задача для многогранников, гомотетических плоскости, представляет большие трудности. В общем же случае вопрос остается совершенно открытым <sup>22)</sup>.

**3.** Бесконечно малые изгибания кривых поверхностей уже давно служат предметом многочисленных исследований в плане дифференциальной геометрии. Бесконечно малым изгибанием поверхности называется ее деформация, при которой длины всех кривых на поверхности стационарны. Если поверхность не допускает бесконечно малых изгибаний помимо движений, то она называется жесткой.

Отчет об исследованиях бесконечно малых изгибаний кривых поверхностей можно найти в ряде статей [17, 104, 126] в «Успехах математических наук» <sup>23)</sup>. Мы упомянем только два результата, касающихся выпуклых поверхностей и аналогичных нашим теоремам о многогранниках.

1) Замкнутая выпуклая поверхность, не содержащая плоских кусков, — жесткая. Эта теорема установлена впервые Либманом в несколько более узких предположениях. Она доказана пока лишь для трижды дифференцируемых поверхностей и только для поверхностей вращения без каких бы то ни было предположений дифференцируемости <sup>21)</sup>.

2) Выпуклая поверхность, ограниченная одной замкнутой кривой и однозначно проектирующаяся на некоторую плоскость  $T$ , оказывается жесткой, если требовать, чтобы скорости точек ее границы были параллельны плоскости  $T$ . Эта теорема также доказана

<sup>21)</sup> Теперь это доказано в общем случае А. В. Погореловым [173, гл. 4]. — Прим. В. А. Залгаллера.

<sup>22)</sup> Частичные результаты см. в [51, 52, 89]. — Прим. В. А. Залгаллера.

<sup>23)</sup> См. также обзоры [189, 208] и упомянутые в последнем из них работы [214, 259, 268, 292]. — Прим. В. А. Залгаллера.

лишь для трижды дифференцируемых поверхностей. Она соответствует нашей теореме 5 § 6. Но там речь идет только о шапке. Поэтому стоит задача: получить для многогранников аналогичную общую теорему.

Доказательство этих теорем и полный отчет о других известных к 1948 г. результатах читатель найдет в цитированной книге Н. В. Ефимова [104].

4. Для выпуклых многогранников в более чем трехмерном пространстве вопрос о жесткости оказывается тривиальным по той же самой причине, по какой оказывается тривиальным вопрос о единственности многомерного многогранника с данной разверткой. Уже один трехмерный многогранный угол в четырехмерном пространстве оказывается жестким, потому что его сечение сферой с центром в его вершине представляет собой замкнутый выпуклый многогранник на трехмерной сфере или, если угодно, в трехмерном сферическом пространстве. Как указано в п<sup>о</sup> 2, такой многогранник — жесткий, а вместе с ним оказывается жестким и многогранный угол, сечением которого он является.

---

---

## Глава XI

### Условия жесткости многогранника с данными направлениями граней

---

---

В этой главе рассматриваются такие деформации выпуклого многогранника, при которых направления граней (т. е. внешние нормали) остаются неизменными. Так же как в главе X, нас интересуют только бесконечно малые деформации первого порядка, или, что то же самое, скорости в начальный момент. Задача состоит в нахождении условий, при которых многогранник — жесткий. Так как направления граней неизменны, то вращение исключено, и потому жесткость состоит в том, что бесконечно малая деформация сводится к переносу.

Условия жесткости даются теоремами § 2.

Для доказательства этих теорем нужно сначала рассмотреть деформации граней, вызванные параллельными смещениями их плоскостей. Каждая грань замкнутого или бесконечного выпуклого многогранника ограничена прямыми, получающимися в пересечении ее плоскости с плоскостями других граней. Поэтому речь должна идти о деформациях выпуклого многоугольника, вызванных параллельными смещениями ограничивающих его прямых. Если две грани касаются только в вершине, то сколь угодно малое смещение плоскости одной из них может привести к тому, что они будут касаться по ребру. В связи с этим нужно учитывать возможность появления таких новых ребер.

#### § 1. О ДЕФОРМАЦИЯХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

1. Пусть выпуклый многоугольник  $P$  вырезается из плоскости некоторыми прямыми, которые все касаются его либо по сторонам, либо в вершинах. В последнем случае будем считать, что на многоугольнике также имеются стороны соответствующих направлений, но их длина равна нулю. Расстояние от начала до ограничивающей прямой будем называть *опорным числом* многоугольника. (Начало берется, конечно, в плоскости многоугольника;

расстояние от начала до прямой, как всегда, считается отрицательным, если внешняя нормаль, отложенная из начала, направлена от прямой.)

Мы будем рассматривать многоугольники, получающиеся из данного  $P$  путем деформаций, вызванных параллельными смещениями ограничивающих его прямых, но только так, что никакая из этих прямых не перестает касаться многоугольника<sup>1)</sup>. Последняя оговорка имеет смысл при сколь угодно малых деформациях для тех прямых, которые в начальный момент касались многоугольника только в вершинах. При этом условии не только деформированный многоугольник определяется своими опорными числами, но и обратно, расстояния до ограничивающих прямых определяются многоугольником, поскольку направления этих прямых заданы.

В связи с этим любую функцию многоугольника можно рассматривать как функцию его опорных чисел  $f(h_1, \dots, h_n)$ . Так как допускаются стороны нулевой длины, то при рассмотрении любого конечного числа конечных многоугольников можно считать, что их стороны соответственно параллельны, и тогда функция  $f(h_1, \dots, h_n)$  определяется для них всех, а также для тех, которые получаются из них при параллельных смещениях ограничивающих прямых.

Функцию многоугольника  $f(Q) = f(h_1, \dots, h_n)$  мы назовем *существенно монотонной*, если она удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $f(Q)$  не меняется при параллельных переносах многоугольника;
- 2) каждая частная производная  $\partial f / \partial h_i$  существует и непрерывна вплоть до исчезновения  $i$ -й стороны<sup>2)</sup>;
- 3) если  $i$ -я сторона имеет ненулевую длину, то  $\partial f / \partial h_i > 0$ ; тогда, по непрерывности, при исчезновении  $i$ -й стороны  $\partial f / \partial h_i \geq 0$ .

Из последнего условия ясно, что если многоугольник  $Q_1$  содержится внутри  $Q_2$ , то  $f(Q_1) < f(Q_2)$ , потому что в этом случае все  $h_i^{(1)} \leq h_i^{(2)}$  и хотя бы одно  $h_k^{(1)} < h_k^{(2)}$ . В силу условия 1)  $f(Q_1) < f(Q_2)$  даже тогда, когда  $Q_1$  можно поместить внутри  $Q_2$  путем переноса.

Примерами существенно монотонных функций могут служить площадь и периметр. Если  $f$  — площадь, то  $\partial f / \partial h_i = l_i$ , где  $l_i$  — длина соответствующей стороны, потому что при смещении этой стороны на расстояние  $\Delta h_i$

<sup>1)</sup>Поэтому опорные числа могут принимать не любые значения, а только принадлежащие замкнутой области, определяемой этим условием. Неравенства, определяющие эту область, даны в § 5 гл. VII. Однако здесь вид этой области не имеет значения. Кроме того, указанные неравенства содержатся в лемме 1 этого параграфа.

<sup>2)</sup>Если при  $h_i = h_i^0$   $i$ -я сторона исчезает, то под  $\left(\frac{\partial f}{\partial h_i}\right)_{h_i=h_i^0}$  понимается соответствующая односторонняя производная. Непрерывность вплоть до исчезновения  $i$ -й стороны означает при этом, что если  $h_i$  стремится к  $h_i^0$  так, что при всех  $h_i$   $i$ -я сторона не вырождается, то  $\frac{\partial f}{\partial h_i} \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial h_i}\right)_{h_i=h_i^0}$ .

к площади многоугольника прибавляется, с точностью до малых высшего порядка, площадь прямоугольника с высотой  $\Delta h_i$  и основанием  $l_i$ . Здесь как раз  $\partial f / \partial h_i = 0$ , если  $i$ -я сторона исчезает. Если  $f$  — периметр, то  $\partial f / \partial h_i = \text{const} > 0$ , что вытекает, между прочим, из следующей леммы:

**Лемма 1.** *Длина стороны многоугольника есть линейная функция его опорных чисел  $h_i$ . Именно если перенумеровать все стороны<sup>3)</sup> по порядку и через  $\varphi_i$  обозначить угол между параллелями к  $(i - 1)$ -й и  $i$ -й стороне, то*

$$l_i = \frac{h_{i-1} - h_i \cos \varphi_i}{\sin \varphi_i} + \frac{h_{i+1} - h_i \cos \varphi_{i+1}}{\sin \varphi_{i+1}}. \quad (1)$$

Для доказательства обратимся к рис. 155, где изображены три последовательные стороны и перпендикуляры из начала  $O$  на прямые, несущие эти стороны, длины этих перпендикуляров суть опорные числа. Опустив из  $A_i$  перпендикуляр на  $OA_{i-1}$ , получим

$$OA_{i-1} = h_{i-1} = A_i B \sin \varphi_i + h_i \cos \varphi_i.$$

Отсюда

$$A_i B = \frac{h_{i-1} - h_i \cos \varphi_i}{\sin \varphi_i}.$$

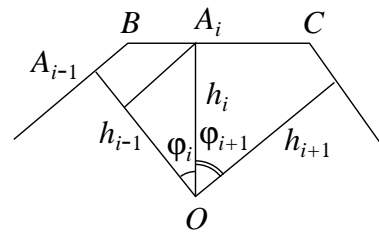


Рис. 155

Аналогичная формула имеет место для  $A_i C$ . А так как  $l_i = BA_i + A_i C$ , то и получаем для  $l_i$  выражение (1). (Если угол  $\varphi_i$  или  $\varphi_{i+1}$  тупой, то рисунок меняется, но вывод сохраняется.)

**2. Лемма 2.** *Пусть конечный выпуклый многоугольник  $Q$  деформируется вследствие параллельного движения ограничивающих его прямых с определенными (быть может, переменными) скоростями. Тогда (как следует из леммы 1) длины его сторон также меняются с определенными скоростями. Сопоставим каждой стороне многоугольника  $Q$  знак начальной скорости изменения ее длины. Стороны со стационарной длиной оставим неотмеченными.*

Если при рассматриваемой деформации некоторая строго монотонная функция  $f$  многоугольника  $Q$  стационарна, то для расстановки знаков на сторонах многоугольника имеются только три возможности:

- 1) ни одна сторона не отмечена, и тогда начальная деформация сводится к бесконечно малому переносу;
- 2) существует не менее четырех перемен знака;

<sup>3)</sup>Порядок сторон нулевой длины соответствует порядку нормалей к несущим их прямым.



3) перемен знака — только две. Тогда две стороны ненулевой длины, сходящиеся в одной вершине  $A$ , отмечены минусами, а некоторые стороны нулевой длины, лежащие в вершине  $A$ , отмечены плюсами.

Последний случай означает, что некоторые ограничивающие прямые, упирающиеся в многоугольник  $Q$  в вершине  $A$ , вдвигаются внутрь него, так что соответствующие стороны нулевой длины удлиняются. Никакой другой деформации многоугольника  $Q$  в начальный момент не происходит, если не считать, что он еще может параллельно перемещаться как целое. Если при этом  $h_i$  — опорное число, соответствующее вдвигаемой внутрь стороне нулевой длины, то необходимо  $\partial f/\partial h_i = 0$ , т. е. при  $\partial f/\partial h_i > 0$  третий случай невозможен.

Эта лемма аналогична лемме 3 § 1 главы VI, и мы докажем ее сведением к той лемме <sup>4)</sup>.

Если начальная деформация сводится к переносу многоугольника, то длины сторон стационарны, и имеем первый случай.

Допустим, что начальная деформация не сводится к переносу, и пусть  $\dot{h}_i$  — начальные скорости изменения опорных чисел при этой деформации. Исключим сначала удлинение тех сторон нулевой длины, для которых  $\partial f/\partial h_i = 0$  (т. е. прямые, несущие эти стороны, будем передвигать вместе с вершинами, через которые они проходят. Это, очевидно, не нарушит стационарности функции  $f$ , так как  $\partial f/\partial h_k = 0$ ).

Возьмем достаточно малое значение  $t$  и построим многоугольник  $Q$  с опорными числами  $h_i + \dot{h}_i t$ . Тогда, согласно лемме 1, изменения длин сторон будут  $\dot{l}_i t$ , где  $\dot{l}_i$  — начальная скорость изменения длины  $i$ -й стороны.

Многоугольники  $Q$  и  $Q'$  могут быть равны и параллельны; тогда рассматриваемая деформация сводится к переносу. Допустим, что это не так и один из многоугольников  $Q$ ,  $Q'$  можно поместить внутри другого параллельным переносом; скажем,  $Q$  помещается в  $Q'$ . Тогда, добавляя к деформации соответствующий перенос, получим, что все  $\dot{h}_i \geq 0$  и хотя бы одно  $\dot{h}_k > 0$ .

Но в таком случае, так как теперь все  $\partial f/\partial h_i > 0$ , получаем

$$\dot{f} = \sum \frac{\partial f}{\partial h_i} \dot{h}_i > 0,$$

<sup>4)</sup> Важно, однако, иметь в виду, что в лемме 3 § 1 гл. VI мы имеем дело с двумя разными многоугольниками, или, что то же самое, с конечной деформацией данного многоугольника, в то время как здесь речь идет о бесконечно малой деформации первого порядка, т. е. о начальных скоростях. Этим вызвана, во-первых, необходимость рассматривать существенно монотонную, а не просто монотонную функцию многоугольника, и с этим же связано появление третьего случая распределения знаков, который в условиях леммы 3 § 1 гл. VI явно невозможен. Если  $f(Q)$  — площадь, то  $(f-1)^2$  стационарна при любой деформации многоугольника с площадью, равной единице. Между тем  $(f-1)^2$  — монотонная функция многоугольника.

что противоречит стационарности функции  $f$ . Следовательно, ни один из многоугольников  $Q, Q'$  не помещается внутри другого. Тогда, согласно лемме 3 § 1 главы VI, разности длин их параллельных сторон меняют знак не менее четырех раз. Так как эти разности пропорциональны начальным скоростям  $\dot{l}_i$ , то и эти скорости меняют знак не менее четырех раз.

Теперь остается ввести удлинение тех сторон нулевой длины, для которых  $\partial f / \partial h_i = 0$ . То есть после рассмотренной деформации многоугольника вдвинем прямые, несущие эти стороны, внутрь многоугольника на расстояния  $\dot{h}_i t$ . Это вызовет появление новых настоящих сторон. При этом нужно различать два получившихся только что случая: 1) без этой добавочной деформации многоугольники  $Q$  и  $Q'$  были равны и параллельны; 2) число перемен знака скоростей  $\dot{l}_i$  не менее четырех.

Если мы вдвигаем внутрь сторону  $l_i$ , лежащую в вершине  $A$  между сторонами  $l_j, l_k$  ненулевой длины, то эти стороны укорачиваются, т. е. скорости изменения их длин уменьшаются. Поэтому если в первом случае это происходит не менее чем в двух разных вершинах, то получаем не менее чем четыре перемены знака. Если же это происходит только в одной вершине, то получаем третью возможность для расстановки знаков, указанную в лемме.

Пусть теперь до движения внутрь сторон нулевой длины имело место четыре перемены знака. Покажем, что при движении внутрь этих сторон число перемен знака не может уменьшиться.

Пусть одна или несколько новых настоящих сторон возникают в вершине  $A$ , где сходятся стороны  $AB, AC$ .

Для сторон  $AB, AC$  до введения этих новых сторон возможны расстановки знаков, указанные в таблице.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$AB$	0	−	0	−	+	0	+	−	+
$AC$	0	0	−	−	0	+	−	+	+

Так как стороны  $AB, AC$  играют одинаковую роль, то расстановки знаков 2 и 3, 5 и 6, 7 и 8 эквивалентны, а потому достаточно рассмотреть таблицу

	I	II	III	IV	V	VI
$AB$	0	−	−	+	+	+
$AC$	0	0	−	0	−	+

При движении прямых, несущих стороны нулевой длины, внутрь многоугольника стороны  $AB$  и  $AC$  укорачиваются, т. е. скорости изменения их

длин уменьшаются. Вместе с тем стороны нулевой длины заведомо удлиняются. Поэтому если обе стороны  $AB$ ,  $AC$  не удлинялись (случаи I, II, III), то они будут укорачиваться; тем самым им относятся минусы, а новым сторонам — плюсы. Это означает появление двух перемен знака.

Если только одна из сторон удлинялась (случаи IV, V), то после введения новых сторон она, быть может, будет укорачиваться. Это могло бы привести к потерям перемен знака. Эти потери компенсируются, однако, тем, что на новых сторонах между  $AB$  и  $AC$  стоят плюсы, с чем связано появление новых перемен знака. Возможные случаи даны в таблице.

До введения новых сторон	$AB$	+			+		
	$AC$	0			-		
После него	$AB$	+	0	-	+	0	-
	Новые стороны	+	+	+	+	+	+
	$AC$	-	-	-	-	-	-

Из этой таблицы ясно, что потерь перемен знака не происходит.

Наконец, если обе стороны  $AB$ ,  $AC$  удлинялись, то на них стояли плюсы и при переходе от  $AB$  к  $AC$  не было перемены знака. На вводимых новых настоящих сторонах стоят также плюсы, а потому перемены знака от плюса к минусу (в обе стороны от вершины  $A$ ) не могут исчезнуть. Могут лишь

появиться новые перемены знака, если, например, расстановка была такой, как на рис. 156.

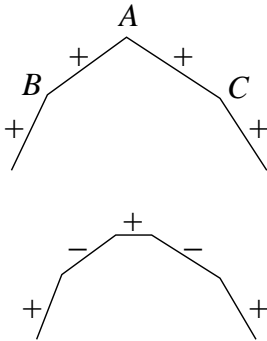


Рис. 156

Итак, во всех случаях введение новых сторон не приводит к потерям перемен знака, и лемма полностью доказана.

**3.** Теперь рассмотрим деформации бесконечных выпуклых многоугольников, оставляющие прямые, несущие бесконечные стороны этих многоугольников, неподвижными. Будем считать, что бесконечная сторона укорачивается, если ее конец смещается внутрь этой стороны с начальной скоростью, отличной от нуля, и удлиняется, если ее конец движется в противоположную сторону.

**Лемма 3.** Пусть бесконечный выпуклый многоугольник деформируется вследствие параллельного движения прямых, несущих только его конечные стороны, включая стороны нулевой длины. Сопоставим каждой стороне знак начальной скорости изменения ее длины, имея в виду принятое условие относительно бесконечных сторон. Стороны неизменной длины оставим неотмеченными.

При этом условии имеются только три возможности для расстановки знаков:

1) ни одна сторона не отмечена; многоугольник в начальный момент неподвижен;

2) существует не менее двух перемен знака;

3) обе бесконечные стороны отмечены одним знаком и все конечные стороны не отмечены. Этот случай возможен лишь для многоугольника с параллельными бесконечными сторонами. Он означает, что в начальный момент многоугольник движется вдоль своих бесконечных сторон как твердое целое.

Эта лемма аналогична лемме 4 § 1 главы VI и доказывается сведением к этой лемме подобно тому, как только что была доказана лемма 2. Именно если  $Q$  — исходный многоугольник, то строим многоугольник  $Q'$  с опорными числами  $h_i + \dot{h}_i t$ , где  $h_i$  — опорные числа многоугольника  $Q$ , а  $\dot{h}_i$  — начальные скорости их изменения. Тогда вследствие леммы 1 разности длин сторон многоугольников  $Q'$  и  $Q$  будут  $\dot{l}_i t$ , где  $\dot{l}_i$  — начальные скорости изменения этих длин. (По принятому условию для бесконечной скорости  $\dot{l}_i$  есть скорость движения ее конца.) Поэтому, применяя к многоугольникам  $Q$  и  $Q'$  лемму 4 § 1 главы VI, получаем нужный результат.

## § 2. ТЕОРЕМЫ О ЖЕСТКОСТИ МНОГОГРАННИКОВ

1. Выпуклый многогранник, замкнутый или бесконечный, полностью определяется плоскостями своих граней. Если эти плоскости двигать, то многогранник будет соответственно деформироваться. Мы будем предполагать, что речь идет о параллельном переносе этих плоскостей с определенными скоростями. То есть нормали остаются неизменными или по крайней мере стационарными, а опорные числа являются дифференцируемыми функциями времени  $t$ . Мы говорим, что многогранник деформируется вследствие параллельного движения плоскостей граней.

Грань многогранника ограничена прямыми, являющимися линиями пересечения ее плоскости с плоскостями других граней. Эти прямые будут также параллельно перемещаться, поэтому деформации граней будут как раз такие, какие рассмотрены в § 1. На гранях могут появляться новые ребра. Положение прямых, ограничивающих грань, на плоскости  $T$  этой грани определяется при заданных направлениях опорными числами относительно начала, взятого в плоскости  $T$ . Самое естественное взять за это начало  $O'$  проекцию начала  $O$ , выбранного в пространстве, на плоскость  $T$ .

Так определенные опорные числа грани оказываются линейными функциями опорных чисел многогранника.

Доказательство очевидно из рис. 157, где изображены плоскости смежных  $i$ -й и  $k$ -й граней в проекции вдоль их общего ребра. Здесь  $\theta_{ik}$  — угол

между нормальными к этим граням;  $h_i, h_k$  — опорные числа граней;  $O_i, O_k$  — начала в этих гранях;  $O_i A = h_{ik}, O_k A = h_{ki}$  суть опорные числа общего ребра, первое на  $i$ -й, второе на  $k$ -й грани.

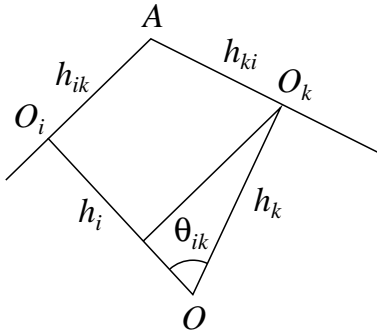


Рис. 157

Проектируя  $O_k$  на  $OO_i$ , получим  $OO_i = h_i = h_{ki} \sin \theta_{ik} + h_k \cos \theta_{ik}$ , откуда

$$h_{ki} = \frac{h_i - h_k \cos \theta_{ik}}{\sin \theta_{ik}}. \quad (1)$$

Таким образом,  $h_{ki}$  есть линейная функция от  $h_i$  и  $h_k$ .

Отсюда следует, что когда опорные числа  $h_i$  меняются с определенными скоростями, то  $h_{ki}$  также имеют определенные скорости изменения. А тогда в силу леммы 1 § 1 то же верно для длин ребер многогранника.

Эти замечания обеспечивают возможность применения лемм 2 и 3 § 1.

Так как длины ребер и опорные числа граней оказываются линейными функциями опорных чисел многогранника, то при движении граней с постоянными скоростями скорости изменения длин ребер и опорных чисел граней также постоянны. Но в вопросах жесткости можно ограничиться равномерным движением граней, а тогда изменения ребер и опорных чисел граней будут также равномерными и, в частности, стационарность их будет означать просто неизменность. Поэтому в дальнейшем можно совершенно не опасаться смешения понятий стационарности и неизменности в отношении к ребрам и опорным числам.

**2. Теорема 1.** *Если для каждой грани замкнутого выпуклого многогранника стационарны ее направление и некоторая существенно монотонная функция, то многогранник — жесткий.*

Иными словами, пусть замкнутый выпуклый многогранник деформируется вследствие параллельного движения плоскостей его граней. Если при этом для каждой грани оказывается стационарной какая-нибудь существенно монотонная функция, вообще говоря, своя особая для каждой грани, то деформация многогранника сводится к переносу, т. е. начальные скорости плоскостей его граней таковы, как если бы они образовывали одно твердое тело<sup>5)</sup>.

Доказательство основано на соединении леммы 2 § 1 с усиленной леммой Коши (§ 2 главы X).

<sup>5)</sup>Если не требовать существенной монотонности стационарных функций, то теорема отпадает. Пример: функция  $f = (F(Q) - 1)^2$ , где  $F(Q)$  — площадь. Эта функция стационарна при любых смещениях граней единичного куба.

Сдвинем плоскости граней данного многогранника  $P$  на малые расстояния, пропорциональные их начальным скоростям. Получим новый многогранник  $P'$ , на котором никакое ребро, имевшееся на  $P$ , не исчезло, но, может быть, появились новые ребра. Последнее означает, что грани многогранника  $P$  имели стороны нулевой длины, которые при рассматриваемой деформации удлиняются.

Отнесем каждому ребру многогранника  $P'$  знак начальной скорости изменения его длины или, точнее, длины того ребра исходного многогранника  $P$ , из которого получилось данное ребро у  $P'$ . Помним при этом, что некоторые ребра у  $P'$  могли появиться из нулевых ребер на  $P$ . Ребра, длины которых стационарны, оставим неотмеченными. Вследствие того, что для каждой грани стационарна некоторая существенно монотонная функция, расстановка знаков вокруг каждой грани удовлетворяет лемме 2 § 1. То есть на каждой грани имеет место одно из трех:

- 1) ни одно ребро грани не отмечено;
- 2) при обходе вокруг грани имеется не менее четырех перемен знака;
- 3) перемен знака — две, но тогда отмечены плюсами ребра, возникающие в одном месте из ребер нулевой длины, а смежные с ними обычные ребра отмечены минусами.

В усиленной лемме Коши (§ 2 главы X) аналогичные условия налагаются на расстановку знаков вокруг вершин, но не граней. Поэтому, выбрав внутри каждой грани многогранника  $P$  по точке, соединим точки в смежных гранях линиями, пересекающимися соответствующие ребра. В результате получим на  $P$  сеть  $R$ , двойственную сетке его граней: грани на  $P$  отвечает вершина сетки  $R$ , ребру — ребро, вершине — грань (см. рис. 128 на с. 285).

Аналогично на многограннике  $P$  построим двойственную сеть  $R'$  и отнесем каждому ее ребру знак соответствующего ребра на  $P'$ . Тогда первым двум указанным выше возможностям для расстановки знаков вокруг грани на  $P'$  отвечают в сети  $R'$  две возможности расстановки знаков вокруг вершины:

- 1) ни одно ребро, подходящее к вершине, не отмечено;
- 2) при обходе вокруг вершины имеется не менее четырех перемен знака.

Выясним, что будет соответствовать оставшемуся случаю только двух перемен знака. Он связан с тем, что на многограннике  $P$  могли быть «ребра нулевой длины», которые на  $P'$  переходят в настоящие ребра. Это означает, что в некоторой вершине  $A$  многогранника  $P$  сходятся четыре или более граней, которые после смещения их плоскостей перестают сходиться в одной вершине (рис. 158). Вершина  $A$  как бы расщепляется, и между сходящимися в ней гранями появляются новые ребра.

Для двойственных сетей  $R$  и  $R'$  это означает следующее. В сети  $R$  есть грань  $G_A$ , соответствующая вершине  $A$ , вершины этой грани соответству-

ют граням многогранника  $P$ , сходящимся в  $A$ . Расщеплению вершины  $A$  отвечает разбиение грани  $G_A$  на части новыми ребрами. Эти новые ребра соответствуют новым ребрам многогранника  $P'$ . Они соединяют те вершины грани  $G_A$ , которые отвечают граням многогранника  $P$ , оказавшимся после деформации смежными по новым ребрам.

Все это означает, что грань  $G_A$  разбивается на части диагоналями. То

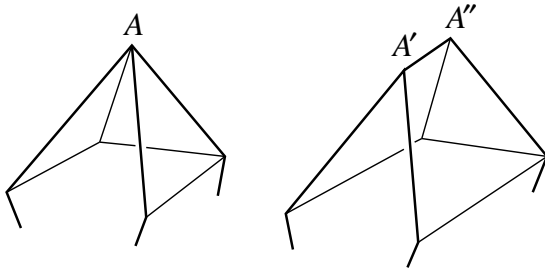


Рис. 158

есть переход от сети  $R$  к  $R'$  состоит в проведении диагоналей на некоторых ее гранях. Тем самым сеть  $R'$  удовлетворяет требованиям, налагаемым усиленной леммой Коши.

Пусть вокруг грани  $H'$  многогранника  $P'$  имеется только две переменные знака (третий случай). Тогда на грани  $H$  многогранника  $P$

есть вершина  $A$ , «расщепление» которой как раз дает новые ребра на  $P'$ . Отмеченные ребра грани  $H'$  все сходились в вершине  $A$  на  $P$ , но только два крайних были настоящими ребрами.

Отсюда видно, что третья возможность расстановки знаков вокруг грани многогранника  $P'$  преобразуется при переходе к двойственной сети  $R'$  в следующее:

3) при обходе вокруг вершины (соответствующей грани  $H'$ ) имеются только две переменные знака, но тогда плюсами отмечены новые ребра, лежащие на одной «старой» грани (соответствующей вершине  $A$ ), а смежные с ними «старые» ребра отмечены минусами (рис. 159 дает обе картины расстановки знаков на  $P'$  и на  $R'$ ).

Это и есть третья возможность в том виде, как она фигурирует в усиленной лемме Коши.

Таким образом, если имеются отмеченные ребра, то получаем расстановку знаков, невозможную в силу этой леммы. Значит отмеченных ребер нет, т. е. длины всех ребер многогранника  $P$  стационарны.

Отсюда уже очевидно, что деформация многогранника  $P$  сводится к переносу, и теорема доказана.

**3.** Полученный результат можно несколько обобщить, допуская деформации многогранника, связанные с появлением новых граней. Именно будем считать, что данный многогранник  $P$  ограничен не только плоскостями его граней, но еще некоторыми плоскостями, проходящими через его реб-

ра<sup>6)</sup>. Тогда параллельные перемещения этих плоскостей могут приводить к появлению на  $P$  новых граней. Это можно изобразить так, что некоторые грани на  $P$  вырождаются в ребра, а при деформации превращаются в настоящие грани. Такая вырождающаяся грань «ограничена» двумя совпадающими прямыми (идущими вдоль ребра) и еще другими прямыми, проходящими через концы ребра (рис. 160).

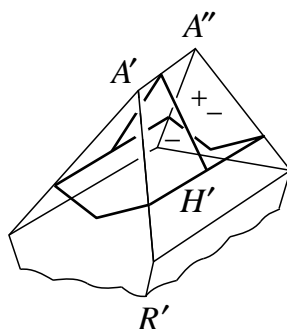
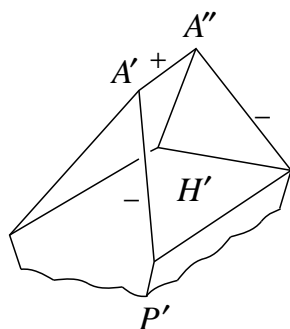


Рис. 159

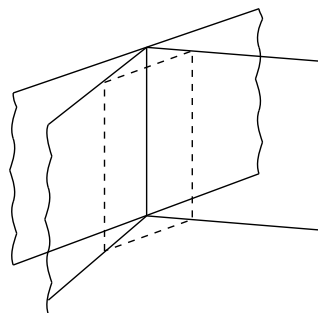


Рис. 160

В связи с этим возникновение новой грани на месте ребра представляется как деформация выродившегося в отрезок многоугольника, вызванная движением ограничивающих его прямых. У такого многоугольника в начальный момент две стороны равны, а прочие имеют нулевую длину.

Пусть многоугольник  $Q$  вырождается в отрезок  $AB$ . Пусть через  $A$  проходит несколько ограничивающих прямых. Если одна из них отодвигается «наружу» (опорное число возрастает), то она перестает касаться многоугольника  $Q$  и тем самым перестает быть ограничивающей прямой. Ее отодвигание не ведет к деформации многоугольника и потому можно с успехом считать ее неподвижной. Поэтому такие перемещения ограничивающих прямых считаются исключенными.

**Лемма.** Пусть многоугольник, в начальный момент вырождающийся в отрезок, деформируется вследствие параллельных смещений ограничивающих прямых. Если при этом некоторая существенно монотонная функция его стационарна, то либо он остается отрезком, либо скорости изменения длин сторон меняют знак четыре раза при обходе вокруг многоугольника.

<sup>6)</sup>Обобщение, допускающее вырождение граней в вершины, не интересно: оно тривиально, так как при превращении точки в многоугольник все опорные числа можно считать увеличивающимися и потому либо  $df > 0$ , либо  $f$  перестает быть существенно монотонной для многоугольников, вырождающихся в точку, как это имеет место, например, для площади.



Пусть многоугольник  $Q$  вырождается в отрезок и деформируется так, что существенно монотонная функция  $f(Q)$  стационарна. Допустим, что при деформации он становится настоящим многоугольником. Это означает, что те две ограничивающие его прямые  $L_1, L_2$ , которые в начальный момент совпадали, расходятся (рис. 161).

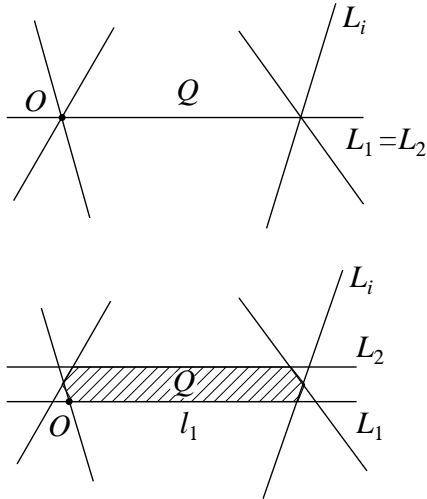


Рис. 161

При этом на обоих концах отрезка  $Q$ , очевидно, должны иметься удлиняющиеся стороны нулевой длины. Поэтому, для того чтобы было четыре перемены знака, нужно, чтобы обе стороны ненулевой длины укорачивались (стороны нулевой длины, конечно, не могут укорачиваться!).

Допустим, однако, что одна из этих сторон,  $l_1$ , не укорачивается, а либо стационарна, либо удлиняется. Поместим начало  $O$  в одном из ее концов. В начальный момент она ограничивается пересечением прямой  $L_1$  с прямыми, несущими нулевые стороны. А так как она не укорачивается, то эти прямые не могут приближаться к точке  $O$ . Следовательно, скорости изменения их опорных чисел не отрицательны:  $\dot{h}_i \geq 0$ . Вместе с тем прямая  $L_2$  отодвигается от  $L_1$  и потому скорость изменения ее опорного числа положительна:  $\dot{h}_2 > 0$ . Наконец, прямая  $L_1$  остается проходящей через начало и потому  $\dot{h}_1 = 0$ .

Итак, все  $\dot{h}_i \geq 0$  и  $\dot{h}_2 > 0$ . Но по условию существенной монотонности  $df/dh_i \geq 0$  и для сторон ненулевой длины  $df/dh_i > 0$ , т. е.  $df/dh_2 > 0$ . Поэтому

$$\frac{df}{dt} = \sum \frac{df}{dh_i} \dot{h}_i > 0.$$

Между тем по условию функция  $f$  стационарна, т. е.  $df/dt = 0$ . Полученное противоречие показывает неверность допущения о том, что одна из сторон ненулевой длины не укорачивается.

Следовательно, обе стороны ненулевой длины укорачиваются; мы имеем, таким образом, ровно четыре перемены знака, и лемма доказана.

Пусть теперь многогранник  $P$  деформируется вследствие параллельных смещений плоскостей его граней, причем некоторые грани в начальный момент вырождаются в ребра. Тогда, расставляя на ребрах деформированного многогранника  $P'$  знаки скоростей изменения их длин, приходим к тем же выводам, какие были сделаны при доказательстве теоремы 1. Вокруг грани,

возникшей из ребра, всегда будет четыре перемены знака, и потому такие грани вовсе не могут появляться.

Следовательно, в теореме 1 можно допускать среди плоскостей, граней многогранника такие, которые в начальный момент проходят вдоль ребер, т. е. допускаются грани, вырождающиеся в ребра.

Это аналогично тому, что в теоремах главы VI о равенстве многогранников с параллельными гранями также допускаются грани, вырождающиеся в ребра.

В качестве примера можно указать теорему о жесткости многогранника со стационарными периметрами граней. Тогда среди граней можно допускать вырождающиеся в ребра. Периметр такой «грани» равен удвоенной длине ребра.

В случае стационарности площади обобщение тривиально, потому что выродившаяся грань имеет нулевую площадь и при условии стационарности площади так и должна оставаться ребром, т. е. обобщение здесь оказывается бессодержательным.

**4. Теорема 2.** Пусть бесконечный выпуклый многогранник деформируется вследствие параллельных смещений плоскостей его конечных граней; плоскости же бесконечных граней неподвижны. Тогда, если для каждой конечной грани какая-либо существенно монотонная функция оказывается стационарной, то многогранник неподвижен (точнее, плоскости всех его граней стационарны). При этом среди граней допускаются такие, которые в начальный момент вырождаются в ребра.

Эта теорема соответствует теореме 2 §4 главы VI о равенстве бесконечных многогранников; она относится к ней так же, как доказанная только что теорема 1 относится к теореме 2 §3 главы VI о замкнутых многогранниках.

Доказательство теоремы 2 основано на тех же соображениях.

Смещая плоскости граней данного многогранника  $P$  на малые расстояния, пропорциональные их начальным скоростям, получим многогранник  $P'$ . На его ребрах расставляем знаки скоростей изменения их длин. Тогда для конечных граней получаем те же три возможности, какие были в теореме 1, а на бесконечных гранях — возможности, указанные в лемме 3 §1.

После этого берем второй экземпляр  $P''$  того же многогранника с противоположно расставленными знаками и определяем абстрактный многогранник  $P' + P''$ , причем соответственные бесконечные ребра у  $P'$  и  $P''$  отождествляем, объединяя каждую пару соответственных бесконечных граней в одну.

Далее, переходим от  $P' + P''$  к двойственной сети  $R'$ , для которой повторяются те же выводы, какие были получены в доказательстве теоремы 1.

Тогда, применяя усиленную лемму Коши к сети  $R'$ , получаем доказательство теоремы 2.

Детальное осуществление намеченного плана свелось бы к простому пересказу того, что уже содержится в доказательствах теоремы 1 и теоремы 2 § 4 главы VI.

**5.** Теорема 2 может быть усилена и распространена на  $n$ -мерное пространство совершенно так же, как это сделано в § 5 главы VI для аналогичной теоремы о равенстве бесконечных многогранников. Таким путем получается

**Теорема 3.** Пусть  $n$ -мерный бесконечный выпуклый многогранник деформируется вследствие параллельных смещений плоскостей его конечных граней; плоскости же бесконечных граней неподвижны. Пусть для каждой конечной грани выполнено хотя бы одно из двух условий: 1) плоскость этой грани стационарна; 2) для этой грани стационарна некоторая существенно монотонная функция<sup>7)</sup>. При этих условиях многогранник неподвижен, т. е. плоскости всех его граней стационарны.

Эту теорему можно пересказать для конечных многогранников с границей так же, как это сделано для аналогичной теоремы о равенстве в § 5 главы VI.

Доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы § 5 главы VI. Пусть  $h(\mathbf{n}, t)$  — опорная функция деформирующегося многогранника (т. е. расстояние его опорной плоскости с нормалью  $\mathbf{n}$  от начала координат как функция  $\mathbf{n}$  и параметра  $t$ , с изменением которого осуществляется деформация). Если начальная скорость ее изменения  $(\frac{\partial h}{\partial t})_{t=0}$  везде равна нулю, то многогранник в начальный момент неподвижен. Поэтому допустим, что есть область векторов  $\mathbf{n}$ , где  $(\frac{\partial h}{\partial t})_{t=0} > 0$ . Тогда определим в этой области функцию

$$\varphi(\mathbf{n}) = \frac{1}{(\frac{\partial h}{\partial t})_{t=0}}$$

и рассмотрим поверхность  $R$ , образованную концами векторов  $\varphi(\mathbf{n})\mathbf{n}$ .

Это аналогично построению, изложенному в § 5 главы VI, с тем лишь различием, что на месте разности опорных функций появляется производная  $\partial h / \partial t$ . Дальнейший ход доказательства также аналогичен выводам § 5 главы VI, и мы не будем его здесь приводить.

**6.** Многогранник с границей определяется не одними плоскостями граней, но еще прямыми, содержащими его граничные ребра. Эти прямые лежат в плоскостях крайних граней. Мы будем допускать деформации многогранника, при которых эти прямые подвергаются параллельным смещениям

<sup>7)</sup> Речь идет о существенно монотонной функции  $(n-1)$ -мерного многогранника, которая определяется совершенно так же, как для многоугольника.

в плоскостях крайних граней (которые при этом сами могут параллельно перемещаться).

**Теорема 4.** Пусть конечный выпуклый многогранник, ограниченный одной замкнутой ломаной, деформируется вследствие параллельных смещений плоскостей его граней и прямых, несущих его граничные ребра. Пусть при этом 1) для каждой грани оказывается стационарной некоторая существенно монотонная функция; 2) на каждой крайней грани начальные скорости изменения длин граничных ребер имеют один знак (для каждой грани — свой), допуская также значение нуль.

При этих условиях начальная деформация многогранника сводится к переносу.

Эта теорема аналогична теореме 2 § 5 главы VI.

Доказательство ее, подобно доказательствам теорем 1 и 2, основано на усиленной лемме Коши и лемме 1 § 1. Мы опять строим деформированный многогранник  $P'$  и расставляем на его ребрах знаки. Потом, взяв его второй экземпляр  $P''$  с противоположно расставленными знаками, определяем абстрактный многогранник  $P' + P''$ , отождествляя и потом исключая соответственные граничные ребра многогранников  $P'$  и  $P''$ . После этого строим двойственную сеть и, применяя к ней те же рассуждения, что и в доказательстве теоремы 1, получаем доказательство нашей теоремы.

### § 3. СВЯЗЬ ТЕОРЕМ О ЖЕСТКОСТИ ДРУГ С ДРУГОМ И С ТЕОРИЕЙ СМЕШАННЫХ ОБЪЕМОВ

1. В теореме 1 § 2 заключается, в частности,

**Теорема 1.** Замкнутый выпуклый многогранник со стационарными направлениями и площадями граней — жесткий.

Мы докажем, что отсюда можно вывести как чисто формальное следствие следующее предложение:

**Теорема 2.** Замкнутый выпуклый многогранник с жесткими гранями — жесткий.

Эта теорема была доказана в § 4 главы X, причем там грани понимались в обобщенном смысле. Здесь же мы будем иметь в виду обычные грани. Следовательно, результат будет слабее, чем полученный в § 4 главы X. Тем не менее формальная связь теоремы 2 с теоремой 1, на которой построен вывод, представляет немалый интерес. Из ее рассмотрения естественно наметится связь обеих теорем с теорией смешанных объемов (§ 2 и 3 главы VII), и применение этой последней даст новое доказательство теоремы 1, а вместе с ней и теоремы 2<sup>8)</sup>.

<sup>8)</sup>Эти связи имеют большое значение в выводе теорем о жесткости для гладких поверхностей. Для многогранников они были впервые подмечены Г. Вейлем в [363].

2. Итак, обратимся к формальному сведению теоремы 2 к теореме 1.

Пусть многогранник с жесткими гранями деформируется. Тогда каждая грань  $Q_m$  вращается как твердое тело и ее вращение характеризуется вектором угловой скорости  $\omega_i$ . Так как относительное вращение двух смежных граней  $Q_i, Q_j$  происходит вокруг их общего ребра, то разность  $\omega_i - \omega_j$  направлена по этому ребру. Это равносильно тому, что разность  $\omega_i - \omega_j$  перпендикулярна к (внешним) нормальям  $\mathbf{n}_i, \mathbf{n}_j$  обеих граней, т. е.

$$(\omega_i - \omega_j) \mathbf{n}_i = 0, \quad (\omega_i - \omega_j) \mathbf{n}_j = 0,$$

или

$$\omega_i \mathbf{n}_i = \omega_j \mathbf{n}_i, \quad \omega_i \mathbf{n}_j = \omega_j \mathbf{n}_j. \quad (1)$$

Положим

$$\omega_i \mathbf{n}_i = p_i \quad (2)$$

и рассмотрим деформацию того же многогранника, состоящую в параллельном движении граней с постоянными скоростями  $p_i$  в направлении их нормалей. Тогда в момент  $t$  опорные числа многогранника будут

$$h_i^t = h_i + t p_i. \quad (3)$$

Мы докажем, что в силу соотношений (1) при деформации, определенной уравнениями (3), площади граней стационарны. Этим теорема 2 о жесткости многогранника с жесткими гранями и будет сведена к теореме 1 о жесткости многогранника при стационарности направлений и площадей граней.

Действительно, стационарность направлений и площадей граней в силу теоремы 1 означает, что многогранник испытывает лишь параллельный перенос с какой-то скоростью  $\mathbf{a}$ . Но тогда  $p_i$  суть составляющие этого переноса, нормальные к граням, и, следовательно,

$$p_i = \mathbf{n}_i \mathbf{a}.$$

Прибавим к рассматриваемой деформации многогранника вращение его как целого с угловой скоростью  $-\mathbf{a}$ . Тогда скорости вращения его граней будут  $\omega'_i = \omega_i - \mathbf{a}$  и  $p'_i = \omega'_i \mathbf{n}_i = 0$  для всех  $i$ . Но по (1)

$$\omega'_i \mathbf{n}_j = \omega'_j \mathbf{n}_j = \omega'_i \mathbf{n}_i = 0,$$

где  $\mathbf{n}_j$  — нормаль к любой грани, имеющей с  $Q_i$  общее ребро. Так как среди таких нормалей заведомо найдутся две, не лежащие в одной плоскости с  $\mathbf{n}_i$ , то из написанных равенств следует, что

$$\omega'_i = 0.$$

Таким образом, новая деформация сводится к движению, а значит, и исходная сводилась к движению, т. е. мы получили теорему 2.

**3.** Докажем, что из соотношений (1) следует стационарность площадей граней. Для этого рассмотрим данную грань  $Q_i$ . В ее плоскости в качестве начала координат берем проекцию начала координат в пространстве. Тогда, если  $h_{ij}$  — опорные числа ребер грани  $Q_i$  относительно этого начала, то по формуле (1) § 2

$$h_{ij} = \frac{h_j - h_i \cos \theta_{ij}}{\sin \theta_{ij}} = \frac{h_j - h_i(\mathbf{n}_i \mathbf{n}_j)}{|\mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_j|}, \quad (4)$$

где  $h_j$  и  $\mathbf{n}_j$  — опорное число и нормаль грани  $Q_j$ , смежной с  $Q_i$  по соответствующему ребру.

Для деформированного многогранника в силу формулы (3) получим

$$h_{ij}^t = h_{ij} + t p_{ij}, \quad (5)$$

где

$$p_{ij} = \frac{p_j - p_i(\mathbf{n}_i \mathbf{n}_j)}{|\mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_j|}. \quad (6)$$

При смещении стороны  $l$  многоугольника на малое расстояние  $\delta$  к многоугольнику прибавляется трапеция с основанием  $l$  и высотой  $\delta$ . Поэтому производная площади  $F_i$  грани  $Q_i$  по опорному числу  $h_{ij}$  есть длина соответствующей стороны:

$$\frac{\partial F_i}{\partial h_{ij}} = l_{ij}. \quad (7)$$

Поэтому в силу (5)

$$\left( \frac{dF_i}{dt} \right)_{t=0} = \sum_j \left( \frac{\partial F_i}{\partial h_{ij}} \frac{dh_{ij}}{dt} \right)_{t=0} = \sum_j p_{ij} l_{ij}. \quad (8)$$

Теперь остается только показать, что стоящая здесь справа сумма вследствие равенств (1) обращается в нуль. Для этого заметим, что в силу (1) и (2)

$$p_i = \boldsymbol{\omega}_i \mathbf{n}_i, \quad p_j = \boldsymbol{\omega}_j \mathbf{n}_j. \quad (9)$$

Поэтому из (6) следует

$$p_{ij} = \frac{\mathbf{n}_j - \mathbf{n}_i(\mathbf{n}_i \mathbf{n}_j)}{|\mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_j|} \boldsymbol{\omega}_i = \mathbf{n}_{ij} \boldsymbol{\omega}_i, \quad (10)$$

где вектор

$$\mathbf{n}_{ij} = \frac{\mathbf{n}_j - \mathbf{n}_i(\mathbf{n}_i \mathbf{n}_j)}{|\mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_j|} \quad (11)$$

есть не что иное, как внешняя единичная нормаль к стороне  $l_{ij}$  грани  $Q_i$ , в чем легко непосредственно убедиться. Поэтому имеет место соотношение замкнутости

$$\sum_j \mathbf{n}_{ij} l_{ij} = 0. \quad (12)$$

Отсюда, умножая на  $\boldsymbol{\omega}_i$ , и пользуясь формулой (10), получим

$$\sum_j p_{ij} l_{ij} = 0, \quad (13)$$

откуда в силу соотношения (8)

$$\left( \frac{dF_i}{dt} \right)_{t=0} = 0,$$

что и требовалось доказать.

**4.** Теперь докажем теорему 1 о жесткости многогранника со стационарными направлениями и площадями граней, основываясь на началах теории смешанных объемов.

Пусть начальные скорости параллельного движения граней данного многогранника  $P$  будут  $p_i$ , т. е.  $\left( \frac{dh_i}{dt} \right)_{t=0} = p_i$ . А начальные скорости изменения опорных чисел ребер граней пусть будут  $p_{ij}$ , т. е.  $\left( \frac{dh_{ij}}{dt} \right)_{t=0} = p_{ij}$ .

Для производной площади грани имеем формулу (8)

$$\left( \frac{dF_i}{dt} \right)_{t=0} = \sum_j p_{ij} l_{ij}.$$

Поэтому условие стационарности площадей дает

$$\sum_j p_{ij} l_{ij} = 0. \quad (14)$$

Рассмотрим многогранник  $P'$  с опорными числами

$$h'_i = h_i + t p_i \quad (15)$$

со столь малым  $t$ , что на  $P'$  никакие две грани, не смежные на  $P$ , не становятся смежными. Различие в строении многогранников  $P$  и  $P'$  может быть

обусловлено только тем, что некоторые грани из сходящихся на  $P$  в одной вершине могут на  $P'$  разойтись, тогда как другие станут смежными уже не в вершине, а по ребру. В таком случае можно считать, что и на  $P$  такое ребро есть, но имеет длину нуль.

Пусть  $Q_i$  и  $Q'_i$  — соответственные грани многогранников  $P$  и  $P'$ . Смешанная площадь этих граней, определяемая подобно смешанному объему (см. лемму 4 § 2 главы VIII), будет

$$F(Q_i Q'_i) = \frac{1}{2} \sum_j h'_{ij} l_{ij}, \tag{16}$$

или в силу формулы (5)

$$F(Q_i Q'_i) = \frac{1}{2} \sum_j h_{ij} l_{ij} + \frac{1}{2} t \sum_j p_{ij} l_{ij}.$$

Отсюда в силу условия (14)

$$F(Q_i Q'_i) = \frac{1}{2} \sum_j h_{ij} l_{ij} = F(Q_i Q_i), \tag{17}$$

где  $F(Q_i Q_i) = \frac{1}{2} \sum_j h_{ij} l_{ij}$  есть не что иное, как площадь грани  $Q_i$ .

Напишем неравенство Минковского для смешанных площадей<sup>9)</sup>

$$F(Q_i Q'_i)^2 \geq F(Q_i Q_i) F(Q'_i Q'_i), \tag{18}$$

причем знак равенства стоит здесь тогда и только тогда, когда  $Q_i$  и  $Q'_i$  гомотетичны. Вследствие (17) отсюда вытекает, что

$$F(Q_i Q'_i) \geq F(Q'_i Q'_i), \tag{19}$$

---

<sup>9)</sup> Это неравенство есть, конечно, частный вид общего неравенства, выведенного в § 3 гл. VIII для  $n$ -мерного пространства. Однако для площадей оно выводится совсем просто. Ищем минимум отношения  $\Phi = \frac{F(QQ')^2}{F(QQ)F(Q'Q')}$  при данном  $Q$  и переменном  $Q'$ . Легко видеть, что этот минимум достигается. Обозначая опорные числа и длины сторон многоугольников  $Q$  и  $Q'$  через  $h_j, h'_j$  и  $l_j, l'_j$ , будем иметь при минимуме  $\frac{\partial \Phi}{\partial h'_j} = 0$ , а в силу (16)  $\frac{\partial F(QQ')}{\partial h'_j} = \frac{1}{2} l_j$ . Наконец, так как  $F(Q'Q')$  есть площадь многоугольника, то  $\frac{\partial F(Q'Q')}{\partial h'_j} = l_j$ . Вычисляя на основании этих соотношений производные  $\frac{\partial \Phi}{\partial h'_j}$  и приравнявая их нулю, придем к тому, что при минимуме  $l_j = \lambda l'_j$ , где  $\lambda = \frac{F(QQ')}{F(Q'Q')}$ . Но если длины сторон пропорциональны, то многоугольники  $Q$  и  $Q'$  подобны, т. е. минимум  $\Phi$  достигается для подобных многоугольников. А тогда  $\Phi = 1$ . Следовательно,  $\Phi \geq 1$  и  $\Phi = 1$  только тогда, когда  $Q$  и  $Q'$  подобны. Это и есть неравенство (18) с дополнением об условии равенства.



где знак равенства может быть лишь при условии, что он стоит в (18), т. е. тогда, когда грани  $Q_i$  и  $Q'_i$  гомотетичны. Но так как тогда (19) сводится к равенству их площадей, то тем самым (19) превращается в равенство лишь при условии, что грани  $Q_i$  и  $Q'_i$  равны и параллельны.

Умножая (17) на  $h'_i$  и суммируя по всем граням, получим

$$\sum_i h'_i F(Q_i Q'_i) = \sum_i h'_i F(Q_i Q_i). \quad (20)$$

А умножая (19) на  $h_i$  и суммируя по всем граням, получим

$$\sum_i h_i F(Q_i Q'_i) \geq \sum_i h_i F(Q'_i Q'_i). \quad (21)$$

Но вследствие теоремы 4 § 3 главы VIII (формула (26))<sup>10)</sup>

$$\sum_i h'_i F_i(Q_i Q'_i) = \sum_i h_i F(Q'_i Q'_i); \quad \sum_i h_i F(Q_i Q'_i) = \sum_i h'_i F(Q_i Q_i). \quad (22)$$

Поэтому из (20) следует, что в (21) стоит знак равенства. Это возможно лишь при условии, что во всех неравенствах (19) стоит знак равенства. А тогда все грани  $Q_i$  и  $Q'_i$  соответственно равны и параллельно расположены, т. е. сами многогранники  $P$  и  $P'$  равны и параллельно расположены. В силу определения многогранника  $P'$  это означает, что скорости  $p_i$  движения граней таковы, как если бы многогранник  $P$  был твердым, т. е. при стационарности площадей граней он — жесткий.

**5.** Все проведенные выводы переносятся на непрерывно изогнутые выпуклые поверхности. Если поверхность подвергается бесконечно малому изгибанию, то каждый ее бесконечно малый кусок движется как твердое тело, так что ему можно приписать определенный вектор угловой скорости  $\omega$ .

<sup>10)</sup>Здесь нет надобности ссылаться на теорему 4 § 3 гл. VIII, так как можно получить тот же результат непосредственно. Пользуясь формулой (16) (с перестановкой  $Q_i$  и  $Q'_i$ ), имеем

$$\sum_i h'_i F_i(Q_i Q'_i) = \sum_i h'_i \cdot \frac{1}{2} \sum_j h_{ij} l'_{ij} = \sum_i \frac{h'_i}{2} \sum_j \frac{h_j - h_i \cos \theta_{ij}}{\sin \theta_{ij}} l'_{ij}.$$

Здесь каждое ребро  $l'_{ij}$  встречается дважды: один раз у грани  $Q_i$ , другой раз у грани  $Q_j$ . Поэтому та же сумма может быть переписана так:

$$\begin{aligned} & \sum \sum \frac{h'_i h_j}{2} \frac{l'_{ij}}{\sin \theta_{ij}} - \sum \sum \frac{h'_i h_i}{2} \frac{\cos \theta_{ij}}{\sin \theta_{ij}} l'_{ij} = \sum \sum \frac{h'_j h_i}{2} \frac{l'_{ij}}{\sin \theta_{ij}} - \\ & - \sum \sum \frac{h'_i h_i}{2} \frac{\cos \theta_{ij}}{\sin \theta_{ij}} l'_{ij} = \sum_i h_i \frac{1}{2} \sum_j \frac{h'_j - h'_i \cos \theta_{ij}}{\sin \theta_{ij}} l'_{ij} = \sum_i h_i F(Q'_i Q'_i). \end{aligned}$$

Так на поверхности  $\mathbf{x}(u, v)$  определяется «поле вращений»  $\boldsymbol{\omega}(u, v)$ . Так как два соседних бесконечно малых куска поверхности, подобно бесконечно малым граням, как бы вращаются вокруг общего ребра, то  $d\boldsymbol{\omega}$  лежит в касательной плоскости. Это значит, что поверхность, описанная концом вектора  $\boldsymbol{\omega}(u, v)$ , так называемая «диаграмма вращений», в каждой точке имеет особенность, или ее касательная плоскость параллельна касательной плоскости данной поверхности.

Теперь рассмотрим функцию  $p(\mathbf{n}) = \mathbf{n}\boldsymbol{\omega}$ , где  $\mathbf{n}$  — нормаль к поверхности  $\mathbf{x}$ , а следовательно, и  $\boldsymbol{\omega}$ . Это  $p(\mathbf{n})$  есть расстояние от начала до касательной плоскости диаграммы вращений с нормалью  $\mathbf{n}$ . Как оказывается, функция  $p(\mathbf{n})$  подчиняется уравнению, равносильному следующему условию: если опорную функцию  $h(\mathbf{n})$  менять со скоростью  $p(\mathbf{n})$ , то гауссова кривизна в каждой точке стационарна.

То, что при этом условии деформация замкнутой выпуклой поверхности сводится к переносу, доказывается посредством тех же формул теории смешанных объемов, только переписанных для регулярных поверхностей, а не для многогранников<sup>11)</sup>.

**6.** Изложенный выше вывод теоремы о жесткости многогранника со стационарными направлениями и площадями граней дословно распространяется в пространство любой размерности  $n$ . Однако при  $n > 3$  нужно пользоваться не тем неравенством Минковского, которое было выведено в § 3 главы VIII, а другим:

$$V(P_1 P_0 \dots P_0)^2 \geq V(P_1 P_1 P_0 \dots P_0) V(P_0 \dots P_0).$$

Это неравенство выводится из неравенства Брунна. Согласно неравенству Брунна,  $f(t) = \sqrt[n]{V((1-t)P_0 + tP_1)}$  есть выпуклая функция от  $t$ . Поэтому  $f''(0) \leq 0$ . Вычисляя  $f''(0)$ , мы и получим данное квадратичное неравенство Минковского. Далее можно еще доказать, что если многогранники  $P_1$  и  $P_0$  имеют параллельные грани одного строения, то знак равенства стоит здесь только тогда, когда  $P_1$  и  $P_0$  гомотетичны.

#### § 4. ОБОБЩЕНИЯ

**1.** В отличие от случая бесконечных многогранников для замкнутых многогранников в пространстве любой размерности невозможно получить теорему, столь же общую, как теорема 1 § 2. Это видно из примера, доказывающего невозможность такого же обобщения теоремы 1 § 3 главы VI (см. п° 2 § 3 главы VI). Следовательно, в  $n$ -мерном пространстве при  $n > 3$  аналогичная теорема о жесткости будет верна лишь для каких-то специальных функций граней, стационарность которых выставляется в качестве условия жесткости. Так, например, можно доказать, что *замкнутый выпуклый многогранник со*

<sup>11)</sup>См. [7, с. 242], [244, 363]. Другая форма того же вывода дана в [245, § 93].

стационарными направлениями и площадями (т. е.  $(n - 1)$ -мерными объемами) граней будет жестким в пространстве любого числа измерений.

Доказательство основано на теории смешанных объемов и вполне аналогично данному в п<sup>о</sup> 4 § 5 доказательству этой теоремы для случая трехмерного пространства<sup>12)</sup>. Но уже вопрос о жесткости  $n$ -мерного замкнутого многогранника при условии стационарности  $(n - 2)$ -мерных площадей поверхностей его  $(n - 1)$ -мерных граней — соответственно периметрам при  $n = 3$  — остается открытым<sup>13)</sup>.

Далее, никакие аналогичные теоремы о жесткости многогранников в пространстве Лобачевского или сферическом не известны, хотя вопрос о таких теоремах может быть не лишен смысла, подобно вопросам о равенстве, поставленным в п<sup>о</sup> 4 § 6 главы VI<sup>14)</sup>.

**2.** Для регулярных поверхностей евклидова пространства можно утверждать теоремы о жесткости, аналогичные теоремам 1–3 § 2.

Пусть  $f(x, y; \mathbf{n})$  — функция единичного вектора  $\mathbf{n}$  и численных переменных  $x, y$ , определенная в области  $x \geq y$  и существенно монотонная, т. е. такая, что  $\partial f / \partial x$  и  $\partial f / \partial y$  существуют, непрерывны и положительны.

Условие, налагаемое на деформации поверхности, будет состоять в стационарности в каждой ее точке функции  $f(R_1, R_2; \mathbf{n})$ , где  $R_1, R_2$  — главные радиусы кривизны, а  $\mathbf{n}$  — нормаль в этой точке.

Самая поверхность рассматривается как огибающая своих касательных плоскостей, и деформация происходит вследствие их параллельного движения. То есть деформируемая поверхность определяется как огибающая семейства плоскостей

$$\mathbf{n}x = h(\mathbf{n}; t),$$

где  $t$  — параметр, от которого зависит деформация;  $v(\mathbf{n}) = \frac{\partial h(\mathbf{n}; 0)}{\partial t}$  есть начальная скорость движения касательных плоскостей.

Сформулируем результаты.

1) Если при описанного типа деформации замкнутой поверхности  $F$  оказывается всюду стационарной какая-либо функция  $f(R_1, R_2; \mathbf{n})$ , удовлетворяющая формулированным выше условиям, то поверхность  $F$  — жесткая.

Эта теорема доказывается в предположении кусочной аналитичности функций  $f, h, v$ . Впрочем, такие требования регулярности едва ли вызваны существом дела и могут быть существенно ослаблены, если поверхность  $F$  имеет всюду положительную кривизну. Во-

<sup>12)</sup> Сходным путем можно получить более общую теорему, беря вместо площадей граней смешанные площади  $F_i(P, \dots, P, P_1, \dots, P_m)$  граней деформируемого многогранника  $P$  и многогранников  $P_1, \dots, P_m$ , ему *аналогичных*, т. е. имеющих такое же строение и грани, соответственно параллельные граням многогранника  $P$  (как, например, куб и прямоугольные параллелепипеды; при  $m = 0$  это сводится к случаю стационарности площадей). Доказательство основано на общих свойствах смешанных объемов и на общем неравенстве между ними, которые можно найти в моей работе, цитированной в конце гл. VIII. Однако, ввиду ограничения «аналогичными» многогранниками  $P, P_1, \dots, P_m$ , результат не кажется достаточно интересным.

<sup>13)</sup> Для симплициальных  $n$ -мерных многогранников положительный ответ на этот вопрос получен в 1999 г. в [243]. — Прим. ред.

<sup>14)</sup> Здесь есть существенные различия между эллиптическим пространством (Римана) и гиперболическим (Лобачевского). Для первого вопросы проще. См. [173, гл. VI § 5], где указана важная связь бесконечно малых изгибаний в эллиптическом пространстве и в евклидовом. — Прим. В. А. Залгаллера.

обще же поверхность может и не быть выпуклой, лишь бы функция  $h(\mathbf{n}; t)$  была определена для всех  $\mathbf{n}$  и была кусочно-аналитической.

Доказательство теоремы содержится по существу в моей работе [8]. Ослабление требований регулярности можно извлечь из работы А. В. Погорелова [164].

2) Пусть конечная выпуклая поверхность  $F$  с границей имеет сферическое изображение  $S$ , содержащееся внутри полусферы. Пусть она деформируется вследствие параллельных смещений ее касательных плоскостей, причем а) касательные плоскости на границе стационарны; б) во всех точках стационарна некоторая функция  $f(R_1, R_2; \mathbf{n})$ , удовлетворяющая указанным выше условиям. Тогда поверхность в начальный момент неподвижна, т. е. скорость движения касательных плоскостей  $v(\mathbf{n}) = 0$ .

Эта теорема верна в пространстве любой размерности и доказывается, подобно теореме 3 § 2, путем рассмотрения поверхности, образованной концами векторов  $\frac{1}{v(\mathbf{n})}\mathbf{n}$ , где  $v(\mathbf{n}) = \left(\frac{\partial h(\mathbf{n}; t)}{\partial t}\right)_{t=0}$  — начальная скорость движения опорной плоскости. (Если сферическое изображение не лежит внутри полусферы, но все же содержится в полусфере, то теорема, вероятно, также верна. В иных случаях она, наверное, не выполняется.)

Обе теоремы 1, 2 сводятся к теоремам о линейных дифференциальных уравнениях в частных производных второго порядка. Действительно, радиусы кривизны  $R_1, R_2$  деформируемой поверхности выражаются известным способом через «опорную функцию»  $h(\mathbf{n}; t)$  и ее первые и вторые производные по составляющим нормали  $\mathbf{n}$  (см., например, [245, § 94]) или, что то же, по координатам  $\xi, \eta$  на сфере. Поэтому

$$f(R_1, R_2; \mathbf{n}) = \Phi(h_{\xi\xi}, h_{\xi\eta}, h_{\eta\eta}, \dots, h; \mathbf{n}).$$

Условие же стационарности будет

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{t=0} = 0. \quad (1)$$

Но

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial h_{\xi\xi}} \frac{\partial h_{\xi\xi}}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial h_{\xi\eta}} \frac{\partial h_{\xi\eta}}{\partial t} + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial t},$$

а

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}\right)_{t=0} = v.$$

Поэтому условие (1) сводится к линейному дифференциальному уравнению в частных производных относительно функции  $v(\mathbf{n}) = v(\xi, \eta)$ . Вследствие условий

$$\frac{\partial f}{\partial R_1} > 0, \quad \frac{\partial f}{\partial R_2} > 0$$

это уравнение оказывается эллиптического типа. Поэтому, в частности, теорема 2 означает единственность решения такого уравнения при заданных условиях на границе области  $S$ .

**3.** Обобщение теоремы 1 для замкнутых поверхностей в  $n$ -мерном пространстве не известно. Приходится ограничиваться специальными функциями главных радиусов кривизны.

Так, в  $n$ -мерном пространстве имеет место теорема:

*Замкнутая выпуклая поверхность — жесткая, если стационарна какая-либо элементарная симметрическая функция ее главных радиусов кривизны (произведение всех  $n - 1$*

радиусов кривизны, сумма их произведений по  $n - 2$  и т. д.). Поверхность предполагается аналитической и радиусы кривизны нигде не обращающимися в нуль. [Эти условия могут быть ослаблены, но заведомо известно, что обобщить эту теорему на произвольные выпуклые поверхности (тогда функции кривизны определяются как функции множества на сфере) невозможно.]

Доказательство этой теоремы нигде не опубликовано, но его легко получить, опираясь на некоторые общие результаты теории смешанных объемов, полученные в [4–7]. Тем же путем доказывается аналогичная теорема о жесткости замкнутой выпуклой поверхности при условии стационарности «смешанной функции кривизны» ее самой и других заданных замкнутых выпуклых поверхностей. Необходимые для доказательства понятия и факты имеются в той же работе.

---

---

## Литература

---

---

1. Адамар Ж. Элементарная геометрия, часть II. Стереометрия. М.: Учпедгиз, 1958.
2. Александров А. Д. О бесконечно малых изгибаниях нерегулярных поверхностей // Мат. сб. 1936. Т. 1, № 3. С. 307–321. (Англ. пер.: On infinitesimal bendings of nonregular surfaces // *A. D. Alexandrov. Selected Works. Part 1.* Amsterdam: Gordon & Breach, 1996. P. 1–18.)
3. Александров А. Д. Элементарное доказательство теоремы Минковского и некоторых других теорем о выпуклых многогранниках // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1937. № 4. С. 597–606. (Англ. пер.: An elementary proof of the Minkowski and some other theorems on convex polyhedra // *A. D. Alexandrov. Selected Works. Part 1.* Amsterdam: Gordon & Breach, 1996. P. 19–30.)
4. Александров А. Д. К теории смешанных объемов выпуклых тел. I. Расширение некоторых понятий теории выпуклых тел // Мат. сб. 1937. Т. 2, № 5. С. 947–972. (Англ. пер.: To the theory of mixed volumes of convex bodies. Part I: Extension of certain concepts of the theory of convex bodies // *A. D. Alexandrov. Selected Works. Part 1.* Amsterdam: Gordon & Breach, 1996. P. 31–60.)
5. Александров А. Д. К теории смешанных объемов выпуклых тел. II. Новые неравенства между смешанными объемами и их приложения // Мат. сб. 1937. Т. 2, № 6. С. 1205–1235. (Англ. пер.: To the theory of mixed volumes of convex bodies. Part II: New inequalities for mixed volumes and their applications // *A. D. Alexandrov. Selected Works. Part 1.* Amsterdam: Gordon & Breach, 1996. P. 61–98.)
6. Александров А. Д. К теории смешанных объемов выпуклых тел. III. Распространение двух теорем Минковского о выпуклых многогранниках на произвольно выпуклые тела // Мат. сб. 1938. Т. 3, № 1. С. 27–44. (Англ. пер.: To the theory of mixed volumes of convex bodies. Part III: Extension of two Minkowski theorems on convex polyhedra to all convex bodies // *A. D. Alexandrov. Selected Works. Part 1.* Amsterdam: Gordon & Breach, 1996. P. 99–118.)
7. Александров А. Д. К теории смешанных объемов выпуклых тел. IV. Смешанные дискриминанты и смешанные объемы // Мат. сб. 1939. Т. 3, № 2. С. 227–249. (Англ. пер.: To the theory of mixed volumes of convex bodies. Part IV: Mixed discriminants and mixed volumes // *A. D. Alexandrov. Selected Works. Part 1.* Amsterdam: Gordon & Breach, 1996. P. 119–144.)

8. Александров А. Д. Одна общая теорема единственности для замкнутых поверхностей // Докл. АН СССР. 1938. Т. 19, № 4. С. 233–236. (Англ. пер.: A general uniqueness theorem for closed surfaces // *A. D. Alexandrov. Selected Works. Part 1.* Amsterdam: Gordon & Breach, 1996. P. 145–148.)
9. Александров А. Д. О поверхностной функции выпуклого тела (Замечание к работе «К теории смешанных объемов выпуклых тел») // Мат. сб. 1939. Т. 6, № 1. С. 167–173. (Англ. пер.: On the area function of a convex body // *A. D. Alexandrov. Selected Works. Part 1.* Amsterdam: Gordon & Breach, 1996. P. 155–162.)
10. Александров А. Д. Применение теоремы об инвариантности области к доказательствам существования // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1939. № 3. С. 243–255.
11. Александров А. Д. О теоремах единственности для замкнутых поверхностей // Докл. АН СССР. 1939. Т. 22, № 3. С. 99–102. (Англ. пер.: Uniqueness theorems for closed surfaces // *A. D. Alexandrov. Selected Works. Part 1.* Amsterdam: Gordon & Breach, 1996. P. 149–154.)
12. Александров А. Д. Существование выпуклого многогранника и выпуклой поверхности с заданной метрикой // Мат. сб. 1942. Т. 11, № 1–2. С. 15–61.
13. Александров А. Д. Существование и единственность выпуклой поверхности с данной интегральной кривизной // Докл. АН СССР. 1942. Т. 35, № 5. С. 143–147.
14. Александров А. Д. Полные выпуклые поверхности в пространстве Лобачевского // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1945. Т. 9, № 2. С. 113–120.
15. Александров А. Д. Геометрия и топология в Советском Союзе // Успехи мат. наук. 1947. Т. 2, № 5. С. 9–92.
16. Александров А. Д. Метод склеивания в теории поверхностей // Докл. АН СССР. 1947. Т. 57, № 9. С. 863–865.
17. Александров А. Д. О работах Кон-Фоссена // Успехи мат. наук. 1947. Т. 2, № 3. С. 107–141.
18. Александров А. Д. Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. (Нем. пер.: *Alexandrov A. D. Die innere Geometrie der konvexen Flächen.* Berlin: Akademie-Verlag, 1955. Англ. пер.: *Alexandrov A. D. Selected Works. Part 2: Intrinsic Geometry of Convex Surfaces.* Boca etc.: CRC Press, 2005.)
19. Александров А. Д. Выпуклые многогранники. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. (Нем. пер.: *Aleksandrov A. D. Konvexe Polyeder.* Berlin: Akademie-Verlag, 1958. Англ. пер.: *Alexandrov A. D. Convex polyhedra.* Berlin: Springer, 2005.)
20. Александров А. Д. О заполнении пространства многогранниками // Вестн. ЛГУ. 1954. № 2. Сер. математики, физики и химии. Вып. 1. С. 33–43. (Англ. пер.: On tiling a space with polyhedra // *A. D. Alexandrov. Selected Works. Part 1.* Amsterdam: Gordon & Breach, 1996. P. 175–186.)
21. Александров А. Д. Некоторые теоремы о дифференцируемых уравнениях в частных производных второго порядка // Вестн. ЛГУ. 1954. № 8. Сер. математики, физики и химии. Вып. 3. С. 3–17.
22. Александров А. Д. Теоремы единственности для поверхностей «в целом». I // Вестн. ЛГУ. 1956. № 19. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 4. С. 5–17. (Англ. пер.: Uniqueness theorems for surfaces in the large. I // *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2.* 1962. Vol. 21. P. 341–354.)
23. Александров А. Д. Теоремы единственности для поверхностей «в целом». II // Вестн. ЛГУ. 1957. № 7. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 2. С. 15–44.

- (Англ. пер.: Uniqueness theorems for surfaces in the large. II // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1962. Vol. 21. P. 354–388.)
24. Александров А. Д. Теоремы единственности для поверхностей «в целом». III // Вестн. ЛГУ. 1958. № 7. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 2. С. 14–26. (Англ. пер.: Uniqueness theorems for surfaces in the large. III // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1962. Vol. 21. P. 389–403.)
  25. Александров А. Д., Волков Ю. А. Теоремы единственности для поверхностей «в целом». IV // Вестн. ЛГУ. 1958. № 13. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 3. С. 27–34. (Англ. пер.: Uniqueness theorems for surfaces in the large. IV // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1962. Vol. 21. P. 403–411.)
  26. Александров А. Д. Теоремы единственности для поверхностей «в целом». V // Вестн. ЛГУ. 1958. № 19. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 4. С. 5–8. (Англ. пер.: Uniqueness theorems for surfaces in the large. V // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1962. Vol. 21. P. 412–416.)
  27. Александров А. Д. Теоремы единственности для поверхностей «в целом». VI // Вестн. ЛГУ. 1959. № 1. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 1. С. 5–13.
  28. Александров А. Д. Теоремы единственности для поверхностей «в целом». VII // Вестн. ЛГУ. 1960. № 7. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 2. С. 5–13.
  29. Александров А. Д. Задача Дирихле для уравнения  $\det \|z_{ij}\| = \varphi(z_1, \dots, z_n, z, x_1, \dots, x_n)$ . I // Вестн. ЛГУ. 1958. № 1. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 1. С. 5–24. (Англ. пер.: The Dirichlet problem for the equation  $\det \|z_{ij}\| = \varphi(z_1, \dots, z_n, z, x_1, \dots, x_n)$ . Part I // A. D. Alexandrov. Selected Works. Part 1. Amsterdam: Gordon & Breach, 1996. P. 251–272.)
  30. Александров А. Д. Исследования о принципе максимума. I // Изв. вузов. Математика. 1958. № 5. С. 126–157.
  31. Александров А. Д. Исследования о принципе максимума. II // Изв. вузов. Математика. 1959. № 3. С. 3–12.
  32. Александров А. Д. Исследования о принципе максимума. III // Изв. вузов. Математика. 1959. № 5. С. 16–32.
  33. Александров А. Д. Исследования о принципе максимума. IV // Изв. вузов. Математика. 1960. № 3. С. 3–15.
  34. Александров А. Д. Исследования о принципе максимума. V // Изв. вузов. Математика. 1960. № 5. С. 16–26.
  35. Александров А. Д. Исследования о принципе максимума. VI // Изв. вузов. Математика. 1961. № 1. С. 3–20.
  36. Александров А. Д. Принцип максимума // Докл. АН СССР. 1967. Т. 173, № 2. С. 247–250. (Англ. пер.: The maximum principle // Soviet Math. Dokl. 1967. Vol. 8. P. 352–355.)
  37. Александров А. Д. Условия единственности и оценки решения задачи Дирихле // Вестн. ЛГУ. 1963. № 13. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 3. С. 5–29. (Англ. пер.: Uniqueness conditions and estimates for the solution of the Dirichlet problem // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1968. Vol. 68. P. 89–119.)
  38. Александров А. Д. Мажорирование решений линейных уравнений второго порядка // Вестн. ЛГУ. 1966. № 1. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 1.



- С. 5–25. (Англ. пер.: Majorization of solutions of second-order linear equations // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1968. Vol. 68. P. 120–143.)
39. Александров А. Д. О мажорантах решений и условиях единственности для эллиптических уравнений // Вестн. ЛГУ. 1966. № 7. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 2. С. 5–20. (Англ. пер.: Majorants of solutions and uniqueness conditions for elliptic equations // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1968. Vol. 68. P. 144–161.)
  40. Александров А. Д. Невозможность общих оценок решений и условий единственности для линейных уравнений с нормами, более слабыми, чем в  $L_n$  // Вестн. ЛГУ. 1966. № 13. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 3. С. 5–10. (Англ. пер.: The impossibility of general estimates for solutions and of uniqueness conditions for linear equations with norms weaker than in  $L_n$  // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1968. Vol. 68. P. 162–168.)
  41. Александров А. Д., Владимирова С. М. Об изгибании многогранника с твердыми гранями // Вестн. ЛГУ. 1962. № 13. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 3. С. 138–141.
  42. Александров А. Д., Залгаллер В. А. Двумерные многообразия ограниченной кривизны: (Основы внутренней геометрии поверхностей). М.; Л.: АН СССР, 1962. (Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР; Т. 63). (Англ. пер.: Alexandrov A. D., Zalgaller V. A. Intrinsic geometry of surfaces. Providence: Amer. Math. Soc., 1967.)
  43. Александров А. Д., Нецветаев Н. Ю. Геометрия: (Для педагогических институтов и педагогических специальностей университетов). М.: Наука, 1990.
  44. Александров А. Д., Погорелов А. В. Теория поверхностей и дифференциальные уравнения в частных производных // Тр. 4-го Всесоюз. мат. съезда, Ленинград, 1961 г. Л.: ЛГУ, 1963. Т. 1: Пленар. докл. С. 3–16.
  45. Александров А. Д., Сенькин Е. П. О неизгибаемости выпуклых поверхностей // Вестн. ЛГУ. 1955. № 8. Сер. математики, физики и химии. Вып. 3. С. 3–13.
  46. Александров А. Д., Сенькин Е. П. Дополнение к статье «О неизгибаемости выпуклых поверхностей» // Вестн. ЛГУ. 1956. № 1. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 1. С. 104–106.
  47. Александров А. Д., Стрельцов В. В. Оценки длины кривой на поверхности // Докл. АН СССР. 1953. Т. 93, № 2. С. 221–224.
  48. Александров В. А. Замечания к гипотезе Сабитова о стационарности объема при бесконечно малом изгибании // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 5. С. 16–24.
  49. Александров В. А. Новый пример изгибаемого многогранника // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 6. С. 1215–1224.
  50. Александров В. А. Изгибаемые многогранные поверхности // Современное естествознание: Энциклопедия. В 10 т. — Т. 3. Математика. Механика. М.: Флинта; Наука, 1999. С. 66–69.
  51. Алексеева В. Е. Бесконечно малые изгибания многогранников в пространстве Лобачевского // Вопр. глобальной геометрии. Л.: ЛГПИ им. Герцена, 1979. С. 3–7.
  52. Алексеева В. Е. Бесконечно малые изгибания бесконечных выпуклых многогранников в пространстве Лобачевского // Деп. в ВИНТИ. 1981. № 5048-81. 55 с.

53. Алексеевский Д. В., Винберг Э. Б., Солодовников А. С. Геометрия пространств постоянной кривизны // Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Фундамент. направления. Т. 29. М.: ВИНТИ, 1988. С. 5–146.
54. Андреев Е. М. О выпуклых многогранниках в пространстве Лобачевского // Мат. сб. 1970. Т. 81. С. 445–478.
55. Андреев Е. М. О выпуклых многогранниках конечного объема в пространстве Лобачевского // Мат. сб. 1970. Т. 83. С. 256–260.
56. Андрейчин Е. О бесконечных выпуклых многогранниках с заданными двугранными углами (Болгарск.) // Годичн. Софийск. унив., Фак. мат. и мех. 1977. № 68. С. 1–6.
57. Артыкбаев А. Восстановление выпуклых поверхностей по внешней кривизне в галилеевом пространстве // Мат. сб. 1982. Т. 119, № 2. С. 204–224.
58. Бакельман И. Я. К теории уравнений Монжа — Ампера // Вестн. ЛГУ. 1958. № 1. С. 25–38.
59. Бакельман И. Я. Определение выпуклой поверхности данной функцией ее главных кривизн // Докл. АН СССР. 1958. Т. 123, № 2. С. 215–218.
60. Бакельман И. Я. Об устойчивости решения уравнения Монжа — Ампера эллиптического типа // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, № 1. С. 163–170.
61. Бакельман И. Я. Геометрические методы решения эллиптических уравнений. М.: Наука, 1965.
62. Бакельман И. Я., Магомедов А. А. К вопросу о существовании бесконечных выпуклых многогранников с данными условными площадями граней // Геометрия, вып. 3. Л.: ЛГПИ им. Герцена, 1975. С. 3–14.
63. Бакельман И. Я., Понарядова Р. С. Замкнутые поверхности с заданной суммой условных радиусов кривизны // Геометрия и топология, вып. 2. Л.: ЛГПИ им. Герцена, 1974. С. 22–33.
64. Берестовский В. Н., Николаев И. Г. Многомерные обобщенные римановы пространства // Совр. проблемы математики. Фундамент. направления. Т. 70. М.: ВИНТИ, 1992. С. 190–277.
65. Берже М. Геометрия. Т. 1. М.: Мир, 1984.
66. Бернштейн С. Н. Исследование и интегрирование дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка эллиптического типа // Сообщения Харьков. мат. общества. 1907. Т. 11, № 1–2. С. 1–96.
67. Бураго Ю. Д. Существование на некомпактной поверхности полной метрики с данной кривизной // Укр. геом. сб. 1982. Т. 25. С. 8–11.
68. Бураго Ю. Д. Геометрия поверхностей в евклидовых пространствах // Совр. проблемы математики. Фундамент. направления. Т. 48. М.: ВИНТИ, 1989. С. 5–97.
69. Бураго Ю. Д., Громов М., Перельман Г. Я. Пространства А. Д. Александрова ограниченной снизу кривизны // Успехи мат. наук. 1992. Т. 47, № 2. С. 3–51.
70. Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А. Геометрические неравенства. Л.: Наука, 1980. (Англ. пер.: *Burago Yu. D., Zalgaller V. A. Geometric inequalities*. Berlin: Springer-Verlag, 1988.)
71. Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А. Изометрические кусочно-линейные погружения двумерных многообразий с многогранной метрикой в  $\mathbb{R}^3$  // Алгебра и анализ. 1995. Т. 7, № 3. С. 76–95.

72. Бушмелев А. В., Сабитов И. Х. Конфигурационные пространства октаэдров Брикара // Укр. геом. сб. 1990. Вып. 33. С. 36–41.
73. Венков Б. А. Об одном классе евклидовых многогранников // Вестн. ЛГУ. 1954. № 2. Сер. математики, физики, химии. Вып. 1. С. 11–31.
74. Верещагин Б. М. Восстановление замкнутой выпуклой поверхности по данной функции гауссовой кривизны // Вопр. глобал. геометрии. Л.: ЛГПИ им. Герцена, 1979. С. 7–12.
75. Вернер А. Л. Однозначная определенность и жесткость бесконечных полных выпуклых многогранников в пространстве Лобачевского // Вестн. ЛГУ. 1960. № 13. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 3. С. 90–93.
76. Вернер А. Л. О внешней кривизне выпуклых поверхностей в пространствах постоянной кривизны // Изв. вузов. Математика. 1960. № 1. С. 58–68.
77. Вернер А. Л. О бесконечных выпуклых поверхностях в пространстве Лобачевского // Изв. вузов. Математика. 1960. № 6. С. 50–61.
78. Вернер А. Л. Существование и единственность бесконечной полной выпуклой поверхности с данной внешней кривизной в пространстве Лобачевского // Сиб. мат. журн. 1961. Т. 2, № 1. С. 20–35.
79. Вернер А. Л. Восстановление полной выпуклой поверхности в пространстве Лобачевского по ее внешней кривизне // Учен. зап. ЛГПИ им. Герцена. 1961. Т. 218. С. 58–68.
80. Вернер А. Л. Восстановление полной выпуклой поверхности по опорной функции в пространстве Лобачевского // Вестн. ЛГУ. 1962. № 13. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 3. С. 145–148.
81. Вернер А. Л., Мисиков Б. Р. Восстановление гомеоморфной «бутылке Клейна» выпуклой поверхности по интегральной внешней кривизне в римановом пространстве постоянной кривизны // Глобал. и риманова геометрия. Л.: ЛГПИ им. Герцена, 1983. С. 3–5.
82. Владимирова С. М., Волков Ю. А. Изгибание бесконечных выпуклых поверхностей пространства Лобачевского // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1974. Т. 45. С. 56–62.
83. Волков Ю. А. О деформациях выпуклого многогранного угла // Успехи мат. наук. 1956. Т. 11, № 5. С. 209–210.
84. Волков Ю. А. Существование многогранника с данной разверткой: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Л., 1955. 47 с. (Ленингр. гос. ун-т.)
85. Волков Ю. А. Оценка изменения решения уравнения вида  $f(z_1, \dots, z_n) \det \|z_{ij}\| = h(x_1, \dots, x_n)$  в зависимости от изменения правой части // Вестн. ЛГУ. 1960. № 13. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 3. С. 5–14.
86. Волков Ю. А. Существование выпуклого многогранника с данной разверткой // Вестн. ЛГУ. 1960. № 19. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 4. С. 75–86.
87. Волков Ю. А. Устойчивость решения проблемы Минковского // Вестн. ЛГУ. 1963. № 13. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 1. С. 33–43.
88. Волков Ю. А. Оценка деформации выпуклой поверхности в зависимости от изменения ее внутренней метрики // Укр. геом. сб. 1967. Т. 5–6. С. 44–69.
89. Волков Ю. А., Мехтиев М. Г. Изгибания бесконечных выпуклых поверхностей в пространстве Лобачевского // Вестн. ЛГУ. 1968. № 19. Сер. математики, механики и астрономии. Вып. 4. С. 30–43.

90. Волков Ю. А., Оликер В. И. О единственности решения задачи Кристоффеля для незамкнутых поверхностей // *Мат. заметки*. 1970. Т. 8, № 2. С. 251–257.
91. Волков Ю. А., Подгорнова Е. Г. Существование выпуклого многогранника с данной разверткой // *Учен. зап. Ташкент. пед. ин-та*. 1971. Т. 85. С. 3–54.
92. Гайдалович В. Г., Ильхамов У., Соколов Д. Д. Замкнутые выпуклые поверхности в псевдоевклидовом пространстве // *Исслед. по геометрии «в целом» и мат. анализу*. Тр. Ин-та математики СО АН СССР. Новосибирск: Наука, 1987. С. 154–159.
93. Гаюбов Г. Однозначная определенность бесконечных поверхностей в гиперболическом пространстве // *Науч. тр. Ташкент. ун-та*. 1963. Вып. 228. С. 11–16.
94. Голузин Г. М. О методе непрерывности в теории конформных отображений // *Мат. сб.* 1938. Т. 4, № 1. С. 3–8.
95. Данелич И. А. Однозначная определенность бесконечных выпуклых многогранников в пространстве Лобачевского // *Мат. сб.* 1954. Т. 35, № 3. С. 569–573.
96. Делоне Б. Н. Петербургская школа теории чисел. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1947.
97. Делоне Б. Н., Падуров Н. Н., Александров А. Д. Математические основы структурного анализа кристаллов. М.; Л.: Гостехиздат, 1934.
98. Дискант В. И. Уточнения изопериметрического неравенства и теоремы устойчивости в теории выпуклых тел // *Тр. Ин-та математики СО АН СССР*. Новосибирск, 1989. Т. 14. С. 98–132.
99. Дмитриева Л. Д. Обобщенная задача Кристоффеля для замкнутых поверхностей // *Учен. зап. ЛГПИ им. Герцена*. 1970. Т. 395. С. 185–202.
100. Дмитриева Л. Д. Обобщенная задача Кристоффеля для незамкнутых поверхностей // *Учен. зап. ЛГПИ им. Герцена*. 1970. Т. 395. С. 203–213.
101. Долбилин Н. П., Штанько М. А., Штогрин М. И. Неизгибаемость квадрильяжа сферы // *Докл. РАН*. 1997. Т. 354, № 4. С. 443–445.
102. Долбилин Н. П., Штанько М. А., Штогрин М. И. Неизгибаемость квадрильяжа тора // *Успехи мат. наук*. 1999. Т. 54, № 4. С. 167–168.
103. Ефимов Н. В. Высшая геометрия. 6-е изд. М.: Наука, 1978. (Англ. пер.: N. V. Efimov. Higher geometry. Moscow: Mir, 1980.)
104. Ефимов Н. В. Качественные вопросы теории деформации поверхностей // *Успехи мат. наук*. 1948. Т. 3, № 2. С. 47–158. (Англ. пер.: Qualitative problems of the theory of deformation of surfaces // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1951. Vol. 37. P. 274–423.)
105. Ефимов Н. В. Некоторые предложения о жесткости и неизгибаемости // *Успехи мат. наук*. 1952. Т. 7, № 5. С. 215–224.
106. Житомирский О. К. Verschärfung eines Satzes von Woronoi // *Журн. Ленингр. мат. о-ва*. 1929. С. 131–151.
107. Залгаллер В. А. О деформациях многоугольника на сфере // *Успехи мат. наук*. 1956. Т. 11, № 5. С. 177–178.
108. Залгаллер В. А. Выпуклые многогранники с регулярными гранями // *Зап. науч. семинаров ЛОМИ*. 1967. Т. 2. С. 1–221. (Англ. пер.: Zalgaller V. A. Convex polyhedra with regular faces // *Sem. Steklov Math. Inst., Leningrad*. Vol. 2. New York: Consult. Bureau, 1969. P. 1–95.)
109. Залгаллер В. А. Непрерывно изгибаемый многогранник // *Квант*. 1978. № 9. С. 13–19.

110. Залгаллер В. А. Некоторые изгибания длинного цилиндра // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 1997. Т. 246. С. 66–83.
111. Зильберберг А. А. О существовании конечных выпуклых многогранников с данной границей и заданными кривизнами вершин // Изв. АН КазССР. Сер. мат. и мех. 1962. Т. 10. С. 30–40.
112. Зильберберг А. А. О существовании замкнутых выпуклых многогранников с произвольными заданными кривизнами вершин // Успехи мат. наук. 1962. Т. 17, № 4. С. 119–126.
113. Зильберберг А. А. О существовании замкнутых выпуклых многогранников с заданными кривизнами вершин в  $n$ -мерных пространствах Евклида и Лобачевского // Вестн. Ленингр. ун-та. 1963. № 1. С. 48–52.
114. Зильберберг А. А. О существовании замкнутой выпуклой поверхности с топологически перенесенной на сферу интегральной кривизной // Тр. Сектора мат. и мех. АН КазССР. 1963. № 2. С. 73–77.
115. Иванова-Каратопраклиева И., Сабитов И. Х. Изгибание поверхностей. I // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. М.: ВИНТИ. 1991. Т. 23. С. 131–184.
116. Иванова-Каратопраклиева И., Сабитов И. Х. Изгибание поверхностей. II // Итоги науки и техники. Совр. математика и ее приложения. Тематич. обзоры. М.: ВИНТИ, 1995. С. 108–167.
117. Иванова-Каратопраклиева И., Марков П. Е., Сабитов И. Х. Изгибание поверхностей. III // Фунд. прикл. мат. 2006. Т. 12, № 1. С. 3–56.
118. Ильхамов У., Соколов Д. Д. Реализуемость чечевицеобразных многогранников в псевдоевклидовом пространстве // Вестн. МГУ, сер. 1. 1990. № 2. С. 3–6.
119. Каган А. Е. Оценка деформации замкнутой выпуклой поверхности при изменении ее кривизны // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. 1967. Т. 45. С. 83–110.
120. Каплунович Г. Я. Существование выпуклой поверхности с данной интегральной кривизной в эллиптическом пространстве и разрешимость уравнений Монжа — Ампера // Докл. АН СССР. 1981. Т. 257, № 5. С. 1052–1055.
121. Кишуков Х. М. Еще раз об оценках нормальных кривизн для поверхностей с данной внешней кривизной в римановом многообразии // Глобалн. и риманова геометрия. Л.: ЛГПИ им. Герцена, 1983. С. 112–127. См. также серию депонированных в ВИНТИ работ: № 2605–82, 11 с.; № 2606–82, 13 с.; № 6284–В87, 10 с.; № 6285–В87, 6 с.
122. Климентов С. Б. О строении множества решений основных уравнений теории поверхностей // Укр. геом. сб. 1982. Т. 25. С. 69–82.
123. Климентов С. Б. Об одном способе построения решений краевых задач теории изгибаний поверхностей положительной кривизны // Укр. геом. сб. 1986. Т. 29. С. 56–82.
124. Кокарев В. Н. Существование замкнутой выпуклой гиперповерхности в  $E^{n+1}$  с заданной  $k$ -й элементарной симметрической функцией ее условных радиусов кривизны // Геометрия, вып. 5. Л.: ЛГПИ им. Герцена, 1976. С. 60–68.
125. Кокарев В. Н. Существование замкнутой выпуклой гиперповерхности в  $E^{n+1}$  с заданной  $k$ -й элементарной симметрической функцией ее условных радиусов кривизны // Укр. геом. сб. 1988. Т. 31. С. 62–72.

126. Кон-Фоссен С. Э. Изгибаемость поверхностей в целом // Успехи мат. наук. 1936. Вып. 1. С. 33–76.
127. Кон-Фоссен С. Э. Нежесткие замкнутые поверхности // Некоторые вопросы дифференциальной геометрии в целом. М.: Физматгиз, 1959. С. 87–114.
128. Кричевер И. М., Фоменко В. Т. О локальной  $\Sigma$ -реализации метрик положительной кривизны в евклидовом пространстве // Успехи мат. наук. 1986. Т. 41, № 6. С. 173–174.
129. Лейбин А. С. Об изгибаемости выпуклых поверхностей с краем // Успехи мат. наук. 1950. Т. 5, № 5. С. 149–150.
130. Люстерник Л. А. Выпуклые фигуры и многогранники. М.: Гостехиздат, 1956. (Англ. пер.: L. A. Lusternik. Convex figures and polyhedra. New York: Dover Publications, 1963.)
131. Магомедов А. А. Выпуклые многогранники с заданными условными кривизнами вершин // Геометрия и топология. Вып. 2. Л.: ЛГПИ им. Герцена, 1974. С. 128–138.
132. Магомедов А. А. Выпуклые многогранники с данными площадями граней // Геометрия и топология. Л.: ЛГПИ им. Герцена, 1976. Вып. 5. С. 79–86.
133. Максимов И. Г. Подвески: объемы, погружаемость и жесткость // Мат. заметки. 1994. Т. 56, № 6. С. 56–63.
134. Максимов И. Г. Неизгибаемые многогранники с малым числом вершин // Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т. 12, № 1. С. 143–165.
135. Максимов И. Г., Сабитов И. Х. О понятии комбинаторной  $p$ -параметричности многогранников // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 4. С. 823–839.
136. Медяник А. И. Некоторые теоремы единственности для замкнутых выпуклых поверхностей четырехмерного евклидова пространства // Вестн. Харьков. ун-та. 1965. Т. 3. С. 75–81.
137. Медяник А. И. О центральной симметрии замкнутой строго выпуклой поверхности // Укр. геом. сб. 1976. Т. 2. С. 52–58.
138. Медяник А. И. Одна общая теорема единственности для аналитических замкнутых выпуклых гиперповерхностей  $n$ -мерного евклидова пространства // Укр. геом. сб. 1970. Т. 5–6. С. 115–117.
139. Медяник А. И. Одно обобщение теоремы единственности А. Д. Александрова для замкнутых выпуклых многогранников на случай  $n$ -мерного пространства // Укр. геом. сб. 1970. Т. 8. С. 91–94.
140. Медяник А. И. Модель многогранника Коннели // Квант. 1979. № 7. С. 39.
141. Медяник А. И. О сводимости общей задачи существования для замкнутых выпуклых поверхностей к уравнению К. Миранда // Укр. геом. сб. 1986. Т. 29. С. 103–112.
142. Медяник А. И. Теоремы существования для регулярных замкнутых выпуклых поверхностей // Укр. геом. сб. 1991. Т. 34. С. 69–80.
143. Милка А. Д. Аналог формулы Бляшке для выпуклых многогранников // Укр. геом. сб. 1965. Т. 1. С. 62–64.
144. Милка А. Д. Об одной теореме Шура — Шмидта // Укр. геом. сб. 1970. Т. 8. С. 95–102.
145. Милка А. Д. К одной гипотезе Стокера // Укр. геом. сб. 1970. Т. 9. С. 85–86.

146. Милка А. Д. О непрерывных изгибаниях выпуклых поверхностей // Укр. геом. сб. 1973. Т. 13. С. 129–141.
147. Милка А. Д. Однозначная определенность общих замкнутых поверхностей в пространстве Лобачевского // Укр. геом. сб. 1980. Т. 23. С. 99–107.
148. Милка А. Д. Однозначная определенность общих замкнутых поверхностей в псевдоевклидовом сферическом пространстве // Укр. геом. сб. 1986. Т. 29. С. 113–118.
149. Милка А. Д. Что такое геометрия «в целом». М.: Знание, 1986. Сер. Матем. и киберн. № 12.
150. Милка А. Д. Нежесткие звездчатые бипирамиды А. Д. Александрова и С. М. Владимировой // Труды по анализу и геометрии. Новосибирск: Ин-т мат-ки им. С. Л. Соболева, 2000. С. 414–430. (Англ. пер.: *A. D. Milka. Nonrigid star-like bipyramids of A. D. Alexandrov and S. M. Vladimirova // Sib. Adv. Math. 2002. Vol. 12, no. 2. P. 56–72.*)
151. Мисиков Б. Р. Существование и единственность неодносвязной выпуклой гиперповерхности с данной кривизной // Вопросы дифф. геометрии в целом. Л.: ЛГПИ им. Герцена, 1983. С. 86–91.
152. Михалёв С. Н. Некоторые необходимые метрические условия изгибаемости подвесок // Вестн. МГУ, сер. 1. 2001. Т. 56, № 3. С. 15–21.
153. Михалёв С. Н. Изометрические вложения октаэдров Брикара 1-го и 2-го типов с заданным объемом // Фунд. прикл. мат. 2002. Т. 8, № 3. С. 755–768.
154. Николаев И. Г., Шефель С. З. Гладкость выпуклых поверхностей на основе дифференциальных свойств конформных отображений // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 6. С. 77–89.
155. Оликер В. И. Существование полных обобщенных огибающих с заданной суммой главных радиусов кривизны // Учен. зап. ЛГПИ им. Герцена. 1970. Т. 395. С. 231–255.
156. Оловянишников С. П. Об изгибании бесконечных выпуклых поверхностей // Мат. сб. 1946. Т. 18, № 3. С. 429–440.
157. Оловянишников С. П. Обобщение теоремы Коши о выпуклых многогранниках // Мат. сб. 1946. Т. 18, № 3. С. 441–446.
158. Павлова О. В. Объем подвески как функция длин ее ребер // Успехи мат. наук. 1995. Т. 50, № 4. С. 165–166.
159. Пак И. М. Короткое доказательство жесткости выпуклых многогранников // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 4. С. 859–864.
160. Панина Г. Ю. Смешанные объемы многогранных функций // Алгебра и анализ. 1996. Т. 6, № 6. С. 1209–1217.
161. Панина Г. Ю. Виртуальные многогранники и классические вопросы геометрии // Алгебра и анализ. 2002. Т. 14, № 5. С. 152–170.
162. Перлова Н. Г. О соотношении между жесткостью  $n$ -го порядка и аналитической неизгибаемостью // Укр. геом. сб. 1991. Т. 34. С. 98–104.
163. Перлова Н. Г. О связи между жесткостью порядка  $k > 3$  и аналитической неизгибаемостью поверхностей класса  $C^1$  // Мат. физика, анализ и геом. 1995. Т. 2, № 3/4. С. 456–461.
164. Погорелов А. В. Одна общая теорема для бесконечных выпуклых многогранников // Докл. АН СССР. 1948. Т. 62, № 2. С. 167–169.

165. Погорелов А. В. Распространение общей теоремы единственности А. Д. Александрова на случай неаналитических поверхностей // Докл. АН СССР. 1948. Т. 62, № 3. С. 297–299.
166. Погорелов А. В. Однозначная определенность выпуклых поверхностей // Тр. Мат. ин-та им. Стеклова. 1949. Т. 29. С. 1–100.
167. Погорелов А. В. Изгибание выпуклых поверхностей. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950.
168. Погорелов А. В. Однозначная определенность общих выпуклых поверхностей. Киев: Изд-во АН УССР, 1952.
169. Погорелов А. В. Об устойчивости изолированных ребристых точек на выпуклой поверхности // Успехи мат. наук. 1953. Т. 8, № 3. С. 131–134.
170. Погорелов А. В. Новое доказательство неизгибаемости выпуклых многогранников // Успехи мат. наук. 1956. Т. 11, № 5. С. 207–208.
171. Погорелов А. В. Об уравнениях Монжа — Ампера эллиптического типа. Харьков: Изд-во ХГУ, 1960.
172. Погорелов А. В. Одна общая теорема существования для замкнутых выпуклых многогранников // Докл. АН СССР. 1967. Т. 173, № 3. С. 526–528.
173. Погорелов А. В. Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М.: Наука, 1969. (Англ. пер.: A. V. Pogorelov. Extrinsic geometry of convex surfaces. Providence: AMS, 1973.)
174. Погорелов А. В. Многомерная проблема Минковского. М.: Наука, 1975. (Англ. пер.: A. V. Pogorelov. The Minkowski multidimensional problem. New York: John Wiley & Sons, 1978.)
175. Погорелов А. В. Многомерное уравнение Монжа — Ампера  $\det \|z_{ij}\| = \varphi(z_1, \dots, z_n, z, x_1, \dots, x_n)$ . М.: Наука, 1988.
176. Погорелов А. В. Решение одной проблемы А. Д. Александрова // Докл. АН СССР. 1998. Т. 360, № 3. С. 317–319.
177. Погорелов А. В. О теоремах единственности для замкнутых выпуклых поверхностей // Докл. АН СССР. 1999. Т. 366, № 5. С. 602–604.
178. Позняк Э. Г. Нежесткие замкнутые многогранники // Вестн. МГУ. Сер. мат., мех. 1960. Т. 3. С. 14–19.
179. Пухликов А. В., Хованский А. Г. Конечно-аддитивные меры виртуальных многогранников // Алгебра и анализ. 1992. Т. 2, № 2. С. 161–185.
180. Решетняк Ю. Г. Изотермические координаты в многообразиях ограниченной кривизны. I // Сиб. мат. журн. 1960. Т. 1, № 1. С. 88–116.
181. Решетняк Ю. Г. Изотермические координаты в многообразиях ограниченной кривизны. II // Сиб. мат. журн. 1960. Т. 1, № 2. С. 248–276.
182. Решетняк Ю. Г. Интегрирование по выпуклому многограннику и некоторые вопросы теории линейных неравенств // Докл. АН СССР. 1960. Т. 130, № 5. С. 981–983.
183. Решетняк Ю. Г. О нежестких поверхностях вращения // Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, № 4. С. 591–604.
184. Решетняк Ю. Г. Двумерные многообразия ограниченной кривизны // Совр. проблемы математики. Фундам. направления. Т. 70. М.: ВИНТИ, 1989. С. 7–189.
185. Розенсон Н. А. О римановых пространствах класса I. Ч. I // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1940. Т. 4, № 2. С. 181–192.



186. Розенсон Н. А. О римановых пространствах класса I. Ч. II // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1941. Т. 5, № 4–5. С. 325–352.
187. Розенсон Н. А. О римановых пространствах класса I. Ч. III // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1943. Т. 7, № 6. С. 253–284.
188. Сабитов И. Х. Регулярность выпуклых поверхностей с регулярной в классах Гёльдера метрикой // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, № 4. С. 907–915.
189. Сабитов И. Х. Описание изгибаний вырождающихся подвесок // Мат. заметки. 1983. Т. 33, № 6. С. 901–904.
190. Сабитов И. Х. Алгоритмическая проверка изгибаемости подвесок // Укр. геом. сб. 1987. Т. 30. С. 109–112.
191. Сабитов И. Х. Локальная теория изгибания поверхностей // Совр. проблемы математики. Фундам. направления. Т. 48. М.: ВИНТИ, 1989. С. 196–270.
192. Сабитов И. Х. Новые классы неизгибаемых многогранников // Всесоюз. конф. по геом. и анализу. Тез. Новосибирск: Ин-т мат-ки СО АН СССР, 1989. С. 72.
193. Сабитов И. Х. О связях между бесконечно малыми изгибаниями разных порядков // Укр. геом. сб. 1992. Т. 35. С. 118–124.
194. Сабитов И. Х. Алгоритм для проверки изгибаемости многогранника // Вестн. МГУ, сер. 1. 1994. Т. 49, № 2. С. 56–61.
195. Сабитов И. Х. К проблеме инвариантности объема изгибаемого многогранника // Успехи мат. наук. 1995. Т. 50, № 2. С. 223–224.
196. Сабитов И. Х. Объем многогранника как функция его метрики // Фунд. прикл. мат. 1996. Т. 2, № 4. С. 1235–1246.
197. Сабитов И. Х. Доказательство гипотезы «кузнечных мехов» для многогранников малого топологического рода // Докл. РАН. 1998. Т. 358, № 6. С. 743–746.
198. Сабитов И. Х. Обобщенная формула Герона — Тарталья и некоторые ее следствия // Мат. сб. 1998. Т. 189, № 10. С. 105–134.
199. Сабитов И. Х. Объемы многогранников. Библиотека «Математическое просвещение». М.: МЦНМО, 2002.
200. Сабитов И. Х. Алгоритмическое решение проблемы изометрической реализации двумерных многогранных метрик // Изв. РАН. Сер. математики. 2002. Т. 66, № 2. С. 159–172.
201. Сабитов И. Х. Вокруг доказательства леммы Лежандра — Коши о выпуклых многоугольниках // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 4. С. 892–919.
202. Сабитов И. Х., Шефель С. З. О связи между порядками гладкости поверхности и ее метрики // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, № 4. С. 916–925.
203. Саканян М. А. Существование гиперповерхности с данной суммой главных радиусов кривизны в пространстве Лобачевского // Геометрия. Вып. 6. Л.: ЛГПИ им. Герцена, 1977. С. 94–101.
204. Саложников Б. Д. О краевых задачах для линейных эллиптических уравнений на сфере, связанных с задачей Кристоффеля // Учен. зап. ЛГПИ им. Герцена. 1972. Вып. 541. С. 166–172.
205. Сенькин Е. П. Однозначная определенность выпуклых многогранников // Успехи мат. наук. 1956. Т. 11, № 5. С. 211–213.
206. Сенькин Е. П. Об устойчивости ширины общей замкнутой выпуклой поверхности в зависимости от изменения интегральной средней кривизны // Укр. геом. сб. 1966. Вып. 3. С. 93–94.

207. Сенькин Е. П.  $n$ -мерный аналог теоремы С. П. Оловянишникова // Укр. геом. сб. 1968. Вып. 5–6. С. 147–149.
208. Сенькин Е. П. Изгибание выпуклых поверхностей // Проблемы геометрии. Т. 10. М.: ВИНТИ, 1978. С. 193–222.
209. Соколов Д. Д. О двумерных выпуклых поверхностях с дефинитной метрикой в трехмерном псевдоевклидовом пространстве // Труды геом. семинара. Т. 6. М.: ВИНТИ, 1974. С. 277–293.
210. Соколов Д. Д. Поверхности в псевдоевклидовом пространстве // Проблемы геометрии. Т. 11. М.: ВИНТИ, 1980. С. 177–201.
211. Таскараев А. О неподвижных точках для одного оператора в конце пространства  $S(G)$  // Мат. анализ и алгебра. Ташкент, 1986. С. 69–71.
212. Троценко Д. А. О нежестких аналитических поверхностях вращения // Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21, № 5. С. 100–108.
213. Трушкина В. И. Метод трехцветного раскрашивания графов // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 2. С. 186–200.
214. Усманов З. Д. Бесконечно малые изгибания поверхностей положительной кривизны с точкой уплощения // Banach center public. 1984. Vol. 12. P. 241–272.
215. Фёдоров Е. С. Начала учения о фигурах. М.: Изд-во АН СССР, 1953.
216. Филимонова А. П. Восстановление замкнутой выпуклой поверхности в пространстве Лобачевского по гауссовой кривизне как функции точки пространства // Деп. в ВИНТИ. 1981. № 1038–81. 16 с.
217. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. 7-е изд. Т. 1. М.: Наука, 1970.
218. Фоменко В. Т. Некоторые результаты теории бесконечно малых изгибаний поверхностей // Мат. сб. 1967. Т. 72, № 3. С. 388–411.
219. Фоменко В. Т. О жесткости выпуклых поверхностей с отороченным краем // Мат. заметки. 1979. Т. 26, № 1. С. 123–128.
220. Фоменко В. Т. Непрерывные изгибания выпуклых поверхностей с граничными условиями // Мат. сб. 1979. Т. 110, № 4. С. 493–504.
221. Фоменко В. Т. О  $\Sigma$ -реализациях метрик положительной кривизны // Мат. сб. 1982. Т. 117, № 4. С. 523–533.
222. Шефель С. З. Вполне регулярные изометрические погружения в евклидово пространство // Сиб. мат. журн. 1970. Т. 11, № 2. С. 442–460.
223. Шефель С. З. О гладкости решения задачи Минковского // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18, № 2. С. 472–475.
224. Шор Л. А. Об изгибании выпуклых многогранников с границей // Мат. сб. 1958. Т. 45, № 4. С. 471–488.
225. Шор Л. А. Пример неизгибаемой выпуклой поверхности, предельной для ей изометричных // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, № 4. С. 193–198.
226. Шор Л. А. Пример дисконтинуума нетривиально изометричных между собой выпуклых поверхностей // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, № 5. С. 157–160.
227. Шор Л. А. Об изгибаемости многосвязных выпуклых поверхностей // Успехи мат. наук. 1960. Т. 15, № 5. С. 199–202.
228. Шор Л. А. Об изгибаемости выпуклых многогранников с разрезом // Укр. мат. журн. 1964. Т. 16, № 4. С. 513–520.

- 
229. *Шор Л. А.* Об изгибаемости выпуклых поверхностей с краем // Укр. геом. сб. 1968. Вып. 5–6. С. 177–196.
230. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия. М.: ГИИЛ, 1948.
231. *Alexander R.* Lipschitzian mappings and total mean curvature of polyhedral surfaces. I // Trans. Am. Math. Soc. 1985. Vol. 288. P. 661–678.
232. *Alexandrov A. D.* Additive set-functions in abstract spaces // Мат. сб. 1943. Т. 13, № 2–3. С. 169–234.
233. *Alexandrov A. D.* A characteristic property of spheres // Ann. Math. Pura ed Appl. 4 Ser. 1962. Vol. 58. P. 303–315.
234. *Alexandrov V.* An example of a flexible polyhedron with nonconstant volume in the spherical space // Beitr. Algebra Geom. 1997. Vol. 38, no. 1. P. 11–18.
235. *Alexandrov V.* Sufficient conditions for the extendibility of an  $n$ -th order flex of polyhedra // Beitr. Algebra Geom. 1998. Vol. 39, no. 2. P. 367–378.
236. *Alexandrov V.* Implicit function theorem for systems of polynomial equations with vanishing Jacobian and its application to flexible polyhedra and frameworks // Monatsh. Math. 2001. Vol. 132, no. 4. P. 269–288.
237. *Alexandrov V.* Flexible polyhedra in Minkowski 3-space // Manuscripta Math. 2003. Vol. 111, no. 3. P. 341–356.
238. *Almgren F. J., Rivin I.* The mean curvature integral is invariant under bending // The Epstein Birthday Schrift. Warwick: University of Warwick, 1998. P. 1–21.
239. *Amur K.* On a characterization of the 2-sphere // Amer. Math. Mon. 1971. Vol. 78, no. 4. P. 382–383.
240. *Bakel'man I. Ya.*  $R$ -Curvatures and stability of solutions of the Dirichlet problem for elliptic equations // J. Diff. Equations. 1982. Vol. 43, no. 1. P. 106–133.
241. *Bakel'man I. Ya.* Generalized elliptic solutions of the Dirichlet problem for  $n$ -dimensional Monge–Ampère equations. I // Proc. Symp. Pure Math. Vol. 45. Providence: AMS, 1986. P. 73–102.
242. *Barnette D. W.* On Steinitz's theorem concerning convex 3-polytopes and some properties of planar graphs // Lect. Notes Math. 1969. Vol. 110. P. 27–40.
243. *Bauer C.* Infinitesimal rigidity of convex polytopes // Discrete Comput. Geom. 1999. Vol. 22, no. 2. P. 177–192.
244. *Blaschke W.* Ein Beweis für die Unverbiegbarkeit geschlossener konvexer Flächen // Nachr. König. Gesellsch. Wiss. zu Göttingen; Math.-phys. Klasse. 1912. H. 5. S. 607–610.
245. *Blaschke W.* Vorlesungen über Differentialgeometrie und geometrische Grundlagen Einsteins Relativitätstheorie. I. Elementare Differentialgeometrie. 3 Aufl. Berlin: Springer, 1930. (Рус. пер.: *Бляшке В.* Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна. М.: ОНТИ, 1935.)
246. *Blaschke W., Herglotz G.* Verwirklichung einer geschlossenen Fläche mit vorgeschriebenen Bogenelement im Euklidischen Raum // Sitz. Berichte Bayer Akad. Wiss. 1937. H. 2. S. 229–230.
247. *Bleecker D. D.* Volume increasing isometric deformations of convex polyhedra // J. Diff. Geom. 1996. Vol. 43, no. 3. P. 505–526.

- 
248. *Bobenko A. I., Izmestiev I.* Alexandrov's theorem, weighted Delaunay triangulations, and mixed volumes // <http://arxiv.org/math.DG/0609447>
249. *Bolker E., Roth B.* When is a bitartite graph a rigid framework? // *Pacific J. Math.* 1980. Vol. 90. P. 27–44.
250. *Bonnesen T., Fenchel W.* Theorie der konvexen Körper. Berlin: Springer, 1934. (Рус. пер.: *Боннезен Т., Фенхель В.* Теория выпуклых тел. М.: Фазис, 2002.)
251. *Bricard R.* Memoire sur la théorie de l'octaèdre articulé // *J. Math. Pures Appl.* 1897. Т. 3. P. 113–148.
252. *Brunn H.* Über Ovale und Eiflächen. Inaug. Diss., München, 1887.
253. *Busemann H., Feller W.* Krümmungseigenschaften konvexer Flächen // *Acta Math.* 1935. Bd 66. S. 1–47.
254. *Cauchy A.* Sur les polygones et polyèdres. Second Memoir // *J. École Polytech.* 1813. Т. 9. P. 87–99; *Oeuvres.* Т. 1. Paris, 1905. P. 26–38.
255. *Cheng S. Y., Yau S. T.* On the regularity of the solution of the  $n$ -dimensional Minkowski problem // *Comm. Pure Appl. Math.* 1976. Vol. 29, no. 5. P. 495–516.
256. *Christoffel E. B.* Über die Bestimmung der Gestalt einer krümmen Oberfläche durch lokale Messungen auf derselben // *J. Reine Angew. Math.* 1985. Н. 64. S. 193–209.
257. *Connelly R.* An attack on rigidity. I, II // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1975. Vol. 81, no. 3. P. 566–569. (Полное изложение: *Prepr. Cornell Univ.* 1974; рус. пер.: *Коннелли Р.* Некоторые предположения и нерешенные вопросы в теории изгибаний // *Колмогоров А. Н., Новиков С. П.* (ред.) Исследования по метрической теории поверхностей. М.: Мир, 1980. С. 164–209.)
258. *Connelly R.* An immersed polyhedral surface which flexes // *Indiana University Math. J.* 1976. Vol. 25, no. 10. P. 965–972.
259. *Connelly R.* A counterexample to the rigidity conjecture for polyhedra // *Publ. Math. IHES.* 1977. Vol. 47. P. 333–337.
260. *Connelly R.* A flexible sphere // *Math Intelligence.* 1978. Vol. 1, no. 3. P. 130–131.
261. *Connelly R.* The rigidity of polyhedral surfaces // *Math. Mag.* 1979. Vol. 52, no. 5. P. 275–283.
262. *Connelly R.* Conjectures and open questions in rigidity // *Proc. Int. Congr. Math., Helsinki, 1978.* Vol. 1. 1980. P. 407–414. (Рус. пер. одноименного препр.: *Коннелли Р.* Некоторые предположения и нерешенные вопросы в теории изгибаний // *Колмогоров А. Н., Новиков С. П.* (ред.) Исследования по метрической теории поверхностей. М.: Мир, 1980. С. 228–238.)
263. *Connelly R.* The rigidity of certain cabled frameworks and the second order rigidity of arbitrarily triangulated convex surfaces // *Adv. Math.* 1980. Vol. 37, no 3. P. 272–299.
264. *Connelly R.* Rigidity // *Gruber P. M.* (ed.) et al. Handbook of convex geometry. Vol. A. Amsterdam: North-Holland, 1993. P. 223–271.
265. *Connelly R.* Structures in hyperbolic space // *Prekopa A.* (ed.) et al. Non-Euclidean geometries. Janos Bolyai memorial volume. Intern. Conf. on Hyperbolic Geometry, Budapest, Hungary, July 2002. New York: Springer, 2006. P. 189–196.
266. *Connelly R., Sabitov I., Walz A.* The bellows conjecture // *Beitr. Algebra Geom.* 1997. Vol. 38, no. 1. P. 1–10.

267. *Connelly R., Servatius H.* Higher-order rigidity — what is the proper definition? // *Discr. Comput. Geom.* 1994. Vol. 11, no. 2. P. 193–200.
268. *Connelly R., Whiteley W.* Second-order rigidity and prestress stability for tensegrity frameworks // *SIAM J. Discrete Math.* 1996. Vol. 9, no. 3. P. 453–491.
269. *Danzer L., Grünbaum B., Klee V.* Helly's theorem and its relatives // *Convexity. Proc. Symp. Pure Math.* Providence: AMS, 1963. Vol. 7. P. 101–180.
270. *Dehn M.* Über die Starrheit konvexer Polyeder // *Math. Ann.* 1916. Bd 77. S. 466–473. (Рус. пер.: *Ден М.* О жесткости выпуклых многогранников // *Успехи мат. наук.* 1936. Вып. 2. С. 72–79.)
271. *Delanoë Ph.* Plongements  $S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  à courbure de Gauss positive prescrite // *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., IV. Sér.* 1985. T. 18. P. 635–649.
272. *Efimov N. V.* Flächenverbiegung im Grossen, mit einem Nachtrag von E. Rembs und K. P. Grotemeyer. Berlin: Akad.-Verlag, 1957.
273. *Egloff W.* Eine Bemerkung zu Cauchy's Satz über die Starrheit konvexer Vielfläche // *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg.* 1956. H. 20, no. 3–4. S. 253–256.
274. *Egorychev G. P.* The solution of van der Waerden's problem for permanents // *Adv. Math.* 1981. No. 3. P. 299–305.
275. *El-Etriby A. M.* Some existence theorems of convex polyhedra // *J. Natur. Sci. and Math.* 1983. Vol. 23, no. 1. P. 43–48.
276. *Federico P. J.* The number of polyhedra // *Philips Res. Reports.* 1975. Vol. 30. P. 220–231.
277. *Fenchel W.* Inégalités quadratiques entre les volumes mixtes des corps convexes // *C. R. Acad. Sci. Paris.* 1936. T. 203. P. 647–650.
278. *Fenchel W.* A congruence theorem for convex polyhedra // *Math. Tidsskr. A.* 1949. P. 35–43.
279. *Fogelsanger A.* The generic rigidity of minimal cycles // *Prepr. Cornell Univ.* 1987. 60 p.
280. *Gardner R. J.* The Brunn–Minkowski inequality // *Bull. Am. Math. Soc.* 2002. Vol. 39, no. 3. P. 355–405.
281. *Gario P.* Il teorema di Cauchy sulla rigidità dei poliedri convessi // *Archimede.* 1981. Vol. 33, no 1–2. P. 53–69.
282. *Gilbarg D., Trudinger N. S.* Elliptic partial differential equations of second order. Berlin: Springer, 1983.
283. *Gluck H.* Almost all simply connected closed surfaces are rigid // *Lect. Notes Math.* 1975. Vol. 438. P. 225–239. (Рус. пер.: *Глюк Г.* Почти все односвязные замкнутые поверхности жесткие // *Колмогоров А. Н., Новиков С. П.* (ред.) *Исследования по метрической теории поверхностей.* М.: Мир, 1980. С. 148–163.)
284. *Gluck H.* Manifolds with preassigned curvature // *Bull. Am. Math. Soc.* 1976. Vol. 81, no. 2. P. 313–329.
285. *Cluck H., Krigelman K., Singer D.* The converse to the Gauss–Bonnet theorem in *PL* // *J. Diff. Geom.* 1974. Vol. 9, no. 4. P. 606–616.
286. *Graver J., Servatius B., Servatius H.* *Combinatorial Rigidity.* Providence: AMS, 1993.
287. *Groemer H.* Stability properties of geometric inequalities // *Am. Math. Mon.* 1990. Vol. 97, no. 5. P. 382–394.

- 
288. Gromov M. Convex sets and Kahler manifolds // *Tricerri F.* (ed.) *Advances in differential geometry and topology*. Singapore: World Scientific, 1990. P. 1–38.
289. Grünbaum B. *Convex polytopes*. 2nd ed. New York: Springer, 2003.
290. Hartman P. On the maximum principles of A. D. Alexandrov in the uniqueness theory for hypersurfaces // *Arch. Rat. Mech. and Anal.* 1980. Vol. 74, no. 4. P. 319–333.
291. Hartman P., Wintner A. On the third fundamental form of a surface // *Am. J. Math.* 1953. Vol. 75. P. 298–334.
292. Hellwig G. Über die Verbiegbarkeit von Flächenstücken mit positiver Gaußscher Krümmung // *Arch. Math.* 1955. Bd 6, no. 3. S. 243–249.
293. Helly E. Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten // *Jahresber. Deutsch. Math. Verein.* 1923. H. 32. S. 175–176.
294. Herglotz G. Über die Starrheit der Eiflächen // *Abh. Math. Semin. Hansischen Univ.* 1943. Bd 15. S. 127–129.
295. Hodgson C. D., Rivin I., Smith W. D. A characterization of convex hyperbolic polyhedra and of convex polyhedra inscribed in the sphere // *Bull. Am. Math. Soc.* 1992. Vol. 27, no. 2. P. 246–251.
296. Hodgson C. D., Rivin I. A characterization of compact convex polyhedra in hyperbolic 3-space // *Invent. Math.* 1993. Vol. 111, no. 1. P. 77–111.
297. Hsiang W.-Y. Generalized rotation hypersurfaces of constant mean curvature in the Euclidean spaces I // *J. Diff. Geom.* 1982. Vol. 17. P. 337–356.
298. Hsiang W.-Y., Teng Z.-H., Yu W.-C. New examples of constant mean curvature immersions of  $(2k - 1)$ -sphere into Euclidean  $2k$ -space // *Ann. Math.* 1983. Vol. 117, no. 3. P. 609–625.
299. Jessen B. Orthogonal icosahedra // *Nord. Mat. Tidskr.* 1967. Vol. 15, no. 2–3. P. 90–96.
300. Kahn P. J. Counting types of rigid frameworks // *Invent. Math.* 1979. Vol. 55, no. 3. P. 297–308.
301. Karcher H. Remarks on polyhedra with given dihedral angles // *Comm. Pure Appl. Math.* 1968. Vol. 21, no. 2. P. 169–174.
302. Kazdan J. L., Warner F. W. Curvature functions for open 2-manifolds // *Ann. Math.* 1974. Vol. 99, no. 2. P. 203–219.
303. Kazdan J. L., Warner F. W. Existence and conformal deformation of metric with prescribed Gaussian and scalar curvatures // *Ann. Math.* 1975. Vol. 101, no. 3. P. 317–331.
304. Kazdan J. L., Warner F. W. Prescribing curvatures // *Proc. Symp. Pure Math.* 1975. Vol. 27, pt. 2. P. 309–319.
305. Kuiper N. Sphères polyédriques flexibles dans  $E^3$ , d'après Robert Connelly // *Lect. Notes. Math.* 1979. Vol. 700. P. 147–168. (Рус. пер.: Кёйпер Н. Х. Изгибаемые полиэдральные сферы в  $E^3$ , по Роберту Коннелли // *Колмогоров А. Н., Новиков С. П.* (ред.) *Исследования по метрической теории поверхностей*. М.: Мир, 1980. С. 210–227.)
306. Labourie F. Métriques prescrites sur le bord des variétés hyperboliques de dimension 3 // *J. Diff. Geom.* 1992. Vol. 35, no. 3. P. 609–626.

307. *Ladopoulos P.* Sur la mobilité des polyèdres // Atti Accad. Pontaniana. 1999. Т. 48. P. 345–354.
308. *Laman G.* On graphs and rigidity of plane skeletal structures // J. Engin. Math. 1970. Vol. 4. P. 331–340.
309. *Leichtweiss K.* Konvexe Mengen. Berlin: VEB Deutsch. Verl. Wiss., 1980. (Рус. пер.: *К. Лихтвейс.* Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.)
310. *Lewy H.* A priori limitations for solutions of Monge–Ampere equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1935. Vol. 37, no. 3. P. 417–434.
311. *Liebmann H.* Über die Verbiegung der geschlossenen Flächen positiver Krümmung // Math. Ann. 1900. H. 53. S. 81–112.
312. *Lindelöf L.* Propriétés générales des polyèdres qui, sous une étendue superficielle donnée, renferment le plus grand volume // Clebsch Ann. 1870. Bd 2. S. 150–159.
313. *Maehara H.* Vector fields and quadratic surfaces // Ryukyu Math. J. 1998. Vol. 11. P. 53–63.
314. *Maehara H., Chinen K.* An infinitesimally rigid unit-bar-framework in the plane which contains no triangle // Ryukyu Math. J. 1995. Vol. 8. P. 37–41.
315. *Maehara H., Norihide T.* A spatial unit-bar-framework which is rigid and triangle-free // Graphs Comb. 1996. Vol. 12, no. 4. P. 341–344.
316. *Martinez-Maure Y.* Geometric inequalities for plane hedgehogs // Demonstr. Math. 1999. Vol. 32, no. 1. P. 177–183.
317. *Martinez-Maure Y.* De nouvelles inégalités géométriques pour les hérissons // Arch. Math. 1999. Vol. 72, no. 6. P. 444–453.
318. *Martinez-Maure Y.* Contre-exemple à une caractérisation conjecturée de la sphère // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I Math. 2001. Т. 332, no. 1. P. 41–44.
319. *Milka A. D.* Linear bending of star-like pyramids // C. R. Acad. Sci., Paris. Ser. II, Fasc. B Mec. 2003. Т. 331, no. 12. P. 805–810.
320. *Minagawa T.* Remarks on the infinitesimal rigidity of closed convex surfaces // Kōdai Math. Sem. Reports. 1956. Vol. 8, no. 1. P. 41–48.
321. *Minkowski H.* Allgemeine Lehrsätze über konvexe Polyeder // Nachr. Ges. Wiss. Göttingen. 1897. S. 198–219; Ges. Abh. Bd 2, Teubner, Leipzig–Berlin, 1911. S. 103–121. (Рус. пер.: *Минковский Г.* Общие теоремы о выпуклых многогранниках // Успехи мат. наук. 1936. Вып. 2. С. 55–71.)
322. *Minkowski H.* Theorie der konvexen Körper. Ges. Abh. Bd 2, Teubner, Leipzig–Berlin, 1911.
323. *Minkowski H.* Volumen und Oberfläche. Ges. Abh. Bd 2, Teubner, Leipzig–Berlin, 1911.
324. *Miranda C.* Su un problema di geometria differenziale in grande per gli ovaloidi // Ann. Math. Pura Appl. 1970. Vol. 87. P. 237–269.
325. *Miranda C.* Aggiunte ed Errata Corrige alla memoria 'Su un problema di geometria differenziale in grande per gli ovaloidi' // Ann. Math. Pura Appl. 1971. Vol. 88. P. 349–355.
326. *Nirenberg L.* The Weyl and Minkowski problems in differential geometry in the large // Comm. Pure Appl. Math. 1953. Vol. 6. P. 337–394.

- 
327. *Oliker V. I.* Hypersurfaces in  $\mathbb{R}^{n+1}$  with prescribed Gaussian curvature // *Comm. Partial Diff. Equations*. 1984. Vol. 9, no. 8. P. 807–838.
328. *Panina G.* Rigidity and flexibility of virtual polytopes // *Cent. Eur. J. Math.* 2003. Vol. 1, no. 2. P. 157–168, electronic only.
329. *Panina G.* New counterexamples to A. D. Alexandrov's hypothesis // *Adv. Geom.* 2005. Vol. 5, no. 2. P. 301–317.
330. *Peterson K.* The stress spaces of bipartite frameworks // *Pacific J. Math.* 2001. Vol. 197, no. 1. P. 173–182.
331. *Rembs E.* Zur Verbiegung von Flächen im Großen // *Math. Z.* 1952. Bd 56. S. 271–279.
332. *Rivin I.* A characterization of ideal polyhedra in hyperbolic 3-space // *Ann. Math.* 1996. Vol. 143, no. 1. P. 51–70.
333. *Rodrigues L., Rosenberg H.* Rigidity of certain polyhedra in  $\mathbb{R}^3$  // *Comment. Math. Helv.* 2000. Vol. 75, no. 3. P. 478–503.
334. *Rousset M.* Sur la rigidité de polyèdres hyperboliques en dimension 3: cas de volume fini, cas hyperidéale, cas fuchsien // *Bull. Soc. Math. Fr.* 2004. T. 132, no. 2. P. 233–261.
335. *Sabitov I. Kh.* The volume as a metric invariant of polyhedra // *Discrete Comput. Geom.* 1998. Vol. 20, no. 4. P. 405–425.
336. *Sabitov I. Kh.* On some recent results in the metric theory of polyhedra // *Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser.* 2000. Vol. 65. P. 167–177.
337. *Sabitov I. Kh.* Some applications of a formula for the volume of a polyhedron // *Sib. Adv. Math.* 2003. Vol. 13, no. 4. P. 102–118.
338. *Sauer R.* Infinitesimale Verbiegungen zueinander projektiver Flächen // *Math. Ann.* 1935. Bd 111. S. 71–82.
339. *Schlenker J.-M.* Convex polyhedra in Lorentzian space-forms // *Asian J. Math.* 2001. Vol. 5, no. 2. P. 327–364.
340. *Schlenker J.-M.* La conjecture des soufflets (d'après I. Sabitov) // *Bourbaki seminar*. Vol. 2002/2003. Exp. 909–923. Paris: Soc. Math. France, 2004. Asterisque 294. P. 77–95.
341. *Schlenker J.-M.* A rigidity criterion for non-convex polyhedra // *Discrete Comput. Geom.* 2005. Vol. 33, no. 2. P. 207–221.
342. *Schlenker J.-M., Souam R.* Higher Schläfli formulas and applications // *Compos. Math.* 2003. Vol. 135, no. 1. P. 1–24.
343. *Schneider R.* Convex bodies: the Brunn–Minkowski theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
344. *Schoenberg I. J., Zarembka S. K.* On Cauchy's lemma concerning convex polygons // *Canad. J. Math.* 1967. Vol. 19, no. 5. P. 1062–1071.
345. *Singer D.* Preassigning curvature of polyhedra homeomorphic to two-sphere // *J. Diff. Geom.* 1974. Vol. 9, no. 4. P. 633–638.
346. *Souam R.* Bending invariants for hypersurfaces // *Séminaire de théorie spectrale et géométrie*. Année 1998–1999. St. Martin D'Hères: Université de Grenoble I, Institut Fourier, Sémin. Théor. Spectrale Géom., Chambéry–Grenoble. 1999. T. 17. P. 105–109.



347. *Souam R.* The Schläfli formula for polyhedra and piecewise smooth hypersurfaces // *Diff. Geom. Appl.* 2004. Vol. 20, no. 1. P. 31–45.
348. *Stachel H.* Higher order flexibility of octahedra // *Period. Math. Hung.* 1999. Vol. 39, no. 1–3. P. 225–240.
349. *Stachel H.* Flexible cross-polytopes in the Euclidean 4-space // *J. Geom. Graph.* 2000. Vol. 4, no. 2. P. 159–167.
350. *Stachel H.* Infinitesimal flexibility of higher order for a planar parallel manipulator // *Karáné G. (ed.) et al. Topics in algebra, analysis and geometry. Proc. Gyula Strommer National Memorial Conf., Balatonfüred, Hungary, May 1999. Budapest: BPR Kiady, 2000. P. 343–353.*
351. *Stachel H.* Flexible octahedra in the hyperbolic space // *Prekopa A. et al., (eds.) Non-Euclidean geometries. Janos Bolyai memorial volume. Intern. Conf. Hyperbolic Geometry, Budapest, Hungary, July 2002. New York: Springer, 2006. P. 209–225.*
352. *Steinitz E.* Polyeder und Raumenteilungen // *Enzykl. Math. Wiss. III, Bd 12. Leipzig, 1922. S. 1–139.*
353. *Steinitz E.* Vorlesungen über die Theorie der Polyeder unter Einschluss der Elemente der Topologie. Berlin: Springer, 1934.
354. *Stoker J. J.* Geometrical problems concerning polyhedra in the large // *Comm. Pure Appl. Math.* 1968. Vol. 21, no. 2. P. 119–168.
355. *Suárez-Peiró E.* A Schläfli differential formula for simplices in semi-riemannian hyperquadrics, Gauss–Bonnet formulas for simplices in the de Sitter sphere and the dual volume of a hyperbolic simplex // *Pacific J. Math.* 2000. Vol. 194, no. 1. P. 229–255.
356. *Tay T.-S., White N., Whiteley W.* Skeletal rigidity of simplicial complexes. I // *Eur. J. Comb.* 1995. Vol. 16, no. 4. P. 381–403.
357. *Tay T.-S., White N., Whiteley W.* Skeletal rigidity of simplicial complexes. II // *Eur. J. Comb.* 1995. Vol. 16, no. 5. P. 503–523.
358. *Velimirović L. S.* On the second order infinitesimal bendings of a class of toroids // *Mat. Vesn.* 1997. Vol. 49, no. 1. P. 51–58.
359. *Velimirović L. S.* On variation of the volume under infinitesimal bending of a closed rotational surface // *Novi Sad J. Math.* 1999. Vol. 29, no. 3. P. 377–386.
360. *Velimirović L. S.* Change of geometric magnitudes under infinitesimal bending // *Facta Univ., Ser. Mech. Autom. Control Robot.* 2001. Vol. 3, no. 11. P. 135–148.
361. *Wegner B.* On the projective invariance of shaky structures in Euclidean space // *Acta Mech.* 1984. Vol. 53. P. 163–171.
362. *Weil H.* Über die Bestimmung einer geschlossenen konvexen Fläche durch ihr Linienelement // *Vierteljahrsschr. der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich.* 1916. S. 40–72.
363. *Weil H.* Über die Starrheit der Eiflächen und konvexen Polyeder // *Sitz. Berichte Preuss. Akad. Wiss.* 1917. 1 Halbjahr. XVI. S. 250–266.
364. *Whiteley W.* Infinitesimal motions of a bipartite framework // *Pacific J. Math.* 1984. Vol. 110, no. 1. P. 233–255.
365. *Whiteley W.* Infinitesimally rigid polyhedra. I: Statics of frameworks // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1984. Vol. 285, no. 2. P. 431–465.
366. *Whiteley W.* Infinitesimally rigid polyhedra. II: Modified spherical frameworks // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1988. Vol. 306, no. 1. P. 115–139.

- 
367. *Whiteley W.* The projective geometry of rigid frameworks // *L. Batten, C. Baker* (eds.) *Finite Geometries*. New York: Marcel Dekker, 1985. P. 353–370.
368. *Whiteley W.* Rigidity and polarity. I: Statics of sheet structures // *Geom. Dedicata*. 1987. Vol. 22. P. 329–362.
369. *Whiteley W.* Rigidity and polarity. II: Weaving lines and tensegrity frameworks // *Geom. Dedicata*. 1989. Vol. 30, no. 3. P. 255–279.
370. *Wunderlich W.* Wackeldodekaeder // *Ber. Math. Statist. Sek. Forschungszent. Graz*. 1980. No. 140–150 (Ber. 149). S. 1–8.
371. *Wunderlich W.* Neue Wackelikosaeder // *Anz. Österr. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl.* 1980. H. 117, no. 1–9. S. 28–33.
372. *Wunderlich W.* Wackelige Doppelpyramiden // *Anz. Österr. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl.* 1980. H. 117, no. 1–9. S. 82–87.
373. *Wunderlich W.* Wackelikosaeder // *Geom. dedic.* 1981. H. 11, no. 2. S. 137–146.
374. *Wunderlich W.* Kipp-Ikosaeder // *Elem. Math.* 1981. H. 36, no. 3. S. 153–158; 1982. H. 37, no. 3. S. 84–89.
375. *Wunderlich W.* Fast bewegliche Oktaeder mit zwei Symmetrieebenen // *Rad. Jugosl. Akad. znan. i umjetn. Mat. znan.* 1987. No. 6. S. 129–135.
376. *Wunderlich W.* Shaky polyhedra of higher connection // *Publ. Math.* 1990. Vol. 37, no. 3/4. P. 355–361.
377. *Ziegler G.* *Lectures on polytopes*. Berlin: Springer, 1995.

---

---

## Предметный указатель

---

---

- Величина стационарная 124  
Вершина истинная 55  
— многогранника 7  
— особая 410  
«Вершина» овала 276  
Воронка многогранника 425
- Геометрия внутренняя 52  
Гомеоморфизм 57, 143  
Граница множества 141  
Грань многогранника 7  
—, помещенная внутри  
  другой грани 283, 287  
«Грань» выпуклого множества 280  
Грани параллельные 283, 287
- Деформация подклеивания 247  
Деформации бесконечно малые,  
  первого порядка 402
- Изгибание выпуклого  
  многогранника 243  
Изображение сферическое 39  
Индикатрисы невмещаемые 300
- Комбинация множеств, линейная 276  
Комплекс 193  
Компонента множества связная 92, 142  
Кратность покрытия 145  
Кратчайшая 52  
— на развертке 71  
Кривизна вершины 42  
Кривизна поверхности,  
  перенесенная на плоскость 399
- Кривизна поверхности,  
  перенесенная на сферу 398  
— — условная 401  
— точки на развертке 55  
— части многогранника 43
- Лемма об отделимости 11  
— об отображении 92  
— Коши 85  
— —, усиленная 410  
Луч в развертке 215  
— на многограннике 215
- Метрика внутренняя 43  
— — многогранника 100  
— многогранная 101  
— многогранная положительной  
  кривизны 56  
— положительной кривизны 101
- Многогранник 7  
— бесконечный 11  
— выпуклый 8  
— — телесный 9  
— жесткий 124  
— замкнутый 10  
— полный 10  
— склеенный из развертки 53  
— телесный 7  
—  $K$ -триангулированный 199
- Многогранники аналогичные 460  
— полярные 46
- Многообразия  $K$ -триангулированных  
  многогранников 199  
Многообразие  $n$ -мерное 92

- Многоугольник 7  
 — геодезический 75  
 Множество гомеоморфное данному 143  
 — замкнутое 141  
 — — в  $M$  141  
 — открытое 141  
 — — в  $M$  141  
 — связное 92
- Нормаль внешняя 17
- Область Вороного 356  
 — Дирихле 356  
 Оболочка выпуклая замкнутая 22  
 Образ множества 143  
 Образующая луча, предельная 176  
 Объем многогранников,  
 смешанный 358, 365  
 Окрестность точки 141  
 —  $K$ -триангулированного  
 многогранника 202  
 Отображение 143  
 — взаимно непрерывное 143  
 — — однозначное 143  
 — непрерывное 143  
 — нормальное поверхности 401  
 — опорное поверхности 401
- Параллелогон 348  
 Параллеледр 346  
 Плоскость опорная 16  
 Прообраз множества 143  
 Пространство топологическое 140  
 Подклеивание многоугольника 245  
 — тривиальное 245  
 Подпространство топологического  
 пространства 141  
 Покрытие множества, замкнутое 145  
 Полупространство открытое 16  
 Полусумма множеств 277  
 Призма зональная 351  
 Проблема Вейля 264  
 — Кристоффеля 345  
 — Минковского, гладкая 345
- Развертка 50  
 — положительной кривизны 56, 189  
 — реализуемая 190  
 Развертки изометричные 51
- Разворачивание ломаной 229  
 Расстояние в развертке 51  
 Ребро зоны 350  
 — многогранника 7
- Свойство фигуры топологическое 57  
 Сеть 61  
 — отмеченных ребер  
 многогранника 85  
 Скорость вершины,  
 относительная 386  
 — изменения величины 124  
 Соответствие изометрическое 51  
 «Сторона» выпуклой фигуры 280
- Теорема об инвариантности  
 области 91  
 — о четырех вершинах овала 276  
 — Хелли 340  
 Точка внутренняя 141  
 — граничная 141
- Угол вокруг вершины, полный 55  
 — полный, вокруг внутренней  
 вершины 42  
 — предельный 27
- Фигура жесткая 402  
 Фигуры гомеоморфные 57  
 Функция выпуклого многоугольника,  
 существенно монотонная 127, 440  
 — дистанционная 397  
 — многогранника, поверхностная 136  
 — опорная 341  
 — сферического многоугольника,  
 существенно монотонная 129
- Часть многогранника,  
 бесконечная 287, 318  
 Число опорное 18  
 — — многогранника 356  
 — — многоугольника 439
- Шапочка 227  
 — бесконечная 228  
 Ширина многогранника 308
- $K$ -триангуляция 199  
 $\varepsilon$ -покрытие 145

---

---

## Оглавление

---

---

От редколлегии .....	iii
Предисловие .....	1
<b>Глава I. Основные понятия и простейшие свойства выпуклых многогранников</b> .....	7
§ 1. Определение выпуклого многогранника .....	7
§ 2. Задание многогранника плоскостями граней .....	16
§ 3. Задание замкнутого многогранника его вершинами .....	21
§ 4. Задание бесконечного многогранника вершинами и предельным углом ..	26
§ 5. Сферическое изображение .....	39
§ 6. Развертка .....	49
§ 7. Топологические свойства многогранников и разверток .....	57
§ 8. Некоторые теоремы из внутренней геометрии разверток .....	71
§ 9. Обобщения .....	81
<b>Глава II. Метод и результаты</b> .....	85
§ 1. Лемма Коши .....	85
§ 2. Лемма об отображении .....	91
§ 3. Задание многогранника разверткой (Обзор результатов глав III, IV и V) .....	97
§ 4. Многогранники с данными направлениями граней (Обзор результатов глав VI, VII и VIII) .....	105
§ 5. Многогранники с вершинами на данных лучах (Обзор результатов главы IX) .....	116
§ 6. Теоремы жесткости (Обзор результатов глав X и XI) .....	123
§ 7. Переход от многогранников к кривым поверхностям .....	135
§ 8. Основные понятия топологии .....	139
§ 9. Теорема об инвариантности области .....	145
<b>Глава III. Единственность многогранника с данной разверткой</b> ....	151
§ 1. Несколько лемм о многогранных углах .....	151

§ 2. Равенство двугранных углов при равенстве плоских углов .....	160
§ 3. Единственность многогранника с данной разверткой .....	165
§ 4. Бесконечные многогранники с кривизной, меньшей $2\pi$ .....	170
§ 5. Многогранники, имеющие границу .....	179
§ 6. Обобщения .....	183
<b>Глава IV. Существование многогранника с данной разверткой ....</b>	<b>189</b>
§ 1. Многообразии разверток .....	189
§ 2. Многообразии многогранников .....	198
§ 3. Существование замкнутого выпуклого многогранника с данной разверткой .....	207
§ 4. Существование бесконечного выпуклого многогранника с данной разверткой .....	209
§ 5. Существование бесконечного многогранника с данной разверткой и данным предельным углом .....	214
<b>Глава V. Склеивание и изгибание многогранников с границей ....</b>	<b>225</b>
§ 1. Склеивание многогранников с границей .....	225
§ 2. Изгибание выпуклых многогранников .....	243
§ 3. Обобщения к главам IV и V .....	260
<b>Глава VI. Условия равенства многогранников с параллельными гранями .....</b>	<b>267</b>
§ 1. Леммы о выпуклых многоугольниках .....	267
§ 2. О линейной комбинации многогранников .....	276
§ 3. Условие равенства замкнутых многогранников .....	283
§ 4. Условия равенства бесконечных многогранников .....	286
§ 5. Другое доказательство и обобщение теоремы о бесконечных многогранниках. О многогранниках с границей .....	291
§ 6. Обобщения .....	300
<b>Глава VII. Теоремы существования для многогранников с данными направлениями граней .....</b>	<b>306</b>
§ 1. Существование многогранника с данными площадями граней .....	306
§ 2. Существование многогранника с данными площадями граней по Минковскому .....	313
§ 3. Существование бесконечного многогранника с данными площадями граней .....	318
§ 4. Общая теорема существования для бесконечного многогранника .....	324
§ 5. Существование выпуклого многогранника с данными опорными числами .....	329
§ 6. Обобщения .....	341

<b>Глава VIII. Связь условия равенства многогранников с параллельными гранями с другими задачами</b> .....	346
§ 1. Параллелоэдры .....	346
§ 2. Многогранник наименьшей площади при заданном объеме .....	356
§ 3. Смешанные объемы и неравенство Брунна .....	363
<b>Глава IX. Многогранники с вершинами на данных лучах</b> .....	376
§ 1. Замкнутые многогранники .....	376
§ 2. Бесконечные многогранники .....	388
§ 3. Обобщения .....	396
<b>Глава X. Жесткость выпуклого многогранника со стационарной разверткой</b> .....	402
§ 1. Деформации многогранного угла .....	403
§ 2. Усиленная лемма Коши .....	409
§ 3. Стационарность двугранных углов многогранника при стационарности его плоских углов .....	414
§ 4. Жесткость многогранников и равновесие стержневых систем .....	421
§ 5. О деформациях разверток .....	424
§ 6. Жесткость многогранника со стационарной разверткой .....	429
§ 7. Обобщения .....	436
<b>Глава XI. Условия жесткости многогранника с данными направлениями граней</b> .....	439
§ 1. О деформациях многоугольников .....	439
§ 2. Теоремы о жесткости многогранников .....	445
§ 3. Связь теорем о жесткости друг с другом и с теорией смешанных объемов .....	453
§ 4. Обобщения .....	459
<b>Литература</b> .....	463
<b>Предметный указатель</b> .....	484

---

---

## Contents

---

---

<b>Editors' preface</b> .....	iii
<b>Preface</b> .....	1
<b>Chapter I. Basic concepts and simplest properties of convex polyhedra</b> .....	7
§ 1. Definition of a convex polyhedron .....	7
§ 2. Determining a polyhedron from the planes of its faces .....	16
§ 3. Determining a closed polyhedron from its vertices .....	21
§ 4. Determining an unbounded polyhedron from its vertices and the limit angle .....	26
§ 5. The spherical image .....	39
§ 6. Development .....	49
§ 7. Topological properties of polyhedra and developments .....	57
§ 8. Some theorems of the intrinsic geometry of developments .....	71
§ 9. Generalizations .....	81
<b>Chapter II. Methods and results</b> .....	85
§ 1. The Cauchy lemma .....	85
§ 2. The mapping lemma .....	91
§ 3. Determining a polyhedron from a development (Survey of chapters III, IV, and V) .....	97
§ 4. Polyhedra with prescribed face directions (Survey of chapters VI, VII, and VIII) .....	105
§ 5. Polyhedra with vertices on prescribed rays (Survey of chapter IX) .....	116
§ 6. Infinitesimal rigidity theorems (Survey of chapters X and XI) .....	123
§ 7. Passage from polyhedra to curved surfaces .....	135
§ 8. Basic topological notions .....	139
§ 9. The domain invariance theorem .....	145
<b>Chapter III. Uniqueness of polyhedra with prescribed development</b> .	151
§ 1. Several lemmas on polyhedral angles .....	151



§ 2. Equality of dihedral angles in polyhedra with equal planar angles .....	160
§ 3. Uniqueness of polyhedra with prescribed development .....	165
§ 4. Unbounded polyhedra of curvature less than $2\pi$ .....	170
§ 5. Polyhedra with Boundary .....	179
§ 6. Generalizations .....	183
<b>Chapter IV. Existence of polyhedra with prescribed development ...</b>	<b>189</b>
§ 1. The manifold of developments .....	189
§ 2. The manifold of polyhedra .....	198
§ 3. Existence of closed convex polyhedra with prescribed development .....	207
§ 4. Existence of unbounded convex polyhedra with prescribed development .....	209
§ 5. Existence of unbounded polyhedra given the development and the limit angle .....	214
<b>Chapter V. Gluing and flexing polyhedra with boundary .....</b>	<b>225</b>
§ 1. Gluing polyhedra with boundary .....	225
§ 2. Flexes of c convex polyhedra .....	243
§ 3. Generalizations of chapters IV and V .....	260
<b>Chapter VI. Conditions for congruence of polyhedra with parallel faces .....</b>	<b>267</b>
§ 1. Lemmas on convex polyhedra .....	267
§ 2. On linear combination of polyhedra .....	276
§ 3. Congruence conditions for closed polyhedra .....	283
§ 4. Congruence conditions for unbounded polyhedra .....	286
§ 5. Another proof and generalization of the theorem on unbounded polyhedra. Polyhedra with boundary .....	291
§ 6. Generalizations .....	300
<b>Chapter VII. Existence theorems for polyhedra with prescribed face directions .....</b>	<b>306</b>
§ 1. Existence of polyhedra with prescribed face areas .....	306
§ 2. Minkowski's proof of the existence of polyhedra with prescribed face areas .....	313
§ 3. Existence of unbounded polyhedra with prescribed face areas .....	318
§ 4. The general existence theorem for unbounded polyhedra .....	324
§ 5. Existence of convex polyhedra with prescribed support numbers .....	329
§ 6. Generalizations .....	341

---

<b>Chapter VIII. Relationship between the congruence condition for polyhedra with parallel faces and other problems</b> .....	346
§ 1. Parallelohedra .....	346
§ 2. A polyhedron of least area with fixed volume .....	356
§ 3. Mixed volumes and the Brunn inequality .....	363
<b>Chapter IX. Polyhedra with vertices on prescribed rays</b> .....	376
§ 1. Closed polyhedra .....	376
§ 2. Unbounded polyhedra .....	388
§ 3. Generalizations .....	396
<b>Chapter X. Infinitesimal rigidity of convex polyhedra with stationary development</b> .....	402
§ 1. Deformation of polyhedral angles .....	403
§ 2. The strong Cauchy lemma .....	409
§ 3. Stationary dihedral angles for stationary planar angles .....	414
§ 4. Infinitesimal rigidity of polyhedra and equilibrium of hinge mechanisms ....	421
§ 5. On the deformation of developments .....	424
§ 6. Rigidity of polyhedra with stationary development .....	429
§ 7. Generalizations .....	436
<b>Chapter XI. Infinitesimal rigidity conditions for polyhedra with prescribed face directions</b> .....	439
§ 1. On deformations of polygons .....	439
§ 2. Infinitesimal rigidity theorems for polyhedra .....	445
§ 3. Relationship of infinitesimal rigidity theorems with One another and with the theory of mixed volumes .....	453
§ 4. Generalizations .....	459
<b>References</b> .....	463
<b>Subject index</b> .....	484

Научное издание

**Александров Александр Данилович**  
**ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ**

Серия «Избранные труды»

**Том 2**

Редактор *М. Б. Успенская*

Художник *Н. А. Горбунова*

Художественный редактор *Е. П. Волокитин*

Технические редакторы *И. И. Кожанова, Н. М. Остроумова*

Корректоры *Л. А. Анкушева, А. А. Егоров, Л. И. Кононенко, И. Л. Малышева*

Компьютерный набор *Т. В. Беляева*

---

Изд. лиц. № 020297 от 23.06.1997.

Сдано в набор 20.12.2006. Подписано в печать 29.11.2007.

Бумага ВХИ. Формат 70 × 100<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Офсетная печать.

Усл. печ. л. 40,0 + 0,1 вкл. на мел. бум. Уч.-изд. л. 35,1. Тираж 700 экз. Заказ № 594.

---

Сибирская издательская фирма «Наука» РАН. 630099, Новосибирск, ул. Советская, 18.

СП «Наука» РАН. 630077, Новосибирск, ул. Станиславского, 25.

*αβθ*

